Robustesse des hypothèses dans une méthode sous-espace pour la séparation de sources.

A. Mansour(1),(3), **C. Jutten**(1),(3) **et P. Loubaton**(2),(3)

(1) INPG-TIRF 46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble, France

(2) Université de Marne-la-vallée, 2 rue de la Butte Verte, 93166 Noisy-le-Grand, France

(3) GDR-PRC ISIS

Email: mansour@tirf.inpg.fr, chris@tirf.inpg.fr, loubaton@pekin.univ-mlv.fr.

RÉSUMÉ

Les méthodes de type sous-espace pour la séparation de sources supposent théoriquement la connaissance exacte de l'ordre des filtres du mélange. Dans ce papier, on montre expérimentalement que la séparation est possible si l'ordre est sous-estimé, pourvu que cet ordre soit suffisant pour modéliser fonctionnellement les filtres du mélange.

ABSTRACT

The subspace based methods for source separation assume the filter orders are perfectly known. In this paper, it is experimentally proved that the separation is achieved, even if the filter order is underestimated, so long as the order is sufficient to functionally model the actual filters of the mixture.

1 Introduction

Le problème de séparation de sources dans des mélanges convolutifs est très important pour les applications en télécommunications. Les premières solutions proposées ont été basées sur les statistiques d'ordre supérieur à deux [12], [13] et [9]. Cependant, dans le cas de mélanges strictement causaux, les statistiques d'ordre deux sont suffisantes [3].

Les méthodes de type sous-espace, récemment utilisées pour le problème d'identification aveugle [5] [11] [1] [4], exploitent uniquement des statistiques d'ordre deux et peuvent être appliquées à la séparation de mélanges convolutifs [6] [10] [8].

Dans le cas général, on montre [6] [10], en utilisant les méthodes de type sous-espace, que la transformation du mélange convolutif vers un mélange instantané est possible en utilisant uniquement les statistiques d'ordre 2, la séparation de sources sera alors achevée par l'utilisation de critères basées sur les statistiques d'ordre 4.

Dans certains cas, notamment si les degrés des colonnes de la matrice filtre $H(z)$ sont connus et tous différents, on montre que la séparation est possible en utilisant uniquement les statistiques du second ordre [6] [8].

Les développements théoriques de cette méthode supposent une connaissance exacte de l'ordre des filtres de mélanges, ordre que l'on ne connaît généralement pas. Dans ce papier, après un rappel sur le modèle et le critère de l'algorithme (paragraphe 2), on s'interroge sur la robustesse de la méthode vis-à-vis de cette hypothèse (paragraphe 3).

2 Modèle et Critère

Soient $S(n)$ le vecteur source à p composantes (p sources) et $Y(n)$ le vecteur des signaux mélangés à q composantes qui sont les sorties de q capteurs. Supposons que $H(z)$ soit la matrice polynômiale de dimension $q \times p$ qui représente le filtre de mélange, et supposons que les filtres sont tous causaux, On peut alors écrire :

$$Y(n) = [H(z)]S(n) = \sum_{i=0}^{M} H(i)S(n-i), \tag{1}$$

où M est le degré du $H(z)$ [1].

Par concaténation des vecteurs de mélanges $Y(n), \ldots, Y(n-N)$ aux instants $n, \ldots, n-N$, on construit un grand vecteur $Y_N(n)$ de dimension $q(N+1)$. En faisant la même opération sur les sources, il est facile à montrer que :

$$\begin{aligned} Y_N(n) &= \begin{pmatrix} Y(n) \\ \ldots \\ Y(n-N) \end{pmatrix} \\ &= T_N(H) S_{N+M}(n) \\ &= T_N(H) \begin{pmatrix} S(n) \\ \vdots \\ S(n-N-M) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2}$$

où $T_N(H)$ est une matrice de Sylvester, correspondant au filtre $H(z) = \sum_{i=0}^{M} H(i)z^{-i}$, de dimensions $q(N+1) \times (M+N+1)p$, et N est le nombre d'observations.

[1] Le degré d'une matrice polynômiale $H(z)$ est égal au maximum des degrés de ses coefficients $h_{ij}(z)$.

