

# Caractérisation de l'Egalisabilité Spatio-Temporelle : cas d'un Canal Variant dans le Temps

M.-L. Alberi, I. Fijalkow

ETIS, URA CNRS 2235

ENSEA - Université de Cergy-Pontoise,

6 av. du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France

Tel : 01 30 73 66 10, Fax : 01 30 73 66 27

alberi@ensea.fr, fijalkow@ensea.fr

## RÉSUMÉ

Nous étudions l'influence des variations temporelles d'un canal sur la difficulté à égaliser correctement dans le cadre de la diversité spatio-temporelle et indépendamment d'un algorithme en particulier. Pour cela, nous définissons un degré de non-égalisabilité (DNE) qui permet d'évaluer cette difficulté de manière quantitative et uniquement en fonction de la variation du canal. Cependant, le DNE ne suffit pas à expliquer le comportement d'un algorithme tel que le LMS. Nous montrons qu'il dépend essentiellement de la disparité du canal à chaque instant.

## ABSTRACT

We study the time-varying channel influence on the difficulty to equalize in the case of spatio-temporal diversity and independently of an algorithm. We define a degree of non-equalisability (DNE) which allows to evaluate quantitatively the difficulty for an equalizer to deal correctly with the channel time-variation, according to the variation only. Meanwhile, the DNE isn't sufficient to explain the behaviour of the LMS's algorithm. We show that this behaviour mainly hangs on the disparity of the channel at every moment.

## 1 Introduction

La transmission de signaux discrets dans des canaux de communication numériques nécessite l'égalisation des signaux émis en réception afin de supprimer l'effet nuisible d'interférences intersymboles dues à leur propagation dans ces milieux dispersifs. Dans les conditions réelles de propagation, le problème lié à l'égalisation est encore plus compliqué par le fait que les **canaux évoluent dans le temps** et que leurs variations nous sont inconnues. La plupart des travaux existants dans le domaine considèrent d'abord un schéma d'identification du canal suivi d'un système d'égalisation [1], [2].

Cependant dans le cas d'**égalisation directe**, *i.e.* sans estimation du canal, le problème de poursuite ne se pose pas dans les mêmes termes. En effet, peu nous importe que le canal varie d'une façon significative, s'il est possible de continuer à bien l'égaliser ! Nous abordons ce problème dans le cadre de la diversité spatio-temporelle des observations (*i.e.* des observations suréchantillonnées par rapport à la source ou bien reçues sur un réseau de capteurs) qui, dans le cas statique, permet l'égalisation correcte de canaux invariants dans le temps de type FIR [3].

Nous proposons, dans le cadre de cette diversité, une définition quantitative permettant d'évaluer la difficulté à égaliser correctement des canaux variant temporellement. Enfin, nous essaierons de comprendre la réaction d'un égaliseur linéaire de structure adaptative face aux changements du canal, dans le cas d'une dérive ou dans celui d'un saut.

## 2 Egalisation spatio-temporelle

### 2.1 Cas statique

Dans le cadre de la diversité spatio-temporelle, le signal observé  $\mathbf{y}(n)$ , issu de la séquence source  $s(n)$ , se modélise sous la forme d'un signal  $L$ -dimensionnel [3] :

$$\mathbf{y}(n) = [\mathbf{h}(z)]s(n) + \mathbf{w}(n)$$

$\mathbf{w}(n)$  représente un bruit supposé blanc, centré et indépendant de la séquence émise  $s(n)$ .  $\mathbf{h}(z)$ , de dimension  $L \times 1$ , est la fonction de transfert du canal de transmission que l'on supposera de degré  $Q$ . Elle se compose de  $L$  fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à  $Q$ . De même l'égaliseur possède une fonction de transfert  $\mathbf{g}(z)$ , constituée de  $L$  polynômes de degré  $(N - 1)$ .

