

**Applicabilité de la tomographie par filtrage de mode en double chenal sonore**Y. JACQUES<sup>1,2</sup>, F. EVENNOU<sup>1</sup>  
P. CERVENKA<sup>2</sup>1. Centre Militaire d'Océanographie  
EPSHOM, BP 426  
29275 BREST CEDEX2. Laboratoire de Mécanique Physique  
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)  
U.R.A. C.N.R.S. n° 879  
2, place de la gare de ceinture 78 210 Saint-Cyr-l'École.**RÉSUMÉ**

Deux problèmes sont abordés ici. Le premier concerne la faisabilité d'une inversion perturbative dans les conditions de célérimétrie qui nous intéressent (double-chenal). Le second traite de l'utilisation de paramètres obtenus par filtrage d'antennes verticales. En effet, le filtrage d'antennes verticales permet d'obtenir les phases modales et les vitesses de groupe modales alors que les méthodes d'inversion utilisées nécessitent la connaissance des vecteurs d'onde modaux. Une technique dérivée de celle proposée par Jones et al.<sup>1</sup>, permettant d'obtenir la valeur des vecteurs d'onde à partir de la connaissance des vitesses de groupe, sera utilisée. On peut voir au travers du cas traité ici que le profil de célérité qui nous intéresse permet de réaliser une inversion perturbative correcte dans le chenal supérieur. De même, la technique de passage des vitesses de groupe aux vecteurs d'onde donne de bons résultats.

**ABSTRACT**

We investigate the feasibility of a perturbative modal inversion to recover the celerity profile in a double sound channel configuration. We assume that mode filtering can be performed by means of a vertical receiving array, so that the group velocities and the modal phases (modulo  $2\pi$ ) are available. Our method is based on deriving the eigenvectors that are needed in the inversion process, from these measurements. A numerical simulation shows that the celerity profile can be properly recovered in the upper channel.

**INTRODUCTION**

La tomographie acoustique océanique est une méthode d'observation globale de l'océan à partir de mesures de propagation du son. Son principe originel repose sur l'utilisation des temps d'arrivée issus de la propagation multi-trajets<sup>2</sup>. Une alternative utilisant une description modale de la propagation est apparue par la suite. Elle utilise comme paramètres d'inversion les vitesses de groupe modales ou les vecteurs d'onde modaux<sup>1,3,4</sup>. Pour obtenir ces paramètres, plusieurs techniques de filtrage de modes réalisées sur des antennes verticales (vitesses de groupe) ou horizontales (vecteurs d'onde) sont proposées<sup>4</sup> dans la littérature. Nous souhaitons adapter ces méthodes au profil double-chenal typique des conditions de célérimétrie de l'Atlantique Nord-Est<sup>5</sup>. Nous proposons ici d'étudier une inversion perturbative réalisée à partir des vitesses de groupe supposées obtenues par filtrage d'antenne verticale. Nous nous restreignons à l'utilisation des modes qui se propagent uniquement dans le chenal supérieur. L'article comprend quatre sections. La première section présentera un bref rappel théorique sur la propagation modale. La seconde section indiquera la méthode d'inversion choisie. Dans la troisième section sera explicitée la méthode permettant d'obtenir les vecteurs d'onde à partir des vitesses de groupe. Enfin, dans la dernière section, seront présentés les résultats d'une simulation.

**1. RAPPELS SUR LA PROPAGATION MODALE**

La propagation d'un champ sonore dans un milieu invariant horizontalement de célérité  $c(z)$  peut être perçue comme la propagation dans la direction horizontale  $r$  d'une somme discrète et finie de modes verticaux orthonormés  $\Phi_m(z)$  vérifiant l'équation différentielle<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_m^2 \right) \Phi_m = 0 \quad (\text{EQ 1})$$

où  $k_m$  représente le vecteur d'onde associé au mode  $m$ .

L'expression du champ  $p(r, z, t)$  loin de la source peut s'exprimer comme une somme pondérée de ces modes :

$$p(r, z, t) = \sum_m A_m \Phi_m(z) e^{j(k_m r - \omega t)} \quad (\text{EQ 2})$$

où les coefficients  $A_m$  sont complexes.



