

# Une Méthode d'Égalisation Aveugle Robuste aux Caractéristiques de Propagation

A. Touzni, I. Fijalkow

ETIS / ENSEA-UCP, 95014 Cergy-Pontoise Cdx, France

e-mail: touzni, fijalkow@ensea.fr

## RÉSUMÉ

Nous proposons un nouvel algorithme d'égalisation aveugle robuste aux caractéristiques de propagation du canal. L'approche combine la robustesse au manque de disparité de l'algorithme CMA dans le contexte spatio-temporel avec de la diversité de retard, de façon à disposer d'une famille d'égaliseurs Mutuellement Référencés (**MR**) associés aux différents bassins d'attractions qui correspondent à des retards distincts. Nous montrons que l'algorithme permet ainsi d'extraire l'égaliseur qui minimise l'erreur quadratique moyenne (**EQM**) dans un contexte de bruit additif. On peut aussi espérer qu'il permet, dans les situations de manque de disparité, au minimum d'ouvrir l'œil du canal.

## ABSTRACT

We present a new adaptive robust equalization method aimed to overcome the issue of lack of disparity of most recent spatio-temporal diversity based equalization algorithms, and to pick the equalizer minimizing input/output errors in the presence of additive noise. It combines Fractionally-Spaced Equalization by Constant Modulus Algorithm (FSE-CMA) robustness to lack of disparity and **delay diversity** to find several equalizer settings in different basins of attraction of FSE-CM cost-function. The algorithm allows to choose the best equalizer's output when there is disparity. Moreover, in the worst possible channel case, i.e. when there is such a lack of disparity that even the FSE-CMA fails, some of the equalizers may escape from converging to undesired settings and come very close to MMSE.

## 1 Formulation du problème

Durant ces 5 dernières années, de nombreuses méthodes d'**égalisation aveugle** fondées sur des statistiques du second ordre ont été proposées pour supprimer les interférences intersymboles (**IES**) qui apparaissent lors de transmissions numériques ([1], [2], [3],...). L'idée commune à tous ces travaux repose sur l'utilisation d'une **diversité spatio-temporelle** des données qui provient soit d'un suréchantillonnage dans le temps (par rapport au débit de la source) des observations issues d'un récepteur unique, soit de plusieurs observations collectées sur un réseau de capteurs (voir [3], par exemple). Les deux cas se traduisent par le modèle linéaire mono-entrée / multi-sorties suivant :

$$y(n) = [h(z)]s(n) + w(n) \quad (1)$$

L'observation  $L$ -dimensionnelle  $y(n)$  désigne la sortie d'un système linéaire, de fonction de transfert polynômiale  $h(z) = (h_1(z), \dots, h_L(z))^T = \sum_{p=0}^Q h(p) z^{-p}$  inconnue de degré  $Q = \max_{1 \leq k \leq L} (\deg(h_k(z)))$  (**A-1**). Le canal de transmission ainsi modélisé est excité par un processus scalaire source  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  qui représente le signal d'intérêt. L'ensemble des perturbations additives sont prise en compte dans le vecteur  $w(n) = (w_1(n), \dots, w_L(n))^T$  de dimension  $L$  supposé être un bruit spatialement et temporellement blanc, gaussien, indépendant de la source  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  (**A-2**).

En regroupant les observations  $y(n)$  du modèle (1), aux instants  $n, n-1, \dots, n-N+1$ , dans un vecteur de régression  $Y_N(n) = (y(n)^T, y(n-1)^T, \dots, y(n-N+1)^T)^T$  de dimension  $NL$ , nous obtenons :

$$Y_N(n) = \mathcal{T}_N(h) S_{N+Q}(n) + W_N(n) \quad (2)$$

où  $S_{N+Q}(n)$  désigne le vecteur de dimension  $N+Q$  défini par  $S_{N+Q}(n) = (s(n), s(n-1), \dots, s(n-N-Q+1))^T$ .  $W_N(n)$  est un vecteur de dimension  $NL$  construit de façon analogue à  $Y_N(n)$  et  $\mathcal{T}_N(h)$  représente la matrice de convolution bloc-Tœplitz de dimension  $NL \times (N+Q)$  associée au filtre  $h(z)$ , pour laquelle nous supposons que  $NL > N+Q$  (**A-3**).

