

# Détection Conjointe pour le Système d'Accès Multiple à Spectre Étalaé, Synchrones et à Antennes Multiples

Ammar Chkeif et Ghassan Kawas Kaleh

École Nationale Supérieure des Télécommunications,  
Départ. COM.  
46, rue Barrault  
75634 Paris Cedex 13, France

## RÉSUMÉ

Nous présentons trois détecteurs (forçage à zéro, forçage à zéro avec retour de décision et minimum de l'erreur quadratique moyenne) qui exploitent les signaux reçus par un réseau d'antennes dans un système de CDMA synchrone.

## ABSTRACT

This paper addresses the problem of synchronous CDMA systems. Three multiuser receivers, which use the received signals from an antenna array, are presented : zero forcing, zero forcing decision feedback, and minimum mean square error.

## 1 Introduction

Le système d'accès multiple à spectre étalaé pâit de l'inévitable interférence mutuelle entre utilisateurs (MAI). Cette interférence peut être combattues par l'utilisation d'un réseau d'antennes directives permettant la séparation spatiale des utilisateurs. Cependant, dans le cas où le nombre d'antennes est inférieur au nombre d'utilisateurs une séparation complète n'est pas possible. La détection conjointe à partir de la totalité de l'observation fournie par les antennes est une démarche naturelle [1].

## 2 Modèle du Canal

On considère un canal de CDMA partagé simultanément par  $K$  utilisateurs. On se place dans le cas de modulation MDP2 dans un canal de transmission à bruit blanc additif gaussien ; où le signal de chaque utilisateur est spectralement étalaé à l'aide d'une séquence directe (DS-SS). Soit  $\{b_k^i, c_k^i \in \{-1, +1\}\}$  les symboles d'information du  $k^{i\text{ème}}$  utilisateur, où  $i$  est l'indice temps. Dans le cas de transmission synchrone (on ne considère que l'intervalle  $T$ ) on peut écrire le signal transmis en bande de base sous la forme suivante :

$$m_i(t) = \sum_{k=1}^K \sqrt{\mathcal{E}_k} b_k^i c_k^i(t) \quad 0 \leq t < T. \quad (1)$$

$$c_k^i(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} a_k^i(l) h(t - lT_c) \quad (2)$$

où  $\mathcal{E}_k$  est l'énergie par bit pour le  $k^{i\text{ème}}$  utilisateur,  $T$  est le temps du symbole,  $c_k^i(t)$  est la signature de l'utilisateur  $k$  d'énergie unitaire et  $h(t)$  est une fonction de mise en forme spectral (racine carré de Nyquist), et  $T_c$  est la période chip. Les symboles chip  $\{a_k^i(l)\}$  sont pseudo-aléatoires à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  ; pour simplifier la notation on omet l'indice  $i$ .

Considérons un réseau d'antennes linéaires uniformes (ALU). Dans ce cas et en prenant la première antenne comme référence et pour un modèle à bande-étroite le signal reçu par  $M$  antennes s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \sum_{k=1}^K \{\sqrt{\mathcal{E}_k} b_k c_k(t) \mathbf{g}_k\} + \mathbf{n}(t) \quad 0 \leq t < T. \quad (3) \\ &= \mathbf{G} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{C}_b(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4) \end{aligned}$$

où le vecteur  $\mathbf{g}_k = (1, e^{-j\zeta_{k1}}, \dots, e^{-j\zeta_{k(M-1)}})^{tr}$  représente les phases des antennes relativement à l'antenne de référence. La variable  $\zeta_{ki}$  dépend de la distance interantenne, la longueur d'onde du signal transmis et l'angle d'arrivée du signal  $k$ . Dans l'équation (3) le vecteur  $\mathbf{n}(t)$  est un bruit blanc (spatialement et temporellement), indépendant des signaux transmis, de second ordre, gaussien, centré et de variance  $\frac{N_0}{2} \mathbf{I} \delta(t_1, t_2)$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité. Dans<sup>1</sup> (4),  $\otimes$  présente le produit d'Hadamard,  $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, \dots, b_K)^{tr}$ ,  $\mathbf{c}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (c_1(t), \dots, c_K(t))^{tr}$ ,  $\mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(\mathcal{E}_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \mathcal{E}_K^{\frac{1}{2}})^{tr}$  et la matrice  $\mathbf{G}$  est donnée par  $\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_K]$ .