Cette matrice a la forme particulière suivante :

$$T_N(H) = \begin{bmatrix} H(0) & \dots & H(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H(0) & \dots & H(M) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \dots & & 0 & H(0) & \dots & H(M) \end{bmatrix}.$$

La séparation de sources est fondée sur l'estimation d'une matrice G, inverse à gauche de $T_N(H)$. Or, pour que $T_N(H)$ soit inversible :

- N doit être suffisamment tel que le nombre de colonnes de $T_N(H)$ soit plus grand que le nombre de lignes de $T_N(H)$, soit :
$$N > \frac{Mp + p - q}{q - p} \quad (3)$$
- on doit vérifier théoriquement l'hypothèse fondamentale que **les degrés des colonnes**[2] **de** $H(z)$ **sont tous égaux à** M [5] [10] [8].

Dans [10] et [8] la méthode de séparation se divise en deux étapes. La première étape consiste à passer d'un mélange convolutif à un mélange instantané, par minimisation d'un critère quadratique (ordre deux). Ce critère, obtenu par une généralisation du critère proposé par Gesbert *et al.* [5] dans le cadre d'un problème d'identification aveugle, s'écrit :

$$\min_G E\|[I_{(M+N)p} \;\; 0_p]GY_N(n) - [0_p \;\; I_{(M+N)p}]GY_N(n+1)\|^2 \quad (4)$$

où E est l'espérance mathématique et 0_p est la matrice rectangulaire nulle de dimension $(M+N)p \times p$.

On peut montrer (voir 5 Annexe) que l'estimation de la matrice G avec ce critère nous permet de trouver une matrice globale $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = G.T_N(H) = \mathrm{diag}(A, A, \dots, A). \quad (5)$$

Cette matrice globale, de taille $(M+N+1)p \times (M+N+1)p$, est diagonale par bloc : le bloc A est une matrice de scalaires de dimension $p \times p$. Les performances à l'ordre deux de notre algorithme sont caractérisées par la diagonalisation en bloc de cette matrice globale $\mathcal{A}$. Dans la section suivante, on utilise notamment cette matrice pour montrer la convergence à l'ordre deux de notre algorithme.

La deuxième étape consiste à faire une séparation du mélange instantané résiduel, correspondant à la matrice A :

$$GY_N(n) = \begin{pmatrix} AS(n) \\ \vdots \\ AS(n-N-M) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

en utilisant les statistiques du quatrième ordre.

Finalement, il faut noter que la solution triviale de la minimisation du critère (4) est la matrice $G = 0$. Pour cette raison, la minimisation sans contrainte n'est pas suffisante pour chercher une inverse à gauche de $T_N(H)$ et pour assurer la séparation instantanée[3] dans la deuxième étape. La contrainte choisie est [10] [8] :

$$G_0 EY_N(n)Y_N(n)^T G_0^T = AES(n)S^T(n)A^T = I_p, \quad (7)$$

où G_0, de taille $p \times q(N+1)$, est la première ligne bloc de G, et E est l'espérance mathématique.

3 Hypothèses et validations

Comme on l'a indiqué dans la section précédente, la méthode repose sur l'hypothèse que les degrés de colonnes sont égaux à M. Théoriquement, cette hypothèse indique implicitement la connaissance exacte de M, ce qui est très restrictif, car l'estimation de cet ordre risque d'être erronée. Nous nous sommes donc interrogés sur la robustesse de cette hypothèse et sur la validité de la méthode dans le cas d'une estimation inexacte de M.

Si on surestime M, alors théoriquement on sait que la séparation n'est pas possible, puisque l'espace engendré par $T_N(H)$ identifie alors $H(z)$ à un polynôme (filtre) scalaire près. Par conséquent, il subsiste encore un mélange convolutif. Expérimentalement, on retrouve cette indétermination (figure 1 dans le cas de deux sources et quatre capteurs). Dans la figure 1, on montre la matrice $\mathcal{A} = GT_N(H)$ (5) obtenue lorsque l'on surestime volontairement le degré $M = 3$ à $M' = 4$. Si la séparation était obtenue, cette matrice devrait être une matrice diagonale par bloc de $p \times p$; or on remarque bien l'effet du filtre résidant par la dégradation des coefficients de la matrice bloc.