La faisabilité (et les performances) des méthodes, dites 'au second ordre', qui estiment le canal ou son inverse, dépendent essentiellement de la **disparité du canal**. Cette condition traduit l'absence de zéros communs (ou très proches) entre les différents sous-canaux  $h_k(z)$  qui relient l'entrée à chacune des sorties (i.e.,  $h(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  (**A-4**)). Ce qui signifie, intuitivement, que les observations doivent être les plus différentes possibles. A mesure que les zéros des différents sous-canaux se rapprochent les uns des autres la matrice  $\mathcal{T}_N(h)$  'tend' vers une matrice de rang-colonne dégénérée, il n'y a alors plus unicité dans la factorisation canal / source ce qui est la cause essentielle de l'échec des méthodes du second ordre (voir [4] pour une étude partielle). Pour pallier l'absence de garantie sur la disparité du canal, on peut penser à développer de nouvelles approches qui intégreraient une robustesse intrinsèque au canal de propagation. Elle pourraient être basées sur l'utilisation de statistiques du quatrième ordre par exemple. Toutefois, même si les conditions de disparité sont satisfaites, en présence de bruit additif, l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre l'entrée et la sortie estimée dépend du retard d'estimation. Il faudrait alors imaginer un critère robuste au bruit et au manque de disparité, qui puisse fournir en même temps l'EQM minimale (EQMM) optimisée sur l'ensemble des retards possibles.

A notre connaissance, le seul algorithme pour lequel la robustesse au manque de disparité a été démontrée est le FSE-

CMA (i.e., algorithme de Godard dans un contexte de diversité spatio-temporelle), [5]. Les performances du critère Module Constant (MC) sont en effet comparables à celles du filtre optimal de Wiener obtenu à partir d'une séquence d'apprentissage connue ([5], voir aussi [7]). Malheureusement, à partir d'un critère du type MC, il n'est pas possible de contrôler le retard d'estimation entre l'entrée et la sortie qui dépend entièrement de l'initialisation. Dans la suite, nous proposons une alternative pour estimer l'égaliseur qui correspond au meilleur retard possible.

## 2 Critère vectoriel aveugle

En profitant de la **diversité de retard** qui se traduit dans un contexte non bruité par l'égalité  $z^{-l}g_k(z)^\top h(z) = g_{k+l}(z)^\top h(z)$  (utilisée pour la première fois dans [6]) entre les égaliseurs  $g_k$  et  $g_{k+l}$  fournissant un retard relatif  $l$ , on peut envisager une stratégie d'estimation conjointe de plusieurs égaliseurs contraints à des retards différents et retenir la solution minimisant l'EQM. Dans la suite nous proposons de combiner des 'statistiques' du deuxième et quatrième ordre dans un critère unique, le **CM-MR** (i.e., Module Constant Mutuellement Référencé). Pour ce faire nous supposons, en plus des hypothèses précédentes, que  $s(n)$  prend ses valeurs dans un alphabet M-aires de sorte que  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  engendre un processus de variables aléatoires indépendantes, centrées et identiquement distribuées (i.i.d.) (**A-5**).

### 2.1 Définition

L'objectif du critère d'égalisation conjoint proposé est de fournir, de façon simultanée,  $P$  égaliseurs  $\{g_k^*, \dots, g_{P+k}^*\}$  (où  $P+1 \leq N+Q$ ) à partir de la minimisation de critères mutuellement dépendants définis par :

$$\mathcal{E}_k^{(\alpha)} = E \left[ \beta \Phi_{MC}^{(\alpha)}(g_k) + (1-\beta) \Phi_{MR}^{(\alpha)}(g_k, g_{k-\alpha}) \right]$$

de sorte que chaque composante  $\mathcal{E}_k^{(\alpha)}$  est paramétrée par les vecteurs  $g_k$  et  $g_{k-\alpha}$ . Chaque critère ainsi défini se compose d'un critère MC contraint par un critère MR du deuxième ordre, qui introduit une inter-dépendance entre  $g_k$  et  $g_{k-\alpha}$ .

