

TURBO-CODES : PRINCIPE ET APPLICATIONS

Claude BERROU*, Alain GLAVIEUX**, Ramesh PYNDIAH**

* Département Electronique
 ** Département Signal et Communications
 Télécom Bretagne - BP 832 - 29285 BREST cedex

Cet article présente une première synthèse des résultats obtenus avec les turbo-codes, introduits en 1993. Construits à partir de la concaténation parallèle de deux codes convolutifs récurrents systématiques ou à partir de deux codes en blocs linéaires selon le principe des codes produits, les turbo-codes conduisent à des performances qui les situent parmi les meilleurs codes existants. Une structure originale de décodeur, utilisant une information dite extrinsèque au travers d'un processus itératif permet de décoder ces codes de façon quasi optimale. Associés avec des modulations à symboles M -aires, les turbo-codes conduisent à des performances qui surpassent celles des meilleures modulations codées connues à ce jour.

In this paper we propose the main results concerning the new class of codes, called turbo-codes introduced in 1993. These codes are built using a parallel concatenation of two recursive systematic convolutional codes or from two linear block codes. The performance of turbo-codes is very close to the theoretical limit predicted by Shannon. An original decoder, using an extrinsic information through an iterative process yields near optimum decoding of these codes. Associated with high spectral efficiency modulations, turbo-codes lead to coding gains larger than with classical coded modulations.

INTRODUCTION

Le codage correcteur d'erreurs, appelé aussi codage de canal est aujourd'hui une fonction de plus en plus utilisée dans les systèmes de transmissions numériques sur voie hertzienne. Grâce aux progrès de la technologie, l'introduction d'une fonction de codage conduit à un accroissement modéré de la complexité des équipements et permet une amélioration significative de leurs performances. Le codage de canal est actuellement très utilisé dans les systèmes de communications avec les mobiles, dans les transmissions par satellite, et est indispensable dans les transmissions avec les sondes spatiales. Un schéma de codage, qui est actuellement un standard, consiste à concaténer un code en bloc de Reed Solomon avec un code convolutif. Associé à une modulation de phase à symboles binaires (MDP-2, MDP-4), ce schéma de codage est généralement utilisé pour coder des transmissions à faible efficacité spectrale (< 2 bit/s/Hz). Il existe bien entendu d'autres façons d'associer des codes, on peut par exemple utiliser deux codes en bloc pour coder respectivement les lignes et les colonnes d'une matrice contenant des données. Ce schéma de codage, appelé code produit sera étudié dans la deuxième partie de l'exposé. Il est aussi possible d'associer deux codes convolutifs ; c'est le principe retenu dans les turbo-codes convolutifs qui feront l'objet de la première partie de cet exposé. Pour les transmissions à grande efficacité spectrale (supérieure à 2 bit/s/Hz), on préfère généralement utiliser des modulations codées, c'est-à-dire des modulations intégrant l'opération de codage. Nous verrons que les turbo-codes, associés à des modulations à symboles M -aires peuvent aussi être utilisés de manière avantageuse pour réaliser des transmissions à grande efficacité spectrale.

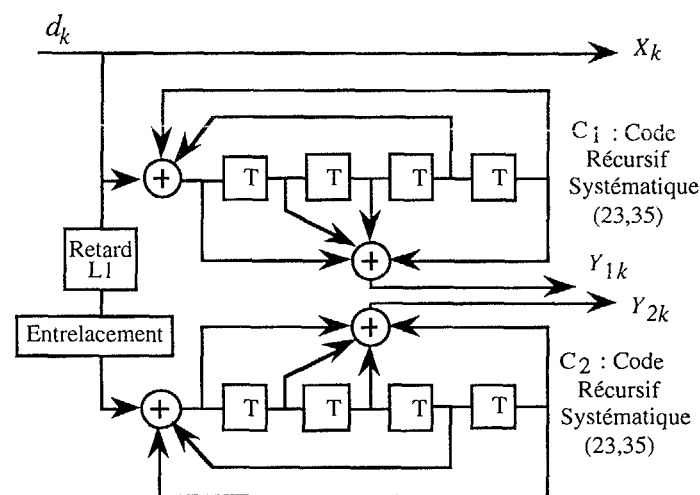


Figure 1 Codes concaténés en parallèle

La séquence d'information $\{d_k\}$ est appliquée simultanément à l'entrée du codeur C_1 et, via un entrelaceur, à l'entrée du codeur C_2 . Les données d_k sont toujours émises, ce qui confère à ce schéma de codage le caractère systématique. Chaque codeur $C_i, i=1,2$ produit un symbole de redondance $Y_{ik}, i=1,2$ qui est ou non poinçonné. En appelant R_1 et R_2 les rendements respectifs des codeurs C_1 et C_2 , le rendement R du codeur global est donné par :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 1 \quad (1)$$

Les codes RS présentent l'avantage, par rapport aux codes convolutifs Non Systématiques (NS) de même longueur de contrainte et de même rendement, d'être plus performants à faible rapport signal à bruit. Les codes RS et NS ayant la même distance libre, ils possèdent donc des performances très semblables à fort rapport signal à bruit [2].

La fonction d'entrelacement est réalisée à partir d'une matrice N par N où N est généralement une puissance de 2. Les données

PARTIE I : TURBO-CODES CONVOLUTIFS

1 - CONCATENATION PARALLELE DE CODES CONVOLUTIFS

Introduit par C. Berrou *et al* [1], ce type de concaténation associe deux codes convolutifs Récurrents Systématiques (RS) selon le principe représenté sur la figure 1.



d_k sont écrites ligne par ligne dans la matrice, et lues de manière non uniforme. La ligne à retard L_1 est introduite pour tenir compte de la latence introduite par le décodeur associé au code C_1 .

2 - DECODAGE DES CODES CONVOLUTIFS CONCATENES EN PARALLELE

2.1 - Principe du décodeur

Le décodage de deux codes C_1 et C_2 concaténés en parallèle peut être réalisé à partir de deux décodeurs DEC_1 et DEC_2 associés selon le principe représenté sur la figure 2.