## 3 Détecteur Optimal

Le récepteur optimal selon la règle de maximum de vraisemblance *a posteriori* choisit le vecteur  $\hat{\mathbf{b}}$  qui maximise la vraisemblance logarithmique donnée par l'équation suivante<sup>2</sup> [4] :

$$\Omega = \Re\{2 \int_0^T \mathbf{C}_b^\dagger(t) \mathbf{z}(t) dt - \int_0^T \mathbf{C}_b(t)^\dagger \mathbf{C}_b(t) dt\} \quad (5)$$

<sup>1</sup> tr désigne le transpose d'un vecteur.

<sup>2</sup>  $\Re(r) = \frac{r+r^*}{2}$ .

où  $\dagger$  désigne le conjugué transpose. La première intégrale donne :

$$2 \int_0^T \mathbf{C}_b^\dagger(t) \mathbf{z}(t) dt = 2(\mathbf{E}^{1/2} \mathbf{b})^{tr} \mathbf{y}. \quad (6)$$

La deuxième intégrale est réelle et ne dépend pas de  $\mathbf{z}(t)$ . En effet, la statistique suffisante pour la détection de  $\mathbf{b}$  est :

$$\mathbf{y} = [(\mathbf{G}^\dagger \mathbf{G}) \otimes \mathbf{M}] \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} + \mathbf{n} = \mathbf{R} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (7)$$

$\mathbf{M}$  est la matrice d'inter-corrélation des signatures.  $\mathbf{n}$  est un bruit Gaussien centré de covariance  $(N_0/2)\mathbf{R}$ . Dans le cas asynchrone on peut avoir le même modèle [2].

## 4 Blanchiment du Bruit

Dans l'équation (7),  $\mathbf{R}$  (et  $\mathbf{R}^{-1}$ ) est une matrice hermitienne. De plus, si on suppose qu'elle est définie positive elle admet la factorisation de Cholesky :

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^\dagger \Sigma^2 \mathbf{H} \quad (8)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger \Sigma^{-2} \mathbf{A} \quad (9)$$

où  $\mathbf{H}^\dagger$  et  $\mathbf{A}$  sont des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité,  $\Sigma^2$  est une matrice diagonale avec tous ses coefficients diagonaux strictement positifs. De plus une telle factorisation est unique. À partir de cette factorisation on peut blanchir le bruit  $\mathbf{n}$ . Soit  $\mathbf{q} = (\mathbf{H}^\dagger \Sigma)^{-1} \mathbf{y}$ , dès lors :

$$\mathbf{q} = \Sigma \mathbf{H} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} + \mathbf{v} \quad (10)$$

où  $\mathbf{v}$  est un bruit blanc avec  $\text{cov}(\mathbf{v}) = (N_0/2)\mathbf{I}$ . Pour implanter cette transformation, on peut profiter de la forme triangulaire de  $\mathbf{H}^\dagger$ . Étant donnée la nouvelle observation  $\mathbf{q}$ , une décision optimale selon la règle de maximum de vraisemblance peut s'effectuer, une telle décision minimise la probabilité d'erreur et minimise la distance euclidienne  $\|\mathbf{q} - \Sigma \mathbf{H} \mathbf{E}^{1/2} \mathbf{b}\|^2$ .