Les deux contributions de chaque critère  $\mathcal{E}_k^{(\alpha)}$  ont pour expressions respectives :  $\Phi_{MR}^{(\alpha)}(g_k, g_{k-\alpha}) = (g_k^\top Y_N(n-(k-\alpha)) - g_{k-\alpha}^\top Y_N(n-k))^2$  pour le critère mutuellement référencé (MR) et  $\Phi_{MC}^{(\alpha)}(g_k) = (|g_k^\top Y_N(n-(k-\alpha))|^2 - r)^2$  pour le critère MC, où l'on pose que  $r = E[s^4]/E[s^2]$ . On remarquera que l'indice  $\alpha$  représente un retard arbitraire prenant ses valeurs dans  $\{0, \dots, N+Q-1\}$ . On suppose enfin que  $\beta$  est une constante comprise entre zéro et un.

L'ensemble de ces critères est stocké dans un vecteur  $\mathcal{L}_P(\cdot)$  de dimension  $P+1$ , qui s'écrit :

$$\mathcal{L}_P(g_0 \dots g_P; \beta) = \left( \mathcal{E}_P^{(\alpha_P)}, \mathcal{E}_{P-1}^{(\alpha_{P-1})}, \dots, \mathcal{E}_0^{(\alpha_0)} \right)^\top \quad (3)$$

### 2.2 Critère cyclique

Une classe intéressante issue de la famille précédente est fournie par un jeu de retards  $\alpha_k$  qui mettenbt en relation les vecteurs  $g_k$  dans des inter-dépendances cycliques. Le critère résultant est noté :

$$\mathcal{L}_P^c(g_0 \dots g_P; \beta) = \left( \mathcal{E}_P^{(P)}, \mathcal{E}_{P-1}^{(-1)}, \dots, \mathcal{E}_0^{(-1)} \right)^\top \quad (4)$$

On remarquera les composantes de  $\mathcal{L}_P^c(\cdot)$  sont reliées les unes aux autres dans une boucle fermée, que l'on peut décrire par la relation  $g_0 \rightarrow g_1 \rightarrow \dots \rightarrow g_{P-1} \rightarrow g_0$ . L'intérêt de ce critère particularisé est fournie par l'énoncé du théorème suivant :

**Théorème 2.1** — *Il existe  $N+Q-P+1$  familles de vecteurs  $\{g_{0+k}^*, \dots, g_{P+k}^*\}$ , pour  $k \in \{0, \dots, N+Q-P\}$ , minimisant la fonction  $\mathcal{L}_P^c(g_0, \dots, g_P)$ . Elles vérifient :*

$$[g_{0+k}^{*\top} \dots g_{P+k}^{*\top}]^\top \mathcal{T}_N(h) = \pm [\delta_{0+k}^\top \dots \delta_{P+k}^\top]$$

où le terme de droite désigne la matrice de dimension  $(N+Q) \times (P+1)$ , constituée de  $P+1$  vecteurs canoniques consécutifs de  $\mathbb{R}^{N+Q}$ .

Les vecteurs  $g_k^*$  définissent ainsi un ensemble d'égaliseurs associés à des retards consécutifs dans l'estimation de l'entrée. On notera que l'ambiguïté de signe est la même pour des égaliseurs d'une même famille. Dans le cas particulier où  $P = N+Q$ , c'est à dire lorsqu'il y a autant d'égaliseurs que de retards possibles, il existe une seule famille  $\{g_0^*, \dots, g_{N+Q-1}^*\}$  qui correspond au minimum global de  $\mathcal{L}_{N+Q}^c(\cdot)$ . On obtient dans ce cas une estimation d'une inverse à gauche de la matrice de Sylvester  $\mathcal{T}_N(h)$ .

**Preuve :** Par manque de place nous ne donnerons pas la démonstration qui est au demeurant assez facile. On pourra néanmoins se rapporter au théorème 3 dont la démonstration est relativement similaire.