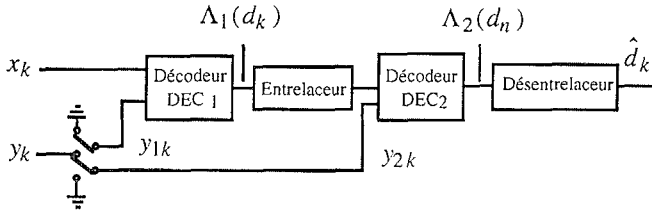


Figure 2 Décodeur pour codes concaténés en parallèle

Le symbole de redondance bruité y_k est démultiplexé et envoyé vers le décodeur DEC_1 (resp. DEC_2) lorsque la redondance est produite par le codeur C_1 (resp. C_2). Quand le symbole de redondance produit par un codeur élémentaire est poinçonné, l'entrée du décodeur correspondant est mise à zéro.

Le décodeur DEC_1 reçoit des symboles bruités x_k et y_{1k} issus du démodulateur et produit une décision relative à chaque symbole d_k . Un entrelaceur, placé entre les deux décodeurs élémentaires permet d'éclater les paquets d'erreurs produits par le décodeur DEC_1 . Les décodeurs DEC_1 et DEC_2 travaillant à partir de décisions pondérées, éventuellement quantifiées, le décodeur DEC_1 associe à chaque symbole décodé d_k une mesure de fiabilité sous forme du Logarithme de son Rapport de Vraisemblance (LRV).

$$\Lambda_1(d_k) = \log \frac{\Pr\{d_k = 1 / \text{observation}\}}{\Pr\{d_k = 0 / \text{observation}\}} \quad (2)$$

Le LRV d'un symbole peut être obtenu en utilisant un décodeur selon le Maximum de Vraisemblance a Posteriori (MAP). Malheureusement ce décodeur est beaucoup plus complexe qu'un décodeur selon l'algorithme de Viterbi. Il est aussi possible de modifier l'algorithme de Viterbi pour qu'il associe à chaque décision une mesure de fiabilité comparable au LRV [3]. Ces algorithmes de Viterbi modifiés, plus simples que le décodeur selon le MAP, conduisent cependant à d'excellents résultats.

2.2 - Notion d'information extrinsèque

Dans [1], nous avons montré qu'en sortie du décodeur DEC_1 selon le MAP, le LRV $\Lambda_1(d_k)$ associé à un symbole d_k pouvait se mettre sous la forme :

$$\Lambda_1(d_k) = \frac{2}{\sigma^2} x_k + W_{1k} \quad (3)$$

où x_k est la sortie du démodulateur associée au symbole d_k , σ^2 est la variance du bruit et W_{1k} est une quantité appelée *information extrinsèque*, indépendante de x_k et fonction des symboles émis par le codeur C_1 . Notons que l'expression de $\Lambda_1(d_k)$ peut également se mettre sous la forme (3) avec un algorithme de Viterbi modifié.

En utilisant un décodeur DEC_2 selon le MAP, le LRV $\Lambda_2(d_n)$ associé au symbole d_n peut, comme précédemment s'exprimer sous la forme de deux termes.

$$\Lambda_2(d_n) = f(\Lambda_1(d_n)) + W_{2n} \quad (4)$$

Il est possible de montrer que, grâce à la présence de l'entrelaceur situé entre les deux décodeurs élémentaires, le bruit affectant l'information extrinsèque $z_k = W_{2k}$ est faiblement corrélé avec les bruits affectant les entrées x_k et y_{1k} du décodeur DEC_1 .

Ainsi, l'information extrinsèque z_k peut être utilisée conjointement avec les sorties x_k et y_{1k} du démodulateur pour réaliser un nouveau décodage du symbole d_k . Il est donc possible de réaliser un décodeur itératif, utilisant l'information extrinsèque produite par le décodeur DEC_2 au travers d'une boucle de contre-réaction.

2.3 - Principe du décodeur itératif

La figure 3 représente le schéma de principe du décodeur itératif. Dans ce schéma, il n'est pas tenu compte des différents retards introduits par les décodeurs élémentaires et par les entrelaceurs.

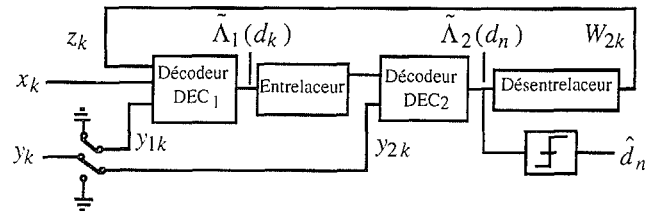


Figure 3 Principe d'un décodeur itératif

Le décodeur DEC_1 utilise désormais trois informations, x_k et y_{1k} en provenance du démodulateur et z_k pour calculer le LRV $\tilde{\Lambda}_1(d_k)$ associé au symbole d_k . En faisant l'hypothèse que conditionnellement à une réalisation du symbole d_k , l'information extrinsèque z_k est une variable gaussienne, de moyenne ± 1 et de variance σ_z^2 , il a été montré dans [1] que le LRV $\tilde{\Lambda}_1(d_k)$ pouvait se mettre sous la forme :

$$\tilde{\Lambda}_1(d_k) = \frac{2}{\sigma^2} x_k + \frac{2}{\sigma_z^2} z_k + W_{1k} \quad (5)$$

L'information extrinsèque z_k ayant été produite par le décodeur DEC_2 , cette information ne doit pas être utilisée de nouveau par ce décodeur. Ainsi, les entrées du décodeur DEC_2 sont égales à $\tilde{\Lambda}_1(d_n)$ et à y_{2n} avec :

$$\tilde{\Lambda}_1(d_n) = \Lambda_1(d_n) \Big|_{z_n=0} \quad (6)$$

La nouvelle valeur de l'information extrinsèque $z_k = W_{2k}$ est alors obtenue de la façon suivante :

$$W_{2k} = \Lambda_2(d_k) \Big|_{\tilde{\Lambda}_1(d_k)=0} \quad (7)$$

La structure itérative de ce décodeur, qui utilise une information qu'il a produite, a conduit à donner à ce système de codage/décodage le nom de *Turbo-code*.

Le turbo-décodeur, représenté sur la figure 4 est constitué de P modules identiques comprenant chacun deux décodeurs élémentaires. Chaque module p a trois entrées et une sortie. Les deux premières entrées reçoivent au travers d'une ligne à retard les sorties $\{x_k\}_p$ et $\{y_k\}_p$ du démodulateur et la troisième entrée est alimentée par l'information extrinsèque $\{z_k\}_p$ produite par le module $(p - 1)$.