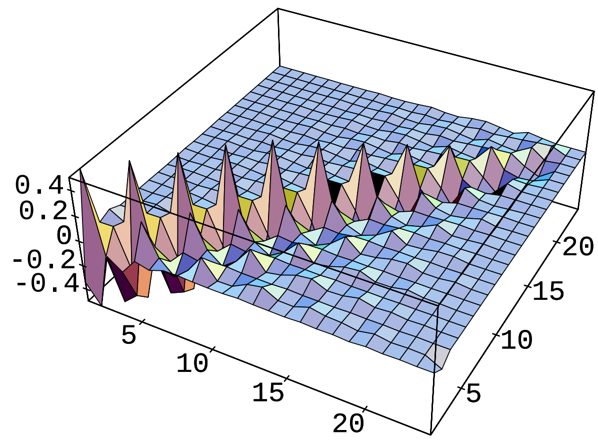


FIG. 1 — $GT_N(H)$ avec une surestimation de $M = 3$ à $M' = 4$.

Par contre, une sous-estimation est admissible si le filtre sous-estimé permet de modéliser fonctionnellement le filtre original. A titre d'exemple, pour le même filtre $H(z)$ d'ordre 3, en sous-estimant la valeur à $M' = 2$, on trouve de bonnes performances (voir figure 2) : le bloc diagonale, correspondant au mélange instantané résiduel, est répété exactement sur toute la diagonale.

[2]Le degré d'une colonne est le degré maximum de ses coefficients.

[3]La matrice du mélange A doit être inversible.

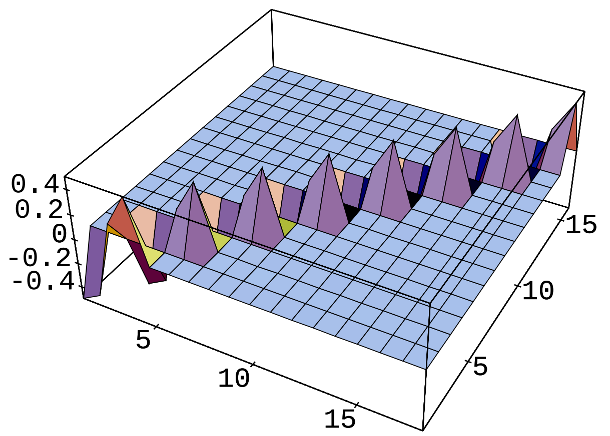
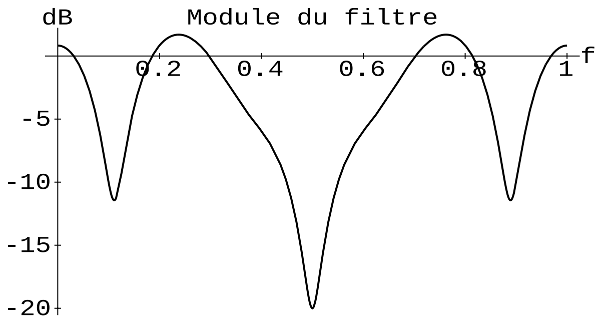
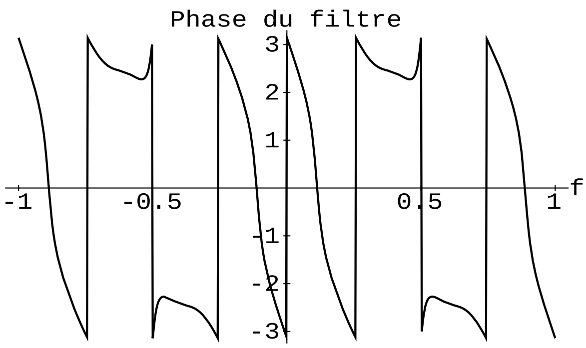


FIG. 2 — $GT_N(H)$ avec une sous estimation de $M = 3$ à $M' = 2$.

De même, une sous-estimation d'un filtre $H(z)$ d'ordre $M = 5$ dont ses coefficients présentent deux résonances (figure 3), par un filtre de degré $M' = 4$ est acceptable.



a) Réponse en fréquence du filtre d'ordre cinq.



b) La phase du filtre d'ordre cinq.