## 3 Le CMA-MR

Dans la suite, nous proposons une optimisation de la fonction  $\mathcal{L}_P^c(g_0, \dots, g_P)$  à partir d'une minimisation itérative de chaque composante. L'approche est bâtie sur une technique de gradient stochastique standard. Pour cela on met à jour une composante à la fois en supposant les autres fixées selon le schema :

$$g_k \leftarrow g_k + \mu \nabla_{g_k} \mathcal{L}_P(g_0, \dots, g_P)$$

qui nécessite d'être appliqué sur tous les vecteurs pour  $k := 0, \dots, P$ . Dans ce cas l'innovation a pour expression :

$$\begin{aligned} \nabla_{g_k} \mathcal{L}_P(\cdot) &= 2\beta v_k(n) (v_k(n)^2 - r) Y_N(n-k+\alpha) \\ &+ (1-\beta) (v_k(n) - v_{k-\alpha}(n)) Y_N(n-k+\alpha) \end{aligned}$$

où  $v_k(n) = g_k^\top Y_N(n-(k-\alpha))$  et  $v_{k-\alpha}(n) = g_{k-\alpha}^\top Y_N(n-k)$  avec,  $\alpha = -1$  pour  $k := 0, \dots, P-1$  et  $\alpha = P$  pour  $k := P$ . Les indices sont considérés modulo  $P$  (i.e.,  $g_P = g_0$ ) de façon à bien conserver la structure cyclique du couplage entre les vecteurs. On dispose ainsi d'un algorithme simple dont nous montrerons qu'il permet d'estimer conjointement  $P$  égaliseurs différents. Nous appellerons CMA-MR l'algorithme ainsi proposé.

## 4 Attracteurs du CMA-MR

Nous nous intéressons dans cette section à la convergence du CMA-MR dans le cas non bruité à partir d'une étude de

l'Équation Différentielle Ordinaire (ODE) associée à l'algorithme. Nous mettrons, en particulier, en évidence les points de convergence possible en fonction de  $\beta$ . Nous devons souligner que dans la suite nous n'envisageons pas l'analyse du comportement de l'algorithme dans le cas bruité. Néanmoins, celle-ci repose pour l'essentiel sur le critère MC dont la robustesse au bruit a déjà été établie dans des contributions précédentes ([5]).

#### 4.1 $\beta = 0$

On se propose, tout d'abord, d'annuler la contribution du critère MC. L'objectif de cette analyse est de pouvoir donner une interprétation du comportement du CMA-MR lorsque  $\beta$  tend vers 0. L'étude dans le cas  $\beta \rightarrow 1$  est quant à elle triviale dans la mesure où les équations sont découplées. Ce qui revient, dans ce cas, à mettre en œuvre simplement  $P$  CMA's en parallèle.

Pour  $\beta = 0$ , les points de convergence sont fournis par le théorème suivant :

**Théorème 4.1** — *L'ensemble des familles  $\mathcal{F}_P^{(k)} = \{f_{0+k}, \dots, f_{k+P}\}$  vérifiant  $\mathcal{L}_P^c(f_k, \dots, f_{k+P}) = 0_P$  sont des points stationnaires stables. De plus, chaque vecteur  $f_j$  possède  $P$  composantes nulles et  $(N+Q) - P$  composantes non nulles. La  $k$  ième composante du vecteur  $f_j$  s'écrit :*

$$f_{j,k} = \begin{cases} u_k & \text{si } j+1 \leq k \leq (N+Q-P)+j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les  $u_k$  sont des réels quelconques.

**Preuve :** Les  $P$  premières équations s'écrivent  $f_i = J_{-1} f_{i+1}$  pour  $i = 0, \dots, P-1$ . On notera dorénavant  $J_m$  la matrice de shift de rang  $m$ . Ainsi, tout vecteur  $f_i$  vérifie,

$$\begin{cases} f_{i,j} = f_{p,j+p-i} & \text{si } 1 \leq j \leq N+Q-P+i \\ f_{i,j} = 0 & \text{si } N+Q-P+i+1 \leq j \leq N+Q \end{cases}$$

Pour  $0 \leq j \leq P-1$ . La dernière équation  $f_p = J_p f_0$ , reliant le premier et le dernier vecteur, est telle que  $f_{p,j} = f_{0,j-p}$  si  $P+1 \leq j \leq N+Q$  et  $f_{p,j} = 0$  sinon. Nous pouvons alors exprimer  $f_j$  en fonction de  $f_{j-1}$  pour  $j := 0, \dots, P$ .