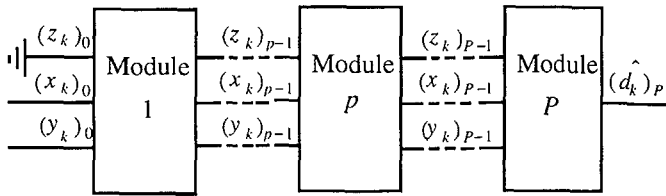


Figure 4 Schéma d'un turbo-décodeur

3 - PERFORMANCES DES TURBO-CODES SUR CANAL GAUSSIEN

Considérons un premier exemple de turbo-code de rendement 1/2 construit à partir de deux codes convolutifs récursifs systématiques, de polynômes générateurs (37,21), de rendement élémentaire 2/3 et d'un entrelaceur constitué par une matrice de dimension 256 par 256. Les décodeurs élémentaires utilisent un algorithme selon le MAP ainsi que des décisions pondérées non quantifiées. Le Taux d'Erreurs Binaires (TEB) en fonction du rapport signal à bruit E_b / N_0 est tracé sur la figure 5 pour un nombre d'itérations allant de 1 à 18.

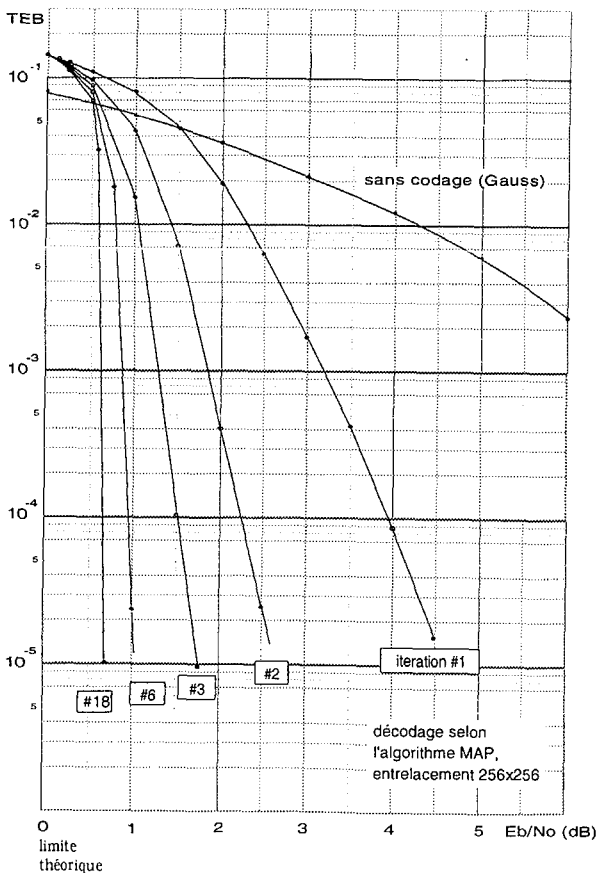


Figure 5 TEB en fonction du rapport signal à bruit pour un turbo-code de rendement 1/2 (exemple 1) sur canal gaussien

Après 18 itérations, un TEB de 10^{-5} est obtenu pour seulement 0,7 dB de rapport signal à bruit, ce qui représente les meilleures performances atteintes à ce jour pour un système de transmission avec codage. Ce résultat place les turbo-codes de rendement 1/2 à seulement 0,7 dB de la limite de Shannon, en prenant comme référence un TEB de 10^{-5} .

Dans ce deuxième exemple de turbo-code de rendement 1/2, les décodeurs élémentaires utilisent désormais un algorithme de Viterbi modifié [3] et des décisions pondérées quantifiées sur 4 bits. Les polynômes générateurs des codeurs élémentaires sont différents, (37,25) pour le codeur C_1 et (23,35) pour le codeur

C_2 . L'entrelaceur de dimension plus réduite que dans l'exemple précédent, est réalisé à partir d'une matrice 64 par 64. Le TEB de ce turbo-code est tracé sur la figure 6 en fonction du rapport signal à bruit E_b / N_0 après 10 itérations. Sur la figure 6, nous avons aussi tracé le TEB d'un code de Reed Solomon (RS) de paramètres (255,223) concaténé avec un code convolutif de rendement 1/2, de longueur de contrainte 7 et de polynômes générateurs (133,171). L'entrelaceur placé entre le code RS et le code convolutif est constitué par une matrice à $I = 2$ lignes et 255 colonnes ou est un entrelaceur idéal ($I = \infty$).

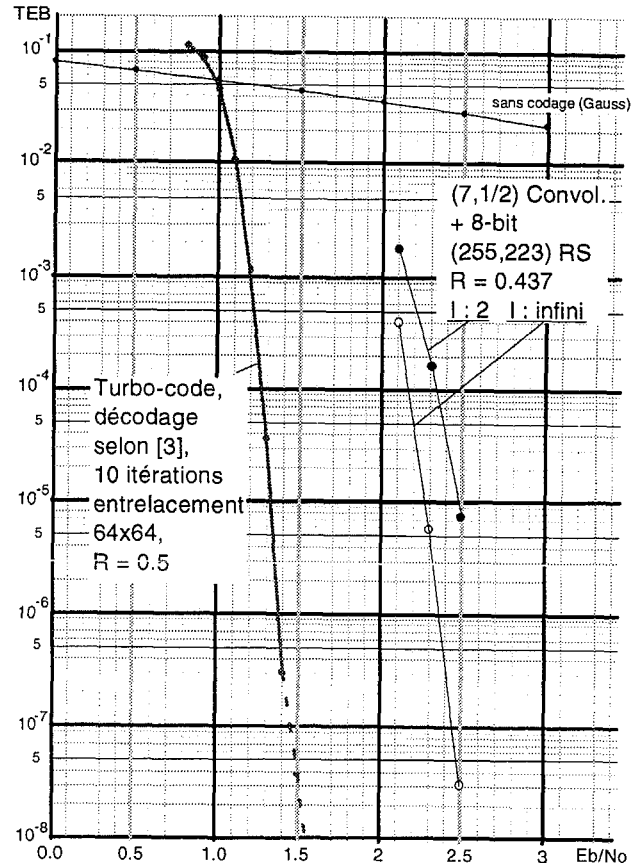


Figure 6 TEB en fonction du rapport signal à bruit pour un turbo-code de rendement 1/2 (exemple 2) sur canal gaussien

Après 10 itérations, un TEB de 10^{-5} est atteint pour un E_b / N_0 de 1,37 dB soit une dégradation des performances de 0,67 dB par rapport au premier exemple. Cette dégradation est tout compte fait assez faible compte tenu des simplifications importantes apportées aux décodeurs élémentaires, de la réduction de la taille de la matrice d'entrelacement et de l'utilisation de données quantifiées sur 4 bits. Il est aussi intéressant de remarquer qu'après 10 itérations, les performances de ce turbo-code surpassent celles du code concaténé avec un entrelaceur idéal ($I = \infty$) d'environ 1 dB pour un TEB de 10^{-6} . Notons aussi que le code concaténé possède un rendement de 0,437 alors que celui du turbo-code est de 0,5.