## 5 Détecteur Linéaire Forçage à Zéro (LZF)

On peut éliminer la MAI en transformant  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{s}$ , où le vecteur  $\mathbf{s}$  est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &\stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma \mathbf{H})^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ &= \mathbf{E}^{1/2} \mathbf{b} + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (11)$$

avec  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_K)^{tr}$  tel que :

$$\begin{aligned} s_K &= q_K / \Sigma_{K,K} \\ s_{K-i} &= q_{K-i} / \Sigma_{K-i,K-i} - \sum_{l=1}^i \mathbf{H}_{K-i,K-l+1} \mathbf{q}_{K-l+1} \\ &\text{pour } i = 1, 2, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Cette observation ne contient pas de MAI, mais elle est corrompue par un bruit coloré;  $\text{cov}(\mathbf{w}) = (N_0/2)\mathbf{R}^{-1}$ , et la variance de  $w_i$  est :

$$E[|w_i|^2] = (N_0/2) [\mathbf{R}^{-1}]_{i,i} \quad (13)$$

Puisque cette observation ne contient pas de MAI, une simple détection (symbole-par-symbole) peut s'effectuer à l'aide d'un détecteur à seuil.

*Performance* : avec ce détecteur l'interférence due aux autres utilisateurs a été éliminée. Par conséquent, la probabilité d'erreur peut s'exprimer sous la forme :

$$P_k = Q(\sqrt{\mathcal{E}_k / \sigma_k^2}) \quad (14)$$

où  $\sigma_k^2$  est la variance du bruit dans le  $k^{\text{ième}}$  élément de l'estimation  $\hat{\mathbf{b}}$  et  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$ . On remarque que la variance du bruit a augmenté à la sortie du détecteur, elle reste cependant supérieure ou égale à celle de  $\mathbf{n}(t)$  dans (4). C'est le prix à payer pour éliminer le MAI par ce détecteur [4].

## 6 Détecteur Forçage à Zéro avec Retour de Décisions (ZFDF)

Pour réaliser ce détecteur nous allons traiter  $\Sigma^{-1} \mathbf{q}$ .

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{H} \mathbf{E}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} + \Sigma^{-1} \mathbf{v} \quad (15)$$

Dans l'équation précédente  $\mathbf{H}$  est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité. On remarque que :

$$x_K = \mathbf{H}_{K,K} \sqrt{\mathcal{E}_K} b_K + v_K / \Sigma_{K,K} \quad \mathbf{H}_{K,K} = 1. \quad (16)$$

Pour obtenir  $\hat{b}_K$  une simple décision peut être faite au moyen d'un détecteur à seuil. Cette décision doit minimiser la distance euclidienne entre  $x_K$  et  $b_K$ . La stratégie est de supposer que cette décision est correcte, et en suite on l'injecte dans l'expression de  $x_{K-1}$  qui dépend de  $b_K$  et  $b_{K-1}$  et ainsi de suite, de telle façon qu'à chaque récursion l'on obtienne

$$\begin{aligned} \hat{x}_{K-i} &= x_{K-i} - \sum_{l=1}^i \mathbf{H}_{K-l,K-l+1} \sqrt{\mathcal{E}_{K-l}} \hat{b}_{K-l+1} \\ &\quad + v_{K-i} / \Sigma_{K-i,K-i} \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_{K-i}} b_{K-i} + v_{K-i} / \Sigma_{K-i,K-i} \end{aligned} \quad (17)$$

Une simple décision peut être faite sur les observations  $\hat{x}_{K-i}$  au moyen d'un détecteur à seuil.

*Performance* : l'expression (17) montre que la probabilité d'erreur pour le ZFDF dépend de la variance de  $v_{K-i} / \Sigma_{K-i,K-i}$ , de plus elle dépend des résultats des détections précédents. Dès lors, pour des signaux de même énergie il faut ranger les signaux de tel façon qu'on détecte d'abord l'utilisateur ayant le meilleur rapport signal à bruit. En général, une perte en performance pour le  $k^{\text{ième}}$  utilisateur, par rapport au cas d'un seul utilisateur, est représentée par  $10 \log(\Sigma_{k,k}^2)$ . Avec comme hypothèse que toutes les décisions antérieures soient correctes, le détecteur ZFDF élimine la MAI et maximise le rapport signal à bruit. Le détecteur ZFDF, comme tous les détecteurs non-linéaires, a pour inconvénient la nécessité d'estimer les amplitudes des signaux reçus.