Chaque vecteur  $f_i$  s'écrivant,

$$\begin{cases} f_{i,j} = 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ f_{i,j} = f_{p,j+p-i} & \text{si } i+1 \leq j \leq N+Q-P+i \\ f_{i,j} = 0 & \text{si } N+Q-P+i+1 \leq j \leq N+Q \end{cases}$$

avec  $0 \leq j \leq P$   $\square$

En résumé, il existe une infinité de points de convergence possibles. Ils correspondent à des vecteurs  $f_k$  pour lesquels les composantes non nulles sont 'concentrées' dans une plage de variation, dont la taille est déterminée par le nombre de vecteurs  $P$  introduit dans le critère  $\mathcal{L}_P^c(\cdot)$ . Les vecteurs ont de plus la propriété de se déduire les uns des autres par une translation de leurs composantes.

On remarquera, par ailleurs, que pour  $P = N+Q$ , il existe un unique point stationnaire stable vérifiant  $\mathcal{F}_{N+Q}^* = \pm \lambda \mathcal{B}$ , où  $\lambda$  est un scalaire réel arbitraire et  $\mathcal{B} = \{\delta_0, \dots, \delta_{N+Q}\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{N+Q}$ . En terme d'égalisation, cette constatation souligne la nécessité de mettre en place une contrainte supplémentaire du type  $\|f_k\|^2 = 1$ , c'est à dire, une contrainte d'égalité de puissance entrée / sortie qui peut être

ajoutée à n'importe qu'elle composante de  $\mathcal{L}_P^c(\cdot)$ . Ajoutons que ce résultat permet de donner, par la même occasion, une interprétation de l'algorithme EMR ([6]) dans l'hypothèse où le degré du canal est mal estimé. Dans ce cas les filtres  $g_k$  peuvent prendre des valeurs indésirables qui ne correspondent pas à des égaliseurs.

#### 4.2 $\beta \neq 0$

Nous montrons dans la suite que, pour  $\beta \neq 0$ , les réponses impulsionnelles globales  $f_k$  qui correspondent à des vecteurs canoniques consécutifs sont des attracteurs stables du CMA-MR. Ce résultat découle des deux propositions suivantes :

**Proposition 4.1** — *Les points stationnaires forment un ensemble  $\cup_k \mathcal{F}_P^k$  où chaque famille  $\mathcal{F}_P^k = \{f_k, \dots, f_{k+P}\}$  est solution du système :*

$$\begin{cases} j := 0, \dots, P-1 & \Delta_\rho(f_j) f_j + \gamma (J_0 f_j - J_{-1} f_{j+1}) = 0 \\ j := P & \Delta_\rho(f_P) f_P + \gamma (J_0 f_P - J_P f_0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta_\rho(f_k) = (3\|f_k\|^2 - \rho)I_{N+Q} - (3-\rho) \text{diag}(f_k f_k^\top)$  avec  $\rho = \frac{E\{s^4\}}{E\{s^2\}^2}$  le kurtosis du signal source, et  $\text{diag}(A)_{i,j} = a_{i,j} \delta_{i,j}$ .  $J_\alpha$  est une matrice de shift de dimension  $(N+Q) \times (N+Q)$  définie par  $(J_\alpha)_{i,j} = 1$  si  $i = j - \alpha$  et 0 sinon. On notera que  $\gamma = \frac{1-\beta}{2\beta\sigma_s^2} > 0$  (pour  $\beta \neq 0$ ).

**Proposition 4.2** — *Les points stables forment un ensemble  $\cup_k \mathcal{F}_P^k$  où chaque famille  $\mathcal{F}_P^k = \{f_k, \dots, f_{k+P}\}$  vérifie la relation :*

$$\mathcal{H}(f_j) = \tau_N(h) \left( \Psi_\rho(f_j) + \gamma I_{Nq} \right) \tau_N(h)^\top \geq 0$$

où  $\Psi_\rho(f_j) = (3\|f_j\|^2 - \rho)I + 6f_j f_j^\top - 3(3-\rho) \text{diag}(f_j f_j^\top)$  et  $I_{NL}$  désigne la matrice identité de dimension  $NL \times NL$ .