Dans l'exemple suivant, nous présentons les performances d'un turbo-code de rendement 1/3, qui pourrait être avantageusement utilisé pour protéger les transmissions en espace lointain avec les sonde spatiales (figure 7). Ce turbo-code est en tout point identique à celui du deuxième exemple mais les symboles de redondance produits par les codeurs élémentaires ne sont pas poinçonnés, ce qui conduit à un rendement global de 1/3.

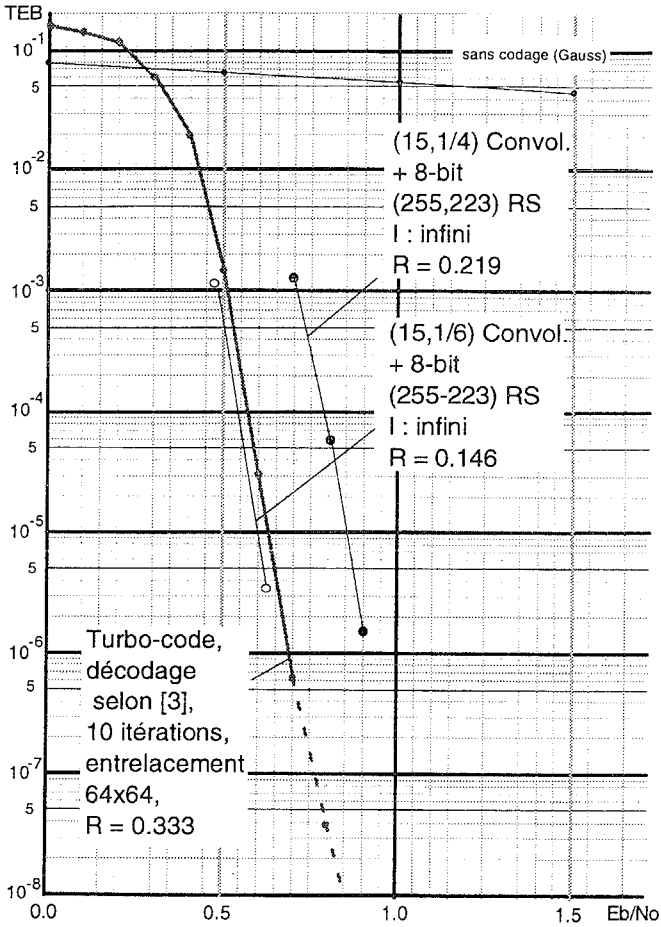


Figure 7 TEB en fonction du rapport signal à bruit pour un turbo-code de rendement 1/3 (exemple 3) sur canal gaussien

Après 10 itérations, un TEB de 10^{-5} est atteint avec un rapport E_b / N_0 de seulement 0,65 dB. Pour obtenir des performances comparables il faut par exemple, concaténer un code RS(255,223) avec un code convolutif de rendement 1/6 et de longueur de contrainte 15, c'est-à-dire possédant un treillis à $2^{14} = 16384$ états, et utiliser un entrelaceur de grande taille.

4 - TURBO-CODES ET MODULATIONS A SYMBOLES M-AIRES

4.1 - Structure du codeur

Nous allons maintenant considérer l'association d'un turbo-code avec une modulation à $M = 2^m$ états de phase (MDP-M) ou d'amplitude suivant deux porteuses en quadrature (MAQ-M). Nous ferons l'hypothèse que les symboles émis par le turbo-code sont périodiquement poinçonnés de façon à ce que son rendement R soit de la forme :

$$R = \frac{m - \tilde{m}}{m} \tag{8}$$

où \tilde{m} est le nombre de symboles codés.

Le schéma de principe de ce système de codage est représenté sur la figure 8. La fonction de poinçonnage agit uniquement sur les symboles de redondance générés par le turbo-code. En considérant une modulation à M états, l'efficacité spectrale du système de transmission ainsi décrit est égale à :

$$\eta = R \log_2 M \tag{9}$$

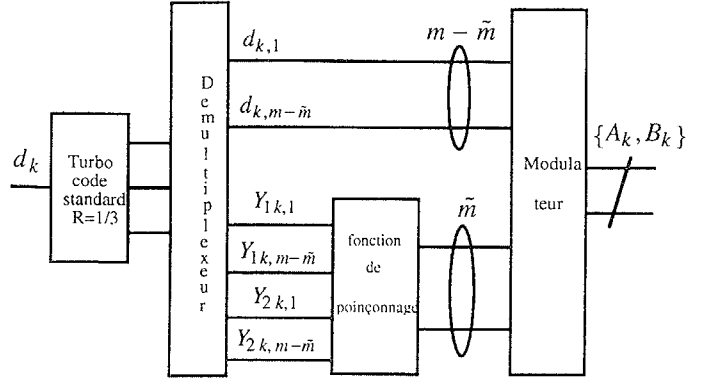


Figure 8 Association d'un turbo-codeur avec une modulation à symboles M-aires

Soient (A_k, B_k) le couple représentant à l'instant k le symbole M -aire émis. Ce symbole est associé à m bits $(u_{k,i}, i = 1, \dots, m)$ selon un codage de GRAY. Dans le système de codage proposé, les symboles de redondance produits par le turbo-code sont associés aux bits $u_{k,i}$ les moins bien protégés vis à vis du bruit.

4.2 - Structure du décodeur

En considérant un démodulateur cohérent et un canal gaussien, les sorties des voies en phase et en quadrature du démodulateur sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_k &= A_k + i_k \\ y_k &= B_k + q_k \end{aligned} \tag{10}$$

où i_k et q_k sont deux bruits gaussiens, de moyenne nulle, non corrélés et de même variance σ^2 .