FIG. 3 — Filtre d'ordre cinq.

Par contre, une sous-estimation $M' = 3$ ou $M' = 2$ ne permet pas de faire la séparation, car les deux modes ne peuvent être modéliser. La figure 4 montre les résultats expérimentaux dans le cas $M' = 2$, il est clair que la matrice $\mathcal{A}$ n'est pas une matrice diagonale par bloc.

Le choix du nombre d'observations N est lié à l'ordre du filtre M, selon l'équation (3). Bien entendu, cette relation suppose que le degré M est exact. S'il est sous-estimé,

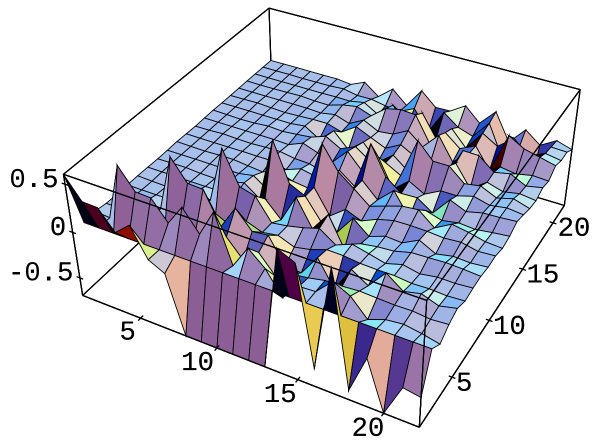


FIG. 4 — $GT_N(H)$ une sous-estimation

l'inégalité (3) risque de conduire à une sous-estimation de N et à l'impossibilité d'inverser $T_N(H)$.

Notons aussi une augmentation de N va introduire en pratique deux problèmes :

- le premier se résume par une augmentation du temps de calcul et de l'espace mémoire utilisé[4].
- tandis que le deuxième problème est un problème d'erreurs numériques qui va dégrader plus ou moins les résultats.

Finalement, pour un filtre qui n'a pas le même degré sur ses colonnes, la convergence du critère (4) n'assure pas la séparation. Dans cette situation, et si les différents degrés sont connus exactement, on a proposé une autre modélisation du problème basée aussi sur la matrice de Sylvester [10] et un algorithme suivant le principe de déflation [8]. Il reste à noter que Gorokhov et Loubaton [6] [7] ont présenté un algorithme par bloc (non-adaptatif) similaire.

4 Conclusion

Les méthodes de type sous-espace sont des méthodes théoriquement très élégantes. En pratique, elles nécessitent la manipulation de matrices de grandes dimensions, et les algorithmes sont coûteux en temps de calcul [2] [8].

Ces méthodes montrent néanmoins que l'on peut séparer les sources presque entièrement avec des critères de second ordre statistiques, sous la condition d'avoir plus de capteurs que de sources et de connaître (ou d'estimer) les degrés des colonnes de $H(z)$.

Dans ce papier, nous avons montré que les algorithmes sous-espaces sont tolérants à une sous-estimation de l'ordre des filtres, pourvu que les ordres choisis permettent de modéliser fonctionnellement les filtres exacts. Ce résultat est très intéressant en pratique.

[4] Un petit exemple : dans le cas où on a un filtre d'ordre $M = 4$, deux sources $p = 2$, quatre capteurs $q = 4$ et un nombre d'observation $N = 9$, on trouve facilement que la matrice de Sylvester $T_N(H)$ est une matrice de dimension 40×28. Le lecteur peut facilement calculer les dimensions des autres matrices pour être convaincu.

5 Annexe

En posant $\mathcal{A} = GT_N(H)$, on aura $GY_N(n) = \mathcal{A}S_{(M+N)}(n)$. La matrice G, qui minimise la fonction coût, a la propriété suivante :

$$[I_{(M+N)p} \;\; 0_p]\mathcal{A}S_{(M+N)}(n) = [0_p \;\; I_{(M+N)p}]\mathcal{A}S_{(M+N)}(n+1).$$