## 7 Détecteur Linéaire Minimisant l'Erreur Quadratique Moyenne (LMMSE)

Le détecteur LZF ne prend pas en compte la corrélation du bruit entre les observations (dans l'équation (11)  $\text{cov}(\mathbf{w}) =$

$\frac{N_0}{2}\mathbf{R}^{-1}$ ). On peut réduire la dégradation due à la transformation  $\mathbf{R}^{-1}$ , en insérant un estimateur de Weiner  $\Psi$  entre  $\mathbf{R}^{-1}$  et le détecteur à seuil. La sortie de cet estimateur est un vecteur donné par :

$$\mathbf{d} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi \mathbf{s} = \mathbf{E}^{1/2} \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (18)$$

L'estimateur minimise la variance de chaque composante  $\mathbf{w}_i$  du vecteur  $\mathbf{w}$ , qui est équivalent à<sup>3</sup> :

$$E[\mathbf{w}\mathbf{s}] = \mathbf{0} \quad (19)$$

où  $\mathbf{0}$  est une matrice ( $K \times K$ ) qui ne contient que des zéros. En utilisant l'équation (18) on obtient :

$$\Psi E[\mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger] = \mathbf{E}^{1/2} E[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] \mathbf{E}^{1/2} \quad (20)$$

mais,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] &= \mathbf{I} \\ E[\mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger] &= \mathbf{E} + \frac{N_0}{2} \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

donc on peut tirer la forme suivante pour  $\Psi$  :

$$\Psi = (\mathbf{I} + \frac{N_0}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}^{-1})^{-1} \quad (22)$$

La cascade de la transformation  $\mathbf{R}^{-1}$  et  $\Psi$  est équivalente à la transformation  $\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \Psi \mathbf{R}^{-1}$  avec  $\mathbf{y}$  comme entrée et  $\mathbf{d}$  comme sortie,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \Psi^{-1} = (\mathbf{R} + \frac{N_0}{2} \mathbf{E}^{-1}) \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{R}} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (23)$$

la covariance de l'erreur  $\hat{\mathbf{w}}$  associée à  $\Psi$  est

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{w}}) = (\mathbf{I} - \Psi) \mathbf{E} \quad (24)$$

ce qui implique que  $\Psi_{ii}$  est un nombre réel inférieur à 1, pour toutes les valeurs de  $i$ . En remplaçant  $\Psi$  dans (24) par son expression en (22) on obtient :

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{N_0}{2} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \quad (25)$$

en substituant (18) par (23) on obtient

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}^{1/2} \mathbf{b} + \hat{\mathbf{u}} \quad (26)$$

avec  $\text{cov}(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{N_0}{2} \hat{\mathbf{R}}$ . La cascade de la transformation  $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$  et le détecteur à seuil présente le détecteur LMMSE. La ressemblance entre ce détecteur et celui du LZF nous permet d'en déduire une application de la décomposition de Cholesky sur la matrice  $\hat{\mathbf{R}}$ . Donc, il est possible de calculer les composantes du vecteur  $\mathbf{d}$  de la même façon que pour celles de  $\mathbf{s}$  dans le détecteur LZF.

*Performance* : d'après l'équation (25) la variance du bruit  $\hat{\mathbf{w}}_i$  est  $\frac{N_0}{2} [\hat{\mathbf{R}}^{-1}]_{ii}$ . En effet, le rapport signal à bruit pour le  $i^{\text{ième}}$  utilisateur est donné par [3] :

$$SNR_i^{LMMSE} = \frac{[E]_{ii}}{\frac{N_0}{2} [\hat{\mathbf{R}}^{-1}]_{ii}} - 1 \text{ pour } i = 1, \dots, K. \quad (27)$$

La probabilité d'erreur peut donc s'exprimer sous la forme :

$$P_k = Q(\sqrt{\mathcal{E}_k / \sigma_k^2}) \quad (28)$$

où  $\sigma_k^2$  est la variance du bruit dans le  $k^{\text{ième}}$  élément de l'estimation  $\hat{\mathbf{b}}$ . Ce détecteur minimise l'écart entre sa sortie et le symbole désiré. Une amélioration de la probabilité d'erreur en découle [3].