Dans le paragraphe 2.1, les sorties du démodulateur étaient, au bruit près, égales aux symboles binaires émis par le codeur, ce qui n'est plus le cas désormais. Avec une modulation à symboles M -aires il est donc nécessaire de déterminer à partir du couple (x_k, y_k) le Logarithme du Rapport de Vraisemblance associé à chacun des m bits $u_{k,i}$.

$$\Lambda(u_{k,i}) = \log \frac{\Pr\{u_{k,i} = 1 / x_k, y_k\}}{\Pr\{u_{k,i} = 0 / x_k, y_k\}} ; i = 1, \dots, m \tag{11}$$

Le calcul des quantités $\Lambda(u_{k,i})$ conduit à des expressions relativement complexes. Cependant, pour un rapport signal à bruit supérieur à quelques dB, il est possible de les simplifier notamment pour les modulations MAQ-M où M est un carré parfait (16, 64, 256).

Pour une modulation MAQ-M avec $M = 2^{2p}$; $(m = 2p)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \Lambda(u_{k,p}) &= |x_k| - 2^{p-1} \\ \Lambda(u_{k,i}) &= |\Lambda(u_{k,i+1})| - 2^{i-1} ; i = (p-1) \dots 2 \\ \Lambda(u_{k,1}) &= x_k \end{aligned} \tag{12-a}$$

et :

$$\begin{aligned} \Lambda(u_{k,2p}) &= |y_k| - 2^{p-1} \\ \Lambda(u_{k,i+p}) &= |\Lambda(u_{k,i+1+p})| - 2^{i-1} ; i = (p-1) \dots 2 \\ \Lambda(u_{k,1+p}) &= y_k \end{aligned} \tag{12-b}$$

Le système de décodage, dont le principe est représenté sur la figure 9 est constitué d'un circuit d'interface pour le calcul des $\Lambda(u_{k,i})$, d'un démultiplexeur et d'un turbo-décodeur identique à celui présenté dans le paragraphe 2.3.

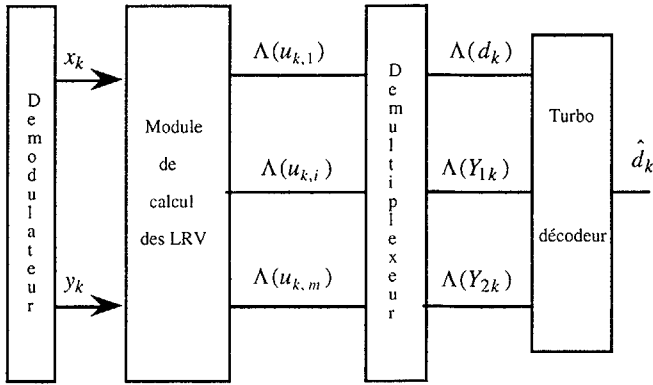


Figure 9 Principe du circuit de décodage

4.3 - Performances des turbo-codes associés avec des modulations à symboles M-aires

Les résultats présentés dans ce paragraphe correspondent à un turbo-code construit à partir de deux codes convolutifs récurrents systématiques identiques, de longueur de contrainte 5 et de polynômes générateurs (23,35). La matrice d'entrelacement du turbo-code est de dimension 64 par 64.

Sur les figures 10, 11 et 12 est tracé en fonction du rapport signal à bruit E_b/N_0 , le TEB de trois systèmes de transmission ayant respectivement une efficacité spectrale de 2, 3 et 4 bit/s/Hz. Sur ces figures nous avons aussi porté le TEB de modulations codées en treillis à 64 états ayant les mêmes efficacités spectrales que les systèmes étudiés.

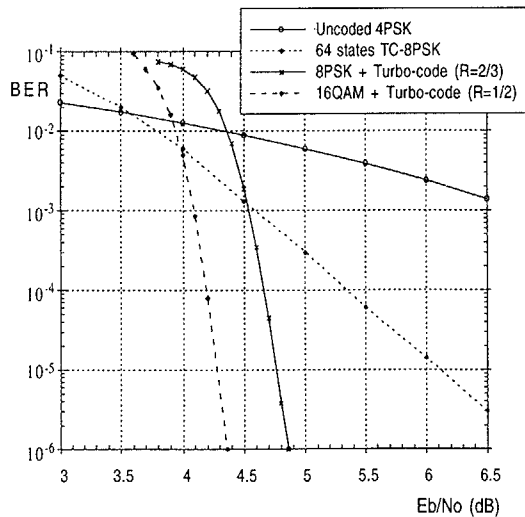


Figure 10 TEB d'une modulation MAQ-16 associée avec un turbo-code de rendement $R=1/2$ (efficacité spectrale 2bit/s/Hz)

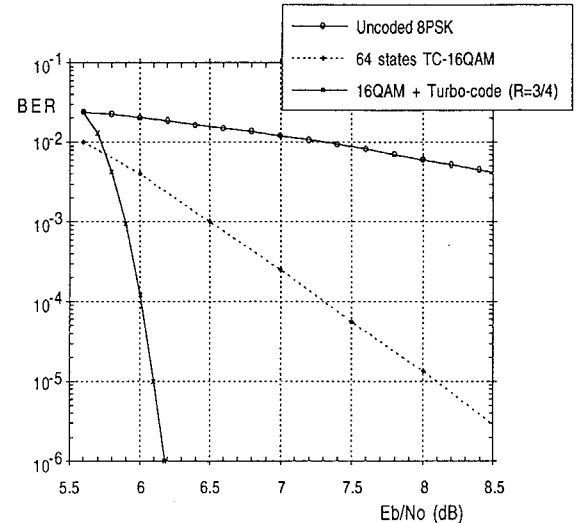


Figure 11 TEB d'une modulation MAQ-16 associée avec un turbo-code de rendement $R=3/4$ (efficacité spectrale 3bit/s/Hz)

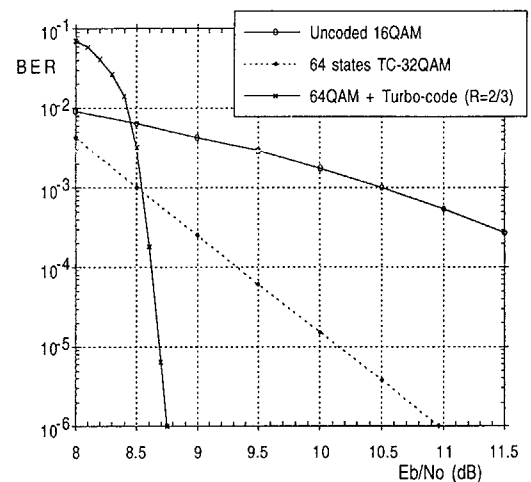


Figure 12 TEB d'une modulation MAQ-64 associée avec un turbo-code de rendement $R=2/3$ (efficacité spectrale 4bit/s/Hz)

Ces trois exemples montrent que l'association d'un turbo-code avec une modulation à symboles M -aires conduit à de meilleures performances que les modulations codées en treillis. Pour un TEB de 10^{-6} , le gain de codage apporté par un turbo-code par rapport à une modulation codée en treillis à 64 états est pratiquement toujours supérieur à 2 dB. Sur canal de Rayleigh, les performances des turbo-codes associés avec des modulations à symboles M -aires, surpassent aussi les modulations en treillis optimisées pour ce type de canal [4].