Cette égalité signifie que les $(M+N)$ premières lignes bloc de $GY_N(n)$ sont égales aux $(M+N)$ dernières lignes bloc de $GY_N(n+1)$. C'est cette observation qui conduit au critère (4). On peut aussi écrire que :

$$[0_p \;\; (I_{(M+N)p} \;\; 0_p)\mathcal{A}]S_{(M+N+1)}(n+1) = [(0_p \;\; I_{(M+N)p})\mathcal{A} \;\; 0_p]S_{(M+N+1)}(n+1). \quad (8)$$

Et ceci est vrai a tout instant n. Si les composantes du vecteur $S_{(M+N+1)}(n+1)$ sont linéairement indépendantes, alors :

$$[0_p \;\; (I_{(M+N)p} \;\; 0_p)\mathcal{A}] = [(0_p \;\; I_{(M+N)})\mathcal{A} \;\; 0_p]. \quad (9)$$

Supposons que :

$$\mathcal{A} = (A_{ij}) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

où A_{ij} est une matrice de dimension $p \times p$, a et d sont de dimension $p \times (M+N+1)p$, et b et c sont de dimension $(M+N)p \times (M+N+1)p$. D'après l'équation (9), on peut déduire que :

$$[b \;\; 0_p] = [0_p \;\; c]. \quad (10)$$

Cette dernière équation nous montre que :

- La première colonne-bloc (c.à.d les p premières colonnes) de b est égale à zéro. Donc on trouve :

$$A_{i1} = 0, \;\; \forall\, 1 < i \leqslant M+N+1. \quad (11)$$

- La dernière colonne-bloc de c est égale à zéro.

$$A_{i(M+N+1)} = 0, \;\; \forall\, 1 \leqslant i < M+N+1. \quad (12)$$

- $A_{ij} = A_{(i-1)(j-1)}$

Donc la matrice $\mathcal{A}$ est une matrice diagonale par bloc.

Références

[1] K. Abed Meraim, P. Loubaton, and E. Moulines. A subspace algorithm for certain blind identification problems. *IEEE on IT*, January 97.

[2] N. Delfosse. *Séparation aveugle des sources : méthodes de type sous - espace*. PhD thesis, ENST Paris, Décembre 1995.

[3] S. Van Gerven. *Adaptive Noise Cancellation and Signal Separation with Applications to Speech Enhancement*. PhD thesis, K.U.Leuven, E.S.A.T., Belgium, March 1996.

[4] D. Gesbert. *Egalisation et identification multi-voies : Méthodes auto-adaptatives au second-ordre*. PhD thesis, ENST Paris, mars 1997.

[5] D. Gesbert, P. Duhamel, and S. Mayrargue. Subspace-based adaptive algorithms for the blind equalization of multichannel fir filters. In M.J.J. Holt, C.F.N. Cowan, P.M. Grant, and W.A. Sandham, editors, *Signal Processing VII, Theories and Applications*, pages 712–715, Edinburgh, Scotland, September 1994. Elsevier.

[6] A. Gorokhov and P. Loubaton. Second order blind identification of convolutive mixtures with temporally correlated sources : A subspace based approch. In *Signal Processing VIII, Theories and Applications*, pages 2093 – 2096, Triest, Italy, September 1996. Elsevier.

[7] A. Gorokhov and P. Loubaton. Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources. *Submitted to IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 95.

[8] A. Mansour. *Contributions à la séparation de sources*. PhD thesis, INPG Grenoble, 1997.

[9] A. Mansour and C. Jutten. A simple cost function for instantaneous and convolutive sources separation. In *Actes du XVème colloque GRETSI*, pages 301–304, Juan-Les-Pins, France, 18-21 septembre 1995.

[10] A. Mansour, C. Jutten, and P. Loubaton. Subspace method for blind separation of sources and for a convolutive mixture model. In *Signal Processing VIII, Theories and Applications*, pages 2081 – 2084, Triest, Italy, September 1996. Elsevier.

[11] E. Moulines, Duhamel P., J. F. Cardoso, and Mayrargue S. Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters. *IEEE Trans on SP*, 43(2) :516–525, February 1995.

[12] L. Nguyen Thi. *Séparation aveugle de sources à large bande dans un mélange convolutif*. PhD thesis, INP Grenoble, Janvier 1993.

[13] D. Yellin and E. Weinstein. Criteria for multichannel signal separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(8) :2158 – 2167, August 1994.