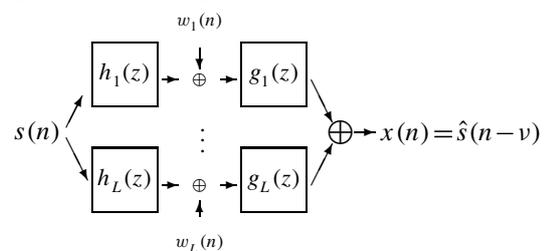


FIG. 1 — Canal à entrée unique et à multiples sorties / Egaliseur

La sortie de l'égaliseur, notée  $x(n)$ , est donnée par :

$$[\mathbf{g}^T(z)]\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}^T Y_N(n) = \underbrace{\mathbf{g}^T \mathcal{J}(\mathbf{h})}_{f^T} S_{N+Q}(n) + \mathbf{g}^T W_N(n).$$

$\mathbf{g}$  est la réponse impulsionnelle de l'égaliseur (de longueur  $LN$  avec  $N \geq Q$ ).  $Y_N(n)$  est le vecteur de régression contenant les observations aux instants  $n, n-1, \dots, n-N+1$  et  $S_{N+Q}(n) = (s(n), s(n-1), \dots, s(n-N+1))^T$ .  $\mathcal{T}(\mathbf{h})$  est la matrice bloc-Toeplitz de convolution du canal associée à  $\mathbf{h}(z)$  et  $f$  est la réponse impulsionnelle globale du canal et de l'égaliseur.

En absence de bruit et sous les conditions d'identifiabilité du canal, pas de zéro commun entre les composantes de  $\mathbf{h}(z)$  et  $N \geq Q$ ,  $\mathcal{T}(\mathbf{h})$  est de rang colonne plein [3]. La réponse impulsionnelle globale du canal peut être égale à un kronecker, ce qui correspond à une égalisation par « Forçage à zéro », idéale en absence de bruit.

$$f = \mathcal{T}(\mathbf{h})^T \mathbf{g} = \delta_v = [0..010..0]^T.$$

## 2.2 Cas d'un canal variant dans le temps

Que deviennent ces relations lorsque le canal varie temporellement ?

On suppose que les signaux observés  $\mathbf{y}(n)$  obéissent de manière instantanée à un modèle linéaire variant dans le temps, soit :

$$\mathbf{y}(n) = [\mathbf{h}_n(z)]s(n) + \mathbf{w}(n)$$

L'expression de la sortie de l'égaliseur reste inchangée à la seule différence que le canal varie, soit  $\mathbf{h}_n$ . La sortie d'un égaliseur de fonction de transfert  $\mathbf{g}(z)$  est

$$x(n) = [\mathbf{g}^T(z)]\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}^T Y_N(n) = \underbrace{\mathbf{g}^T \mathcal{T}_n}_{f^T} S_{N+Q}(n) + \mathbf{g}^T W_N(n)$$

où  $\mathcal{T}_n$  est la matrice  $NL \times (N+Q)$  qui traduit la variation du canal dans le temps. Elle n'est plus bloc-Toeplitz et n'est pas forcément inversible. Elle a pour expression :  $\mathcal{T}_n =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_n(0) & \dots & \mathbf{h}_n(Q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{n-1}(0) & \dots & \mathbf{h}_{n-1}(Q) & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{h}_{n-N+1}(0) & \dots & \mathbf{h}_{n-N+1}(Q) \end{bmatrix}$$

Soit  $e(n)$ , l'erreur commise à la sortie du filtre lors de l'estimation de  $s(n-v)$  par  $g$  où  $v$  correspond à un éventuel retard de traitement :

$$e(n) = \hat{x}(n) - s(n-v) = f_n^T S_{N+Q}(n) + \mathbf{g}^T W_N(n) - s(n-v)$$

Nous appelons la quantité  $f_n^T S_{N+Q}(n) - s(n-v)$ , erreur de variation, et nous la notons  $t(n)$ . L'expression de l'erreur devient alors

$$e(n) = t(n) + \mathbf{g}^T W_N(n)$$

La difficulté à égaliser un canal est caractérisée par cette erreur a priori (*i.e.* calculée avant la mise à jour des coefficients du filtre). Cette dernière, due à la variations du canal et au bruit, doit être compensée à chaque itération par l'égaliseur.

## 3 Degré de non-égalisabilité

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'influence des variations temporelles du canal sur l'égalisation.