PARTIE II : LES CODES PRODUITS OU TURBO-CODES EN BLOCS

1 - INTRODUCTION

Les codes produits [5] sont des codes construits à partir de deux ou plusieurs codes en blocs élémentaires, généralement linéaires.

Considérons deux codes en blocs élémentaires C_1 et C_2 ayant respectivement pour paramètres (n_1, k_1, δ_1) et (n_2, k_2, δ_2) où n_i



est la longueur des mots du code C_i , k_i la longueur des messages et δ_i la distance de Hamming minimale du code. Un code produit se présente sous forme d'une matrice \mathbf{C} à n_1 lignes et n_2 colonnes où :

- les symboles binaires d'informations sont représentés par une sous-matrice \mathbf{M} à k_1 lignes et k_2 colonnes,
- chacune des k_1 lignes de la matrice \mathbf{M} est codée par un code C_2 ,
- chacune des n_2 colonnes de la matrice \mathbf{C} est codée par un code C_1 .

Le principe de construction d'un code produit est illustré sur la figure 13. Ses paramètres (n, k, δ) s'expriment en fonction de ceux des codes C_1 et C_2 par :

$$\begin{aligned} n &= n_1 \cdot n_2 \\ k &= k_1 \cdot k_2 \\ \delta &= \delta_1 \cdot \delta_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Le rendement R du code produit est alors égal à :

$$R = R_1 \cdot R_2 \quad (14)$$

où R_i est le rendement du code C_i . Les paramètres du code produit C s'expriment donc comme le produit des paramètres des codes élémentaires utilisés pour le construire.

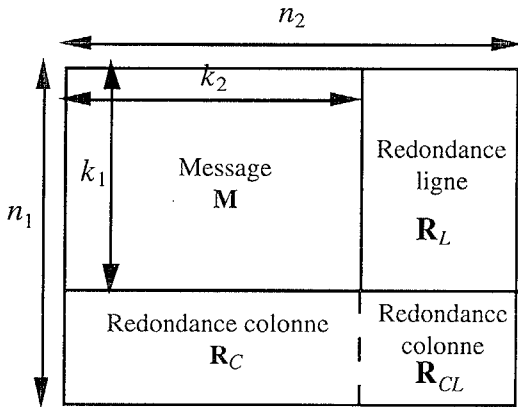


Figure 13 Principe de codage d'un code produit.

2 - DECODAGE DES CODES PRODUITS

Le décodage des codes produits se fait classiquement en décodant les lignes puis les colonnes de la matrice de codage à partir d'un décodeur algébrique (décisions fermes). Comme pour les turbo-codes convolutifs, il est possible de réaliser le décodage des codes produits en utilisant un processus itératif. Dans ce cas le décodage des lignes et des colonnes doit se faire à partir de décisions pondérées et à chaque symbole décodé doit être associée une mesure de fiabilité.

Le principe du décodage itératif des codes produits étant semblable à celui des turbo-codes convolutifs, ils peuvent par conséquent, être désignés sous le vocable de turbo-codes en blocs.

2.1 Décodage des lignes ou des colonnes d'un code produit

En considérant une transmission utilisant une modulation de phase binaire (MDP-2, MDP-4) codée par un code en bloc de rendement k_i/n_i , l'entrée du décodeur lorsque le canal est perturbé par un bruit gaussien blanc additif, est égale à :

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{B} \quad (15)$$

où $\mathbf{R} = (r_1 \dots r_j \dots r_{n_i})$ est le vecteur d'observation, $\mathbf{C} = (c_1 \dots c_j \dots c_{n_i})$, $c_j = \pm 1$ le mot émis correspondant à une ligne ou une colonne de la matrice de codage et $\mathbf{B} = (b_1 \dots b_j \dots b_{n_i})$ un vecteur de bruit blanc dont les composantes b_j sont à moyenne nulle et de même variance σ^2 .

Le décodage des lignes (ou des colonnes) est réalisé à partir de l'algorithme de CHASE [6] qui permet de déterminer les mots du code les plus vraisemblables puis, parmi ces mots il sélectionne celui qui est à la distance euclidienne minimale de \mathbf{R} .

La mesure de fiabilité associée à chaque symbole c_j ; $1 \leq j \leq n_i$ appartenant au mot décodé peut être déterminée à partir du Logarithme du Rapport de Vraisemblance (LRV).

$$\Lambda(c_j) = \log \frac{\Pr\{c_j = 1 / \mathbf{R}\}}{\Pr\{c_j = -1 / \mathbf{R}\}} \quad (16)$$

En utilisant la règle de Bayes et en tenant compte du fait que le bruit est blanc et gaussien, on montre [5] que le LRV associé au symbole c_j est égal à :

$$\Lambda(c_j) = \log \frac{\sum_{q \in S_j^+} \exp\left(-\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{C}^q|^2}{2\sigma^2}\right)}{\sum_{q \in S_j^-} \exp\left(-\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{C}^q|^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (17)$$

où S_j^i représente l'ensemble des mots du code ayant un symbole égal à i ($i = \pm 1$) en position j .

Le nombre de mots d'un code en bloc étant généralement élevé, le calcul du LRV d'un symbole à partir de la relation (17) est relativement complexe. Lorsque le rapport signal à bruit est suffisamment grand, la relation (17) peut être simplifiée en ne conservant au numérateur et au dénominateur que les deux mots du code $\mathbf{C}^{\min(+)}$ et $\mathbf{C}^{\min(-)}$, à la distance minimale du vecteur \mathbf{R} et appartenant respectivement à S_j^+ et à S_j^- .