On peut alors facilement démontrer que l'ensemble des familles de vecteur  $\mathcal{F}_P^{(k)*} = \{f_k^*, \dots, f_{k+P}^*\}$  tels que  $\mathcal{F}_P^{(k)*} = \pm\{\delta_k, \dots, \delta_{k+P}\}_k$  sont des points stationnaires stables qui correspondent aux minima globaux de  $\mathcal{L}_P^c(f_k^*, \dots, f_{k+P}^*)$ .  $\square$

Un résultat un peu plus inattendu est donné par le théorème suivant :

**Théorème 4.2** — *Si pour  $n > N$ ,  $\mathcal{F}_P^{(n)}$  converge vers un ensemble stationnaire stable  $\mathcal{F}_P$  pour lequel il existe au moins un vecteur  $f_j$  vérifiant  $f_j = \delta_j$ , avec  $\delta_j$  un vecteur canonique quelconque de  $\mathbb{R}^{N+Q}$ , alors  $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^*$  est un minimum global de  $\mathcal{L}_P^c(\delta_k, \dots, \delta_{k+P})$ .*

**Preuve :** Supposons qu'à la convergence nous ayons  $f_j = \delta_j$ . Dans ce cas  $\Delta_\rho(\delta_j)\delta_j = 0$  et  $f_j = \delta_j = J_{-1} f_{j+1}$ , soit  $f_{j+1} = \delta_{j+1}$ . En propageant les contraintes de proche en proche, on obtient  $f_k = \delta_k$  pour  $k = j, \dots, P$ . Compte tenu du couplage circulaire des équations, nous avons  $f_p = \delta_p = J_p f_0$ , c'est à dire  $f_0 = \delta_0$ . Ce qui implique que  $f_k = \delta_k$  pour  $k = 0, \dots, j-1$ .  $\square$

En d'autres termes, si un des égaliseurs converge vers une solution correspondant à un retard arbitraire  $\nu$  (entre l'entrée et la sortie égalisée), l'ensemble des autres égaliseurs convergent nécessairement vers des solutions associées à des retards globaux consécutifs. Un ensemble stationnaire stable  $\mathcal{F}_P$  ne peut donc se décomposer en sous ensembles de minima locaux et de minima globaux. C'est dans ce résultat que réside, sans doute, la clé de la robustesse de l'algorithme CMA-MR. Il

convient de préciser, à ce niveau, que les retards consécutifs se trouvent toujours ‘distribués’ dans la plage  $\{0, \dots, N + Q - 1\}$  indépendamment de l’initialisation de l’algorithme. Il n’y a en quelque sorte pas d’effet de débordement. On remarquera enfin qu’il n’est pas nécessaire de connaître précisément le degré du canal, il suffit de le surestimer, pour avoir une estimation satisfaisante de l’entrée. Cependant même dans le cas d’une sous estimation du degré du canal le CMA-MR présente une certaine robustesse contrairement à [6] ce qui est un atout supplémentaire.

## 5 Simulations

Nous illustrons la robustesse de l’algorithme CMA-MR vis à vis du bruit et du manque de disparité du canal.

A partir du canal académique #1 ( $h_1(z) = 1.20 + 0.3z^{-1}$  et  $h_2(z) = -0.60 + 1.5z^{-1}$ ), nous recherchons tous les égaliseurs possibles (i.e.,  $P = 4$ ).

Réponse Impulsionnelle Globale # 1					EQM
$f_0$	<b>-1.000</b>	0.675	0.507	0.191	0.541
$f_1$	0.120	<b>-1.000</b>	0.757	0.303	0.511
$f_2$	0.115	0.189	<b>-1.000</b>	0.535	0.414
$f_3$	0.062	0.086	0.142	<b>-1.000</b>	<b>0.161</b>

Tableau 1

Dans le Tableau 1, nous donnons les réponses impulsionnelles globales estimées (canal+égaliseurs) à la convergence, moyennée sur 500 itérations et normalisées, ainsi que l’EQM associée dans le pour un RSB = 20dB. A partir d’une initialisation a priori quelconque, les 4 solutions fournissent l’ensemble des retards admissibles par le système global. Nous voyons en particulier que la solution ‘optimale’, dans ce cas de figure, est donnée par l’égaliseur  $g_3$  qui est associé à la réponse globale  $f_3$ .