Dans le cas de l'estimation d'un canal variant dans le temps, Macchi a défini un degré de non-stationnarité qui caractérise et mesure la vitesse des variations [1]. Nous transposons et étendons son étude dans le cas d'une égalisation directe d'un canal évoluant dans le temps, dans le cadre de la diversité spatio-temporelle.

### 3.1 Degré de non-égalisabilité

Nous supposons qu'à l'instant  $n_{av}$ , juste avant la variation du canal, l'égaliseur  $g_{n_{av}}$  réalise correctement l'inversion du canal. A l'instant  $n_{ap}$ , après la variation et a priori (*i.e.* avant la mise à jour des coefficients du filtre), deux comportements possibles du canal sont envisageables.

a) Entre les instants  $n_{av}$  et  $n_{ap}$ , la variation est si peu significative que le filtre  $g$  continue à égaliser correctement le canal. Dans ce cas, l'erreur a priori, pour un bruit faible, s'écrit  $e(n_{ap}) = \mathbf{g}_{n_{av}}^T W_N(n_{ap})$ .

b) Entre les instants  $n_{av}$  et  $n_{ap}$ , la variation est conséquente. L'égaliseur ne modélise plus correctement l'inverse de la fonction de transfert du canal, ce qui entraîne une erreur a priori importante, soit  $e(n_{ap}) = t(n_{ap}) + \mathbf{g}_{n_{av}}^T W_N(n_{ap})$ .

La comparaison de ces deux erreurs nous permet de définir un critère qui caractérisera l'égalisabilité d'un canal variant dans le temps. Ces deux erreurs sont éloignées si  $E[|t(n_{ap})|^2] \geq E[|\mathbf{g}_{n_{av}}^T W_N(n_{ap})|^2]$ . Donc pour mesurer l'égalisabilité d'un canal, nous proposons la quantité ci-dessous :

$$DNE = \sqrt{\frac{E[|t(n_{ap})|^2]}{E[|\mathbf{g}_{n_{av}}^T W_N(n_{ap})|^2]}}$$

Nous l'appelons degré de non-égalisabilité (DNE). Lorsque la puissance de l'erreur de variation est supérieure à celle du bruit amplifié par l'égaliseur, ce degré devient grand. La mise à jour de l'égaliseur, entre les instants  $n_{av}$  et  $n_{ap}$ , devra alors être importante.

Cependant la simplification possible de l'erreur de variation va nous permettre de constater que le DNE dépend directement de la position de la réponse impulsionnelle globale a priori,  $\tilde{f}_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{ap}}^T \mathbf{g}_{n_{av}}$ , par rapport au kronecker. En effet,

$$t(n_{ap}) = (\tilde{f}_{n_{ap}} - \delta_v)^T S_{N+Q}(n_{ap})$$

D'où

$$E[|t(n_{ap})|^2] = E[s(n)^2] \|\tilde{f}_{n_{ap}} - \delta_v\|^2$$

où  $E[s(n)^2]$  est la puissance du signal émis qui est supposée égale à 1. Par conséquent,

$$DNE = \sqrt{\frac{\|\tilde{f}_{n_{ap}} - \delta_v\|^2}{E[|\mathbf{g}_{n_{ap}}^T W_N(n_{ap})|^2]}}$$

Il possède une valeur faible lorsque l'égalisation a priori est correcte, *i.e.*  $\tilde{f}_{n_{ap}} \simeq \delta_v$ . Un égaliseur devra être considérablement modifié afin de poursuivre l'égalisation correcte d'un canal, dont les variations génèrent un DNE important.

Cependant où se situe la limite du DNE ? Nos simulations nous amènent à penser qu'elle est fonction de plusieurs paramètres et qu'elle se situe bien au dessus de 1. Toutefois, nous ne développerons pas ce point dans ce papier.

### 3.2 Influence de la variation

Nous supposons que la variation du canal débute à  $n_{av}$ . En période de régime permanent,  $\forall n_{ap} > n_{av} + N$ , la matrice de convolution du canal s'écrit de façon récurrente dans les deux cas considérés, soit  $\mathcal{T}_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{av}} + \mathcal{T}_{\mathbf{u}}$  où la forme de  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$  est précisée en annexe. On suppose toujours que  $\mathcal{T}_{n_{av}}$  est inversible.