En procédant ainsi, l'expression (17) du LRV se simplifie et peut se mettre sous la forme :

$$\Lambda(c_j) \approx \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ |\mathbf{R} - \mathbf{C}^{\min(-)}|^2 - |\mathbf{R} - \mathbf{C}^{\min(+)}|^2 \right\} \quad (18)$$

En introduisant les composantes du vecteur d'observation \mathbf{R} , il est possible de mettre le LRV d'un symbole sous la forme [5] :

$$r'_j \triangleq \frac{\sigma^2}{2} \Lambda(c_j) = r_j + w_j \quad (19)$$

Le LRV d'un symbole est alors égal à la somme de l'échantillon r_j présent à l'entrée du décodeur et d'une quantité w_j , indépendante de r_j et analogue à l'information extrinsèque des turbo-codes convolutifs.

Pour déterminer l'expression simplifiée du LRV d'un symbole en sortie du décodeur, il est nécessaire de déterminer les deux mots du code $\mathbf{C}^{\min(+)}$ et $\mathbf{C}^{\min(-)}$ à la distance minimale de \mathbf{R} et ayant des symboles de signe opposé en position j . Pour cela, on utilise l'algorithme de CHASE [6] qui permet de déterminer un sous-ensemble de mots du code parmi lesquels on peut trouver *a priori* les deux mots recherchés.

Notons toutefois qu'il arrive que l'on ne puisse pas trouver dans le sous-ensemble de mots du code déterminé à partir de

l'algorithme de CHASE, deux mots à la distance minimale de \mathbf{R} ayant des symboles de signes différents en position j ($1 \leq j \leq n$).

Dans ce cas, le LRV d'un symbole est simplement fixé à :

$$r_j = \beta \cdot d_j \tag{20}$$

où d_j est le symbole en position j appartenant au mot du code à la distance minimale de \mathbf{R} et β est une constante à déterminer.

2.2 Décodage itératif des codes produits

Avec un code produit, l'observation à l'entrée du décodeur est une matrice $[\mathbf{R}]$ à n_1 lignes et à n_2 colonnes. Un premier décodage suivant les lignes de la matrice $[\mathbf{R}]$, en utilisant l'algorithme décrit au paragraphe 2.1 de la partie II permet de déterminer une matrice $[\mathbf{R}']$ dont on peut extraire une information extrinsèque $[\mathbf{W}_0] = [\mathbf{R}'] - [\mathbf{R}]$. Le décodage se poursuit alors en décodant les colonnes de la matrice $[\mathbf{R}_1]$ égale à :

$$[\mathbf{R}_1] = [\mathbf{R}] + \alpha_1 [\mathbf{W}_0] \tag{21}$$

où α_1 est une constante utilisée pour réduire la contribution de l'information extrinsèque dont la fiabilité est généralement faible durant les premières itérations. Après décodage de la matrice $[\mathbf{R}_1]$ suivant les colonnes, on obtient une nouvelle information extrinsèque $[\mathbf{W}_1]$, que l'on ajoute à l'observation $[\mathbf{R}]$ pour former une matrice $[\mathbf{R}_2]$ qui sera décodée suivant les lignes.

$$[\mathbf{R}_2] = [\mathbf{R}] + \alpha_2 [\mathbf{W}_1] \tag{22}$$

D'une manière générale, à l'itération p , on réalise le décodage suivant les lignes (ou les colonnes) d'une matrice $[\mathbf{R}_p]$ de la forme :

$$[\mathbf{R}_p] = [\mathbf{R}] + \alpha_p [\mathbf{W}_{p-1}] \text{ avec } [\mathbf{R}_0] = [\mathbf{R}] \tag{23}$$

où $[\mathbf{W}_{p-1}]$ résulte de la différence entre la matrice en sortie du décodeur et celle présente en entrée, à l'itération $(p - 1)$. Notons que la fiabilité de l'information extrinsèque $[\mathbf{W}_{p-1}]$ augmentant au fil des itérations, il faut augmenter le coefficient α_p avec p .

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver les mots $\mathbf{C}^{\min(i)}$ et $\mathbf{C}^{\min(-i)}$, les éléments correspondant de la matrice $[\mathbf{W}_p]$ sont déterminés à partir de la relation (20), où la constante β indicée (β_p) en fonction de l'itération p considérée croît avec p . Le schéma de principe d'un module du décodeur itératif est représenté sur la figure 14.

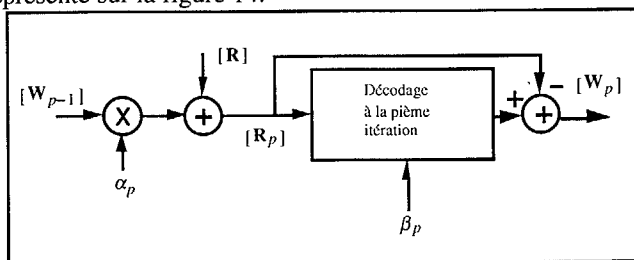


Figure 14 Principe du décodage de la matrice $[\mathbf{R}_p]$ à la $p^{\text{ième}}$ itération

3 - PERFORMANCES DES TURBO-CODES EN BLOCS SUR CANAL DE GAUSS

Les codes produits étudiés ont été construits à partir de codes élémentaires de type BCH étendus.

Les valeurs des coefficients α_p et β_p , en fonction de l'itération p considérée sont données dans le tableau 1.

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
0,0	0,3	0,5	0,7	0,9	1	1	1
β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
0,2	0,3	0,6	0,8	1	1	1	1

Tableau 1 Valeurs des coefficients α_p et β_p

Nous avons tracé sur les figures 15, 16 et 17 le TEB en fonction du rapport E_b / N_0 de codes produits construits respectivement à partir de codes BCH(32,21,6), BCH(64,51,6) et BCH(128,113,6).