## 2. INVERSION

L'inversion est réalisée en utilisant une méthode perturbative. Celle-ci consiste à choisir un profil de référence  $c^0(z)$  pour lequel on calcule les modes propres  $\Phi_m^0$  et les vecteurs d'onde  $k_m^0$ . Si l'on considère un profil proche du profil de référence,  $c(z) = c^0(z) + \Delta c(z)$ , de vecteurs d'onde associés  $k_m = k_m^0 + \Delta k_m$ , on a la relation approchée suivante<sup>4</sup>:

$$\Delta k_m = -\frac{\omega^2}{k_m^0} \int_0^\infty \frac{[\Phi_m^0(z)]^2}{[c^0(z)]^3} \Delta c(z) dz \quad (\text{EQ 3})$$

Cette relation peut être discrétisée et inversée. On a alors la relation suivante entre les différences de vecteurs d'onde  $\Delta k_m$  et les écarts de célérité  $\Delta c$ <sup>4,6</sup>:

$$\Delta c(z_i) = [G_{m,i}]^{-1} \Delta k_m \quad (\text{EQ 4})$$

avec :

$$G_{m,i} = -\frac{\omega^2 [\Phi_m^0(z_i)]^2}{k_m^0 [c^0(z_i)]^3} \Delta z \quad (\text{EQ 5})$$

Une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) est utilisée pour inverser la matrice  $[G]$ <sup>6</sup>.

Une façon d'obtenir une relation d'inversion basée sur les vitesses de groupe consiste à dériver la relation (3) par rapport à la fréquence. Une méthode alternative<sup>1</sup> est utilisée ici, consistant à obtenir les vecteurs d'onde à partir des vitesses de groupe.

## 3. RELATION ENTRE LES VITESSES DE GROUPE ET LES VECTEURS D'ONDE.

Étant données une pulsation  $\omega$  et une distance horizontale  $r$  entre la source et le récepteur, la mesure des phases  $\varphi_m$  correspondant aux modes  $m$  qui peuvent être isolés laissent subsister une indétermination modulo  $2\pi$  qu'il faut lever pour calculer les vecteurs d'onde associés :

$$k_{m,r} = \varphi_m + 2\pi M_m \quad (\text{EQ 6})$$

où  $M_m$  est entier et représente le nombre de tours effectués par la phase du mode  $m$  sur le trajet  $r$ .

Le calcul d'un ensemble de vecteurs d'onde  $\{k_m\}$  est théoriquement possible si l'on dispose d'une séquence de vitesses de groupe  $\{v_m\}$  et si le nombre de boucles effectuées sur la distance  $r$  par le rayon associé à l'un des modes de la séquence est connu.

La solution s'obtient à partir du lien entre vitesses de groupe et vitesses de phase. En utilisant les notations de W. Munk et C. Wunsch), les relations liant implicitement ces grandeurs, et qui s'appliquent aussi bien pour les rayons que pour les modes s'écrivent :

$$s = \hat{S} + \frac{\tau}{X} \quad (\text{EQ 7})$$

$$X = -\frac{\partial \tau}{\partial \hat{S}} \quad (\text{EQ 8})$$

avec :

$\hat{S}$  : Lenteur de phase (lenteur au point de retournement),

$X$  : période spatiale horizontale (i.e. distance entre les points de retournement),

$t$  : «délai» ou intégrale d'action,

$s = 1/v$  : lenteur de groupe ( $s \cdot X$  est le temps de vol sur la distance  $X$ ).

Bien que  $m$  soit discret, on explicite la dérivée de  $(\hat{S}/\tau)$  par rapport à  $m$  :

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\hat{S}}{\tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\hat{S}}{\tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial m} = -\frac{\frac{\tau}{X} + \hat{S}}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial m} = -\frac{s}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial m} \quad (\text{EQ 9})$$

En intégrant (9), on obtient :

$$\frac{\hat{S}_{m_1}}{\tau_{m_1}} - \frac{\hat{S}_{m_0}}{\tau_{m_0}} = -\int_{m_0}^{m_1} \frac{s}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial m} dm \quad (\text{EQ 10})$$

Si nous intégrons cette relation par partie, nous retrouvons la relation de Jones et al. (relation 21)<sup>1</sup>. On notera que si la relation (10) fait intervenir les vitesses de groupe, la relation de Jones et al. fait intervenir les dérivés des vitesses de groupe par rapport à  $m$ .