En considérant la relation précédente, nous pouvons simplifier le numérateur du DNE. En effet, la réponse impulsionnelle globale a priori après variation du canal est de la forme :

$$\tilde{f}_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{av}}^T \mathbf{g}_{n_{av}} + \mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{g}_{n_{av}}$$

où nous supposons que  $\mathbf{g}$  n'a pas été modifié depuis  $n_{av}$ . En outre, le degré a été établi en supposant que le filtre optimal était obtenu à l'instant  $n_{av}$ , ce qui implique :

$$f_{n_{av}} = \mathcal{T}_{n_{av}}^T \mathbf{g}_{n_{av}} = \delta_v$$

Par conséquent,  $\tilde{f}_{n_{ap}} - \delta_v = \mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{g}_{n_{av}}$ . De plus,

$$E[(\mathbf{g}_{n_{av}}^T W_N(n_{av}))^2] = \sigma^2 E[\|\mathbf{g}_{n_{av}}\|^2]$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit. Le DNE s'écrit alors :

$$DNE = \sqrt{\frac{1 \|\mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{g}_{n_{av}}\|^2}{\sigma^2 \|\mathbf{g}_{n_{av}}\|^2}}$$

Le DNE dépend donc de la position relative du vecteur  $\mathbf{g}$ , associé à l'égaliseur, par rapport à l'espace propre généré par le noyau et les vecteurs propres de  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$ . Plus la contribution de  $\mathbf{g}$  dans le noyau de  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$  est forte et plus le DNE est proche de 0. En d'autres termes, un égaliseur continuera à égaliser correctement un canal qui se met brusquement à varier dans le temps, si la variation crée un espace orthogonal à  $\mathbf{g}$ . Dans cette configuration, l'égaliseur ne verra pas le changement d'état du canal. En effet pour lui le canal est en quelque sorte toujours le même, dans le sens où le filtre optimal  $\mathbf{g}_{n_{ap}}^{opt}$  pour le nouveau canal est identique à  $\mathbf{g}_{n_{av}}$ . En fait, le DNE nous délivre, pour une direction donnée, une indication sur la hauteur de la barrière que doit franchir l'égaliseur  $\mathbf{g}_{n_{av}}$  afin d'atteindre l'égaliseur optimal  $\mathbf{g}_{n_{ap}}^{opt}$ . Si celle-ci est respectivement trop importante ou peu élevée, les coefficients de  $\mathbf{g}_{n_{av}}$  et de  $\mathbf{g}_{n_{ap}}$  seront trop différents ou peu éloignés. On peut aussi remarquer que, pour un  $\mathbf{g}_{n_{ap}}$  donné, la variation du canal engendre un DNE borné par les valeurs propres singulières minimales et maximales de  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$ .

$$\lambda_{min}^S (\mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T)^2 \leq \frac{\|\mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{g}_{n_{av}}\|^2}{\|\mathbf{g}_{n_{av}}\|^2} \leq \lambda_{max}^S (\mathcal{T}_{\mathbf{u}}^T)^2$$

### 3.3 Simulations

Pour confirmer nos résultats, nous allons étudier un canal qui subit un saut d'amplitude donnée et dont la direction peut varier, pour un rapport signal émis sur bruit de 30 dB. Leur égalisation est réalisée par un LMS dont le pas assure une convergence très rapide du filtre tout en produisant une erreur de fluctuation acceptable. Le bruit et la diversité sont respectivement suffisamment faible et élevée pour obtenir une

égalité correcte du canal avant le saut, soit  $\mathbf{g}_{n_{av}}$  proche du filtre optimal.