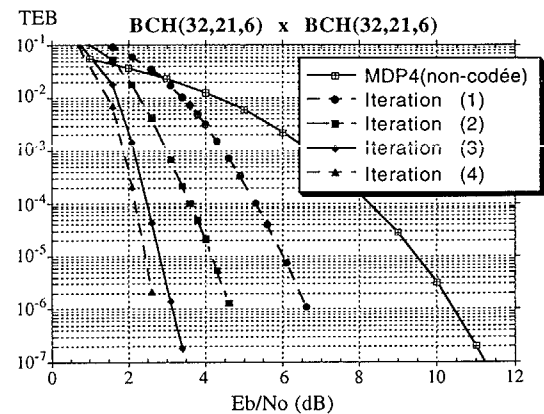


Figure 15 TEB d'un code produit (BCH(32,21,6) x BCH(32,21,6)) sur canal de gaussien en présence de MDP-4 (rendement $R=0,43$)

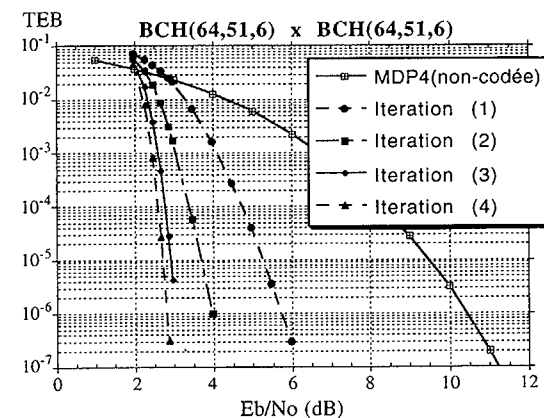


Figure 16 TEB d'un code produit (BCH(64,51,6) x BCH(64,51,6)) sur canal de gaussien en présence de MDP-4 (rendement $R=0,64$)

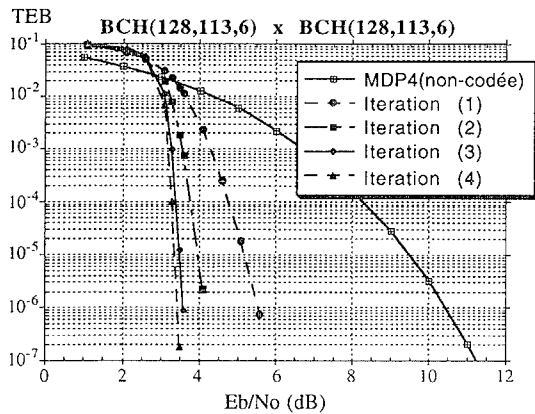


Figure 17 TEB d'un code produit (BCH(128,113,6) x BCH(128,113,6)) sur canal de gaussien en présence de MDP-4 (rendement $R=0,78$)

On constate que pour un code produit de paramètre n donné, la pente des courbes du TEB croît avec la distance de Hamming des codes élémentaires. De même pour une distance de Hamming donnée, la pente des courbes croît avec la longueur des mots de codes élémentaire. Pour évaluer les performances de l'algorithme de décodage itératif, nous avons déterminé, pour chaque code produit étudié la différence ΔG_a entre le gain de codage à 10^{-5} de TEB obtenu à la quatrième itération et le gain de codage asymptotique. Nous avons aussi déterminé la différence ΔS entre le rapport signal à bruit nécessaire pour atteindre un TEB de 10^{-5} à la quatrième itération et le rapport signal à bruit donné par la limite de Shannon. Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 2 qui contient aussi des informations sur d'autres codes BCH que ceux pris en compte dans cet exposé [7].

C^1	C^2	Gain à 10^{-5} dB	ΔG_a à 10^{-5} dB	E_b/N_0 à 10^{-5} dB	ΔS à 10^{-5} dB
BCH(32,26,4)	BCH(32,26,4)	6,1	4,1	3,18	2,63
BCH(32,21,6)	BCH(32,21,6)	7,0	4,9	2,35	2,58
BCH(64,57,4)	BCH(64,57,4)	6,0	5,0	3,41	2,40
BCH(64,51,6)	BCH(64,51,6)	6,6	7,0	2,70	2,28
BCH(128,120,4)	BCH(128,120,4)	5,4	6,0	4,00	2,68
BCH(128,113,6)	BCH(128,113,6)	6,1	8,4	3,29	2,33
BCH(256,247,4)	BCH(256,247,4)	4,7	7,0	4,70	3,19

Tableau 2 Comparaison des performances de plusieurs codes produits construits à partir de codes BCH

Il est intéressant de noter que la quantité ΔS est égale à $2,5 \pm 0,2$ dB pour les différents turbo-codes étudiés sauf pour le dernier code de la table.

Des études récentes sur l'association de turbo-codes en blocs avec des modulations à symboles M -aires ont aussi montré que les performances obtenues sont semblables à celles des turbo-codes convolutifs.

CONCLUSIONS

Dans cet article de synthèse, nous avons vu qu'il est possible de décoder des associations de deux codes convolutifs ou de deux

codes en blocs de manière quasi optimale en exploitant une information extrinsèque, au travers d'un processus itératif. Les simulations montrent que ce nouveau procédé de codage/décodage, appelé turbo-codes permet d'approcher la limite théorique de SHANNON comme aucun système de codage ne l'avait encore jamais fait. Des études, non présentées dans cet article ont montré que l'association de deux codes convolutifs semblait préférable à l'association de deux codes en blocs pour des rendements de codage inférieurs à 3/4, alors que pour des rendements élevés ($\geq 0,8$) la tendance était inversée. L'association d'un turbo-code convolutif avec une modulation à symboles M -aires pour réaliser des transmissions à grande efficacité spectrale est aussi une solution très intéressante. En effet, elle conduit sur canal de Gauss et sur canal de Rayleigh, à des performances toujours meilleures que celles obtenues avec des modulations codées en treillis à 64 états. Les turbo-codes en blocs, lorsqu'ils sont associés avec des modulations à symboles M -aires conduisent également à des gains de codage importants et sont particulièrement intéressants pour les rendements de codage élevés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding : turbo-codes", *IEEE proc. ICC'93*, Geneva, May 1993.
- [2] P. Thitimajshima, "Les codes convolutifs récursifs systématiques et leur application à la concaténation parallèle," Ph. D. N°284, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, Déc 1993.
- [3] C. Berrou, P. Adde, E. Angui and S. Faudeuil, "A low complexity soft-output Viterbi decoder architecture", *ICC'93*, Geneva, May 1993.
- [4] S. Le Goff, A. Glavieux and C. Berrou, "Turbo-codes and high spectral efficiency modulation", *ICC'94*, New Orleans, May 1994.
- [5] R. Pyndiah, A. Glavieux, A. Picart, S. Jacq, "Near optimum decoding of product codes", *GLOBECOM'94*, San Francisco, Nov. 1994.
- [6] D. Chase, "A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information", *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. IT-18, NO 1, pp 170-182, Jan 1972.
- [7] S. Jacq, R. Pyndiah, A. Picart, "Algorithme turbo : un nouveau procédé de décodage pour les codes produits", à paraître *GRETSI 95*, Juan les Pins, sept. 95.