<sup>3</sup>  $E[.]$  désigne l'espérance mathématique.

## 8 Simulation

En premier lieu nous allons étudier la résistance contre l'effet d'éblouissement (near-far). Pour cela, on fixe la puissance du premier utilisateur et on varie la puissance des trois autres. Dans les simulations nous supposons que tous les détecteurs ont une connaissance parfaite des puissances des utilisateurs, des séquences d'étalement et des vecteurs  $\mathbf{g}_k$ . De plus on suppose que les vecteurs  $\mathbf{g}_k$  sont normalisés. On prend 4 séquences de Gold de longueur ( $L = 7$ ), avec  $\mathbf{M}$  donnée par :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 7 & -1 \\ -1 & -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad (29)$$

D'après la figure (1), on remarque que la probabilité d'erreur pour le détecteur LZF est constante et indépendante des puissances des trois utilisateurs. Elle s'améliore en augmentant le nombre d'antennes. La performance du détecteur ZFDF est meilleure que celui du LZF et elle s'améliore lorsqu'on injecte des décisions fiables. D'après la figure (1) nous constatons que lorsque l'intérférence due aux autres utilisateurs est petite le LMMSE s'approche du détecteur optimal. Dans le cas contraire il rejoint le LZF. Dans les figures (2,3,4) nous présentons la perte du détecteur ZFDF en comparaison au cas d'un seul utilisateur dans un canal gaussien ; avec comme hypothèse le même angle d'arrivée pour les trois premiers utilisateurs. Cette perte est présentée en fonction du produit scalaire des signatures (le même pour l'ensemble des signatures) et l'angle d'arrivée pour le  $4^{\text{ième}}$  utilisateur. Par la suite nous comparons le LMMSE, le ZFDF et "l'Optimum Beamformer" (OB) [5] en utilisant trois antennes et des séquences non-périodiques de longueur 64. La performance de deux premiers détecteurs est meilleures que celle du troisième OB, figure (5).

## 9 Conclusion

Dans cet article, trois techniques de détection conjointe sont présentées, LZF, ZFDF, LMMSE. Leur performance a été étudiée. Nous constatons une amélioration considérable lors de l'utilisation de plusieurs antennes, évitant alors la dégradation de la performance constatée avec une seule antenne lors d'une forte corrélation entre les signatures.

## Références

- [1] R.L. Pickholtz, "Maximum Likelihood Multiuser Detection with Use of Linear Antenna Arrays", submitted to the *GWU*, and partially published in *Asilomar Conference*, 1995.
- [2] S.Y. Miller and S.C. Schwartz, "Integrated Spatial-Temporal Detectors for Asynchronous Gaussian Multiple-Access Channels", *IEEE Trans. Comm.*, vol. 43, no. 2/3/4, Feb./Mar./Apr./ 1995, pp. 396-411.

- [3] G. Kawas Kaleb, "Channel Equalization for Block Transmission Systems", *IEEE Journ. Selected Areas in Commun.*, vol. 13, no. 1, Jun. 1995, pp. 110-121.
- [4] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York 1994.
- [5] B. Suard, A.F. Naguib, G. Xu, and A. Paularj, "Performance of CDMA mobile communication systems using antenna arrays", *Proc IEEE ICASSP, Minneapolis (USA)*, pp. IV 153-6, Apr. 1993.