De façon à évaluer l’action des contraintes mutuellement référencées, nous représentons, pour le canal #2 ( $h_1(z) = 1 + 3z^{-1}$  et  $h_2(z) = 1 + 0.5z^{-1}$ ) et un RSB = 20dB, les trajectoires des réponses impulsionnelles globales (Figures 1,2). En initialisant les égaliseurs  $g_{1,2}$  à la même valeur correspondant à un minima local associé au retard  $\nu = 1$  (EQM=0.114). Les trajectoires des deux réponses impulsionnelles globales sont représentées dans les Figures 1 & 2. La solution obtenue fournit l’EQM minimum (EQM=0.036), elle correspond au retard  $\nu = 0$ . L’effet de la contrainte MR permet dans ce cas à l’un des égaliseurs de changer de bassin d’attraction, on peut ainsi échapper à une mauvaise initialisation de l’algorithme.

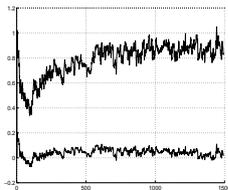


Figure 1 :  $f_1$

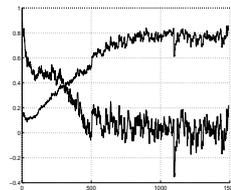


Figure 2 :  $f_0$

Dans le cas d’un manque de disparité du canal la contrainte MR permet d’améliorer les performances de manière encore plus importante. En effet, pour un canal qui comporte des zéros communs comme pour le canal #3 ( $h_1(z) = (0.30 - 0.5196i - z^{-1})(0.30 + 0.5196i - z^{-1})(0.80 - z^{-1})$ ,  $h_2(z) = (0.30 - 0.5196i - z^{-1})(0.30 + 0.5196i - z^{-1})(1.30 - z^{-1})$ ) les écarts entre les

EQM associées aux différents retards peuvent être très grands. On notera que l’on peut difficilement envisager d’égaliser ce type de canal, qui possède 2 zéros communs sur 3, par une approche au second ordre aveugle. Avoir accès à la sortie de plusieurs égaliseurs (ici 4 sur 6) permet de sélectionner la meilleure sortie (voir Tableau 2,3), ce qui permet au minimum d’ouvrir l’œil du canal. Nous devons également souligner que les réponses impulsionnelles  $f_{|k|}$  ainsi estimées sont très proche de celles fournies par un filtre de Wiener appliqué dans les mêmes conditions comme peut le permettre le CMA initialisé convenablement.

Réponse Impulsionnelle Globale # 2						
$ f_0 $	<b>1.000</b>	-0.288	0.145	0.040	0.044	-0.032
$ f_1 $	-0.026	<b>1.000</b>	-0.125	0.126	0.137	0.021
$ f_2 $	0.002	-0.023	<b>1.000</b>	-0.100	0.055	0.180
$ f_3 $	0.089	0.003	0.010	<b>1.000</b>	-0.588	0.355

Tableau 2

$\nu$	0	1	2	3
EQM	0.366	<b>0.065</b>	0.072	0.142

Tableau 3

## Références

- [1] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath., *A new approach to blind identification and equalization of multipath channels*, in Proc. Asilomar Conf., 1991.
- [2] D.T.M. Slock, and C.B. Papadias, *Further results on blind identification and equalization of multiple FIR channels*, in Proc. ICASSP’95, 1995.
- [3] E. Moulines, et al., *Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters*, IEEE on SP, 1994.
- [4] A. Touzni and I. Fijalkow, *Robustness of fractionally-spaced equalization algorithms to lack of channel disparity*, in Proc. ICASSP-97, 1997.
- [5] I. Fijalkow, A. Touzni, J.R. Treichler, *Fractionally-Spaced Equalization using CMA : Robustness to Channel Noise and lack of Disparity*, in IEEE Tr. on SP special issue on Signal Processing for Advanced Communications, January 1997.
- [6] D. Gesbert, P. Duhamel, S. Mayrargue, *Subspace-based adaptive algorithms for the blind equalization of multi-channel FIR filters*, in Proc. EUSIPCO-94, 1994.
- [7] H. Zeng, L. Tong, C.R. Johnson Jr., *Mean square error performance of CMA receivers*, in Proc. ASILOMAR, Pacific grove, CA, October, 1996.