Dans le cas particulier de l'approximation W.K.B., valable pour les modes dont les points de retournement sont loin du fond et de la surface, on a la relation<sup>3</sup> :

$$\tau_m = \frac{2\pi}{\omega} \left( m + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{EQ 11})$$

En portant (11) dans (10), nous obtenons la relation :

$$\frac{\hat{S}_{m_1}}{\left( m_1 + \frac{1}{2} \right)} - \frac{\hat{S}_{m_0}}{\left( m_2 + \frac{1}{2} \right)} = -\int_{m_0}^{m_1} \frac{s}{\left( m + \frac{1}{2} \right)^2} dm \quad (\text{EQ 12})$$

La relation (12) permet d'obtenir une séquence de lenteur de phase de  $\hat{S}_m$  à partir de la connaissance des lenteurs de groupe  $s_m$ , et d'une lenteur de phase initiale  $\hat{S}_0$  estimée à partir de l'équation (7).

Si, outre les lenteurs de groupe, des valeurs mesurées suffisamment fiables des phases modales sont connues, une autre méthode permet d'obtenir par récurrence de meilleures approxi-

mations des valeurs des lenteurs de phase, notées  $\hat{S}_m^e$ . Cette méthode consiste à lever l'indétermination modulo  $2\pi$  dans la relation (6). Supposons connue une bonne approximation,  $\hat{S}_{m_0}^e$ , de la lenteur de phase d'un mode  $m_0$ . La relation (12) permet, à partir de  $\hat{S}_{m_0}^e$ , de calculer une valeur approchée de la lenteur de phase,  $\hat{S}_{m_1}^e$ , d'un mode  $m_1$  proche de  $m_0$ . En reportant  $\hat{S}_{m_1}^e$  dans la relation (6), on détermine une valeur corrigée de la lenteur de phase du mode  $m_1$  :

$$S_{m_1}^e = \frac{\varphi_{m_1}}{\omega r} + \frac{2\pi}{\omega r} E \left( \frac{r\omega \hat{S}_{m_1}^e}{2\pi} - \frac{\varphi_{m_1}}{2\pi} \right) \quad (\text{EQ 13})$$

où  $E(x)$  désigne l'entier le plus proche de  $x$ .

Une bonne indication de l'ordre maximal pour lequel le vecteur d'onde ainsi calculé est fiable peut être donnée par la partie fractionnaire de l'opérande  $x$  dans  $E(x)$ , qui doit rester très inférieure à 0.5. Cette méthode par récurrence nécessite de connaître une valeur initiale. Comme dans la première technique, une première estimation de la valeur de la lenteur de phase initiale  $\hat{S}_0$  est déduite de la relation (5) avec une connaissance a priori de la période spatiale horizontale  $X_0$ . Connaissant  $\varphi_0$ , la relation (13) livre alors la valeur initiale utilisée dans la récurrence.

#### 4. SIMULATION.

Nous effectuons une simulation en choisissant un profil de référence double-chanal typique des conditions de célérimétrie de l'atlantique nord-est. Les paramètres liés à ce profil sont affectés d'un index  $o$  en exposant (ex:  $k_m^o$ ). Nous rappelons que seuls les modes se propageant exclusivement dans le chenal supérieur (les dix premiers modes) sont inversés. Ceux-ci ne subissent pas l'influence du chenal inférieur et nous obtenons par conséquent des informations sur le seul chenal supérieur. Nous calculons les paramètres  $\Phi_m^e$  et  $k_m^e$  du profil recherché à l'aide d'un programme de calcul de modes. Les vitesses de groupe  $v_m$  sont calculées à partir de la relation suivante :

$$v_m = \frac{\omega}{k_m} \frac{\int_0^{D_z} [\Phi_m(z)]^2 [\alpha(z)]^{-2} dz}{\int_0^{D_z} [\Phi_m(z)]^2 dz}$$

Nous supposons donc que les vitesses de groupe  $v_m$  sont les vitesses que l'on obtiendrait au cours d'une expérimentation se déroulant dans des conditions idéales.

Pour la simulation, nous utilisons les paramètres suivants :

- fréquence  $f = 100$  Hz,
- hauteur de colonne d'eau  $Dz = 4500$  m,
- distance de la source au récepteur  $r = 100$  km.