Nous avons représenté, sur les figures 1 et 2, l'évolution temporelle de l'erreur quadratique moyenne (EQM) a priori et a posteriori (*i.e.* après la mise à jour des coefficients du filtre), pour deux valeurs extrêmes du DNE. Nous constatons que, dans la figure 2b, l'EQM a priori varie brusquement au moment du saut alors que dans la figure 2a, elle évolue toujours autour de la même valeur moyenne. L'égaliseur ne voit pas le changement d'état du canal pour une faible valeur du DNE alors qu'il le ressent pour une valeur importante. En effet,  $\mathbf{g}_{n_{av}}$  et  $\mathbf{g}_{n_{ap}}$  optimal sont respectivement proches ou éloignés dans le premier et le deuxième cas. En résumé plus la variation engendrera un DNE important, plus l'égaliseur devra être modifié pour la compenser. Nous remarquons

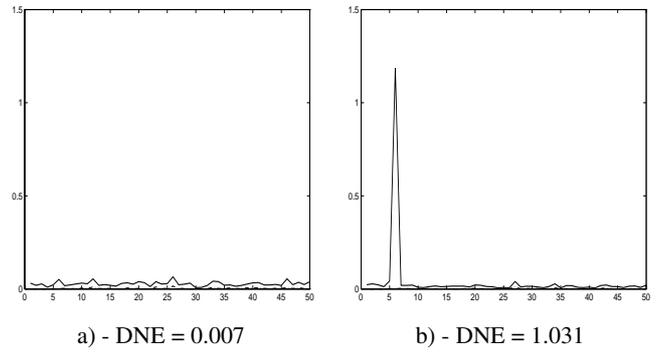


FIG. 2 — Erreur quadratique moyenne a priori (en trait plein) et a posteriori (en pointillé) en fonction du nombre d'itérations.

cependant que, dans les deux cas, le filtre continue à égaliser correctement le canal après un court laps de temps. Cela s'explique par le fait que le degré de diversité du canal, après la variation, reste toujours important. Une valeur correcte ou élevée du DNE n'engendre donc pas obligatoirement de bonnes ou de mauvaises performances. La figure 3 en est une parfaite illustration. Le DNE du dernier schéma est inférieur

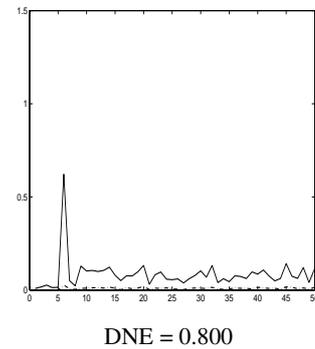


FIG. 3 — Erreur quadratique moyenne a priori (en trait plein) et a posteriori (en pointillé) en fonction du nombre d'itérations.

à celui du deuxième. Cependant dans le dernier cas, les performances de l'égalisation sont détériorées après le saut, par manque de disparité du canal après la variation (zéros des fonctions de transfert des sous-canaux trop proches) [4]. En résumé, si la variation améliore ou ne change pas le degré de

diversité du canal alors l'égaliseur, qui subit une perturbation infime ou non, continue toutefois à égaliser correctement le canal. En revanche, si la variation abaisse la disparité alors les performances de l'égalisation s'en trouvent détériorées.

## 4 Poursuite des variations

A partir de la valeur du DNE, nous ne pouvons qualifier les performances d'une égalisation spatio-temporelle d'un canal et d'une variation donnée. Plusieurs autres paramètres, autres que la direction ou l'amplitude de la variation, entrent en jeux. Nous avons vu précédemment que le manque de disparité pouvait être nuisible. Il est aussi nécessaire d'avoir un comportement adapté de l'égaliseur face au canal pour l'obtention d'une poursuite correcte de ses variations.

### 4.1 Mise à jour « idéale »

Nous supposons que la variation du canal débute à  $n_0$ . Les instants  $n_{av}$  et  $n_{ap}$  sont respectivement équivalents dans le cas de la dérive aux instants  $n$  et  $n + 1$  et dans le cas du saut aux instants  $n_0$  et  $n + k$ , ( $\forall n > n_0$  et  $\forall k > 0$ ). En période de régime permanent,  $\forall n > n_0 + N$ , la matrice de convolution du canal s'écrit de façon récurrente dans les deux cas considérés. L'égaliseur de structure adaptative s'exprime de la façon suivante :  $\mathbf{g}_{n_{ap}} = \mathbf{g}_{n_{av}} + \alpha_{n_{ap}}$  où  $\alpha_{n_{ap}}$  constitue le terme de