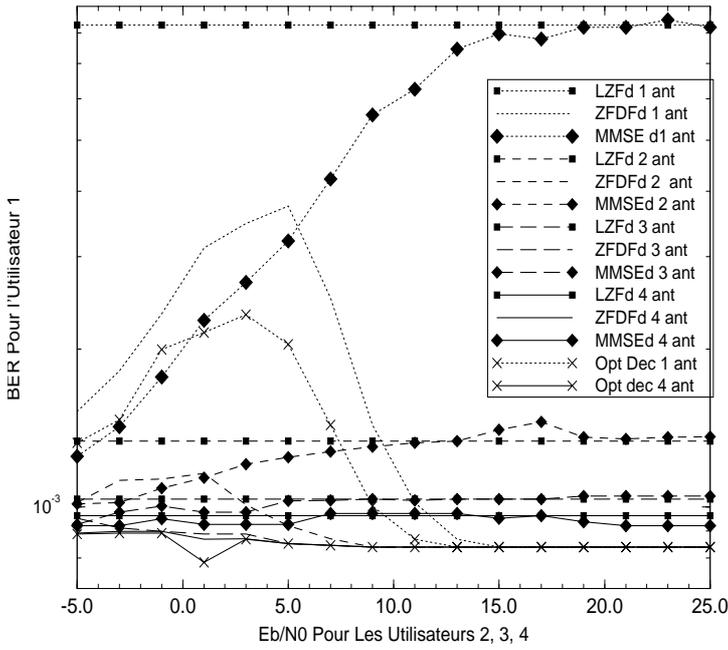


FIG. 1 — Near-far résistance pour LZF, ZDFD, LMMSE et le détecteur optimal avec  $\mathcal{E}_1/N_0 = 7\text{dB}$

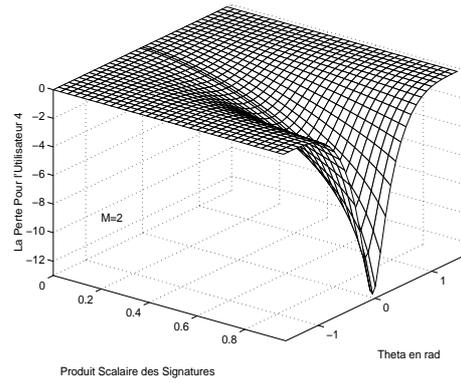


FIG. 3 — La perte représentée par  $10 \log(\Sigma_{4,4}^2)$ , 2 antennes

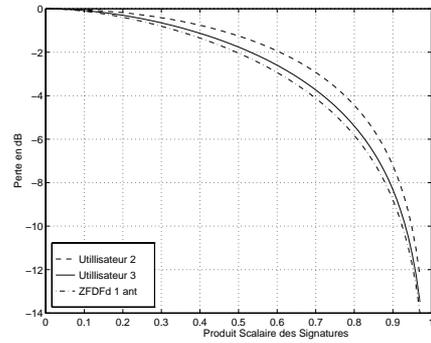


FIG. 4 —  $10 \log(\Sigma_{4,4}^2)$  avec une seule antenne,  $10 \log(\Sigma_{3,3}^2)$  et  $10 \log(\Sigma_{2,2}^2)$  pour 4, 2 et une antenne

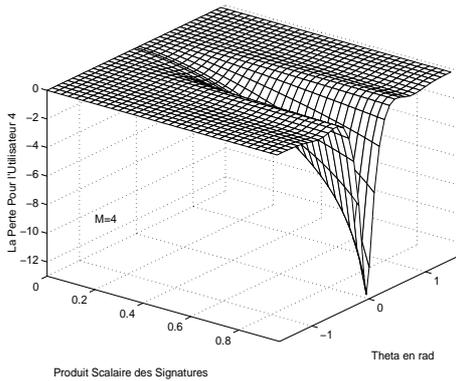


FIG. 2 — La perte représentée par  $10 \log(\Sigma_{4,4}^2)$ , 4 antennes

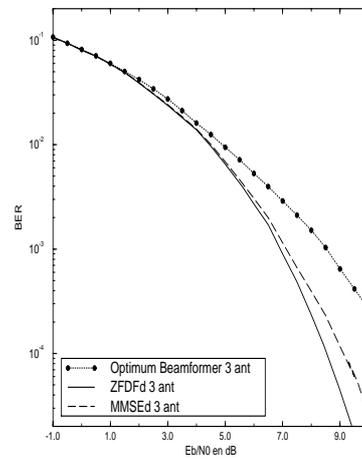


FIG. 5 — Comparaison entre OB et ZDFD, 3 antennes