Les tableaux suivants présentent les résultats obtenus en appliquant les méthodes décrites dans la section 3 pour obtenir les vecteurs d'onde à partir des vitesses de groupe. Nous portons dans ces tableaux les vecteurs d'onde du profil de référence  $k_m^o$ ,

les valeurs théoriques des vecteurs d'onde recherchés  $k_m^e$ , les vecteurs d'onde  $k_m$ , obtenues par l'intermédiaire des temps de groupe modaux, ainsi que les différences entre  $k_m$  et  $k_m^e$ . Dans le premier tableau, les vecteurs d'onde sont calculés à partir des vitesses de groupe et de la phase modale du mode 0. Dans le second tableau, les vecteurs d'onde sont calculés à partir des vitesses de groupe et de toutes les phases modales. Cependant, la valeur affichée du vecteur d'onde  $k_m$  est le résultat intermédiaire issue de l'équation (10) puisque le résultat final donné par l'équation (13) est exacte, c'est à dire redonne  $k_m^e$ .

| mode | $k_n^o$  | $k_n^e$  | $k_n$    | $k_n^e - k_n$ |
|------|----------|----------|----------|---------------|
| 0    | 0.418583 | 0.417587 | 0.417624 | 3 e-05        |
| 1    | 0.418418 | 0.417348 | 0.417343 | 5 e-06        |
| 2    | 0.418249 | 0.417103 | 0.417095 | 8 e-06        |
| 3    | 0.418067 | 0.416858 | 0.416843 | 1 e-05        |
| 4    | 0.417865 | 0.416605 | 0.416582 | 2 e-05        |
| 5    | 0.417651 | 0.416340 | 0.416308 | 3 e-05        |
| 6    | 0.417435 | 0.416066 | 0.416026 | 4 e-05        |
| 7    | 0.417227 | 0.415786 | 0.415740 | 4 e-05        |
| 8    | 0.417024 | 0.415510 | 0.415459 | 5 e-05        |
| 9    | 0.416835 | 0.415241 | 0.415184 | 6 e-05        |

Tableau 1 : vecteurs d'onde obtenus à partir des vitesses de groupe et de la phase du mode 0.

| mode | $k_n^o$  | $k_n^e$  | $k_n$    | $k_n^e - k_n$ |
|------|----------|----------|----------|---------------|
| 0    | 0.418583 | 0.417587 | 0.417624 | 3 e-05        |
| 1    | 0.418418 | 0.417348 | 0.417343 | 5 e-06        |
| 2    | 0.418249 | 0.417103 | 0.417104 | 7 e-07        |
| 3    | 0.418067 | 0.416858 | 0.416855 | 3 e-06        |
| 4    | 0.417865 | 0.416605 | 0.416601 | 3 e-06        |
| 5    | 0.417651 | 0.416340 | 0.416336 | 3 e-06        |
| 6    | 0.417435 | 0.416066 | 0.416063 | 2 e-06        |
| 7    | 0.417227 | 0.415786 | 0.415786 | 3 e-07        |
| 8    | 0.417024 | 0.415510 | 0.415511 | 9 e-07        |
| 9    | 0.416835 | 0.415241 | 0.415240 | 1 e-06        |

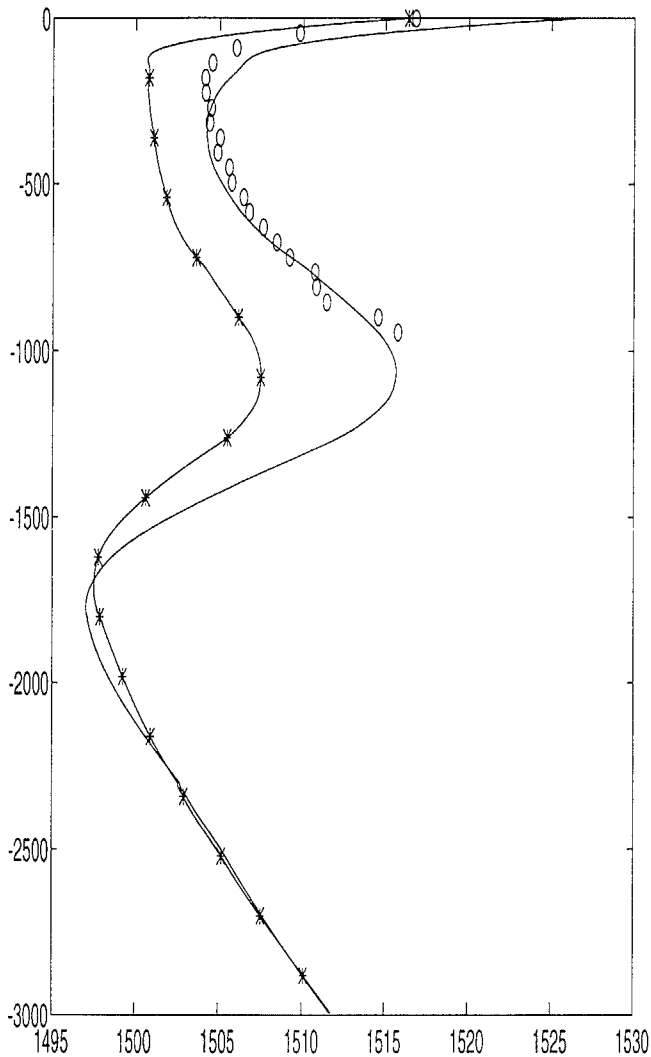
Tableau 2 : vecteurs d'onde obtenus à partir des vitesses de groupe et des phases.

Les résultats présentés dans le second tableau sont bien sur meilleurs que ceux présentés dans le premier tableau. En effet, dans le premier cas, nous calculons les vecteurs d'onde de chaque mode à partir d'une approximation du vecteur d'onde du mode précédent. Par conséquent, les erreurs s'accumulent. Dans le second cas, nous calculons chaque vecteur à partir d'une valeur du vecteur précédent, corrigée grâce à la connaissance de la phase. Les erreurs restent homogènes du mode 1 au mode 9.

Le résultat de l'inversion ( section 2) est présenté sur le profil suivant. Dans ce cas particulier, les erreurs commises sur les vecteurs d'onde sont suffisamment faibles pour que les profils issus des inversions fondées sur les données de l'un ou l'autre



des tableaux soient indiscernables.



Profil de référence (\*- \* - \* - \* -),  
 Profil recherché théorique (-----),  
 Résultat de l'inversion (-o--o-) après lissage.

## CONCLUSION

La qualité de l'inversion dépend fortement du conditionnement de la matrice liant les différences de vecteurs d'onde aux écarts de célérité (relation 4). Ici, les modes choisis pour l'inversion se propagent dans un domaine restreint, le chenal supérieur, ce qui permet d'obtenir des résultats satisfaisants à l'intérieur de ce chenal. En revanche, l'estimation des perturbations situées à l'extérieur du chenal (entre les deux chenaux, proche de la surface) est problématique car les modes qui se propagent là sont communs aux deux chenaux et il est difficile de les identifier avec les modes correspondant du profil de référence. La technique permettant d'obtenir les vecteurs d'onde à partir des phases modales et des vitesses de groupe modales donnent de bons résultats dans les simulations mais dépend de la connaissance a priori ou approximative d'un des paramètres. Il reste à évaluer l'influence des erreurs expérimentales et des erreurs inhérentes à cette méthode sur la qualité de l'inversion. Cette technique peut

également être utilisée dans le cadre d'une inversion non perturbative pour laquelle elle a été initialement développée<sup>1</sup>. Par la suite, on testera cette méthode non-perturbative dans des conditions similaires à celles décrites dans la simulation précédente.

## RÉFÉRENCES

1. Jones R.M, Shang E.C. et Georges T.M., « Nonperturbative modal tomography inversion. Part I. Theory » J. Acoust. Soc. Am. 94(4), 2296-2302.
2. Munk W. et Wunsch C., « Ocean Acoustic Tomography : A scheme for large scale monitoring », Deep-Sea Research, 123-161.
3. Munk W. et Wunsch C., « Ocean Acoustic Tomography : Rays and Modes », Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 21, No 4, P. 777-793.
4. Shang E.C., « Ocean Acoustic tomography based on adiabatic mode theory » J. Acoust. Soc. Am. 85(4), 1531-1537.
5. Stéphan Y, Martin-Lauzer, F.R. et Événou, F (1994) « Acoustic modeling and measurements in a double sofar channel », À paraître, NATO serie.
6. Subramaniam D. Rajan, James F. Lynch and Georges V. Frisk, « Perturbative inversion methods for obtaining bottom geoacoustic parameters in shallow water », J. Acoust. Soc. Am. 82(3), 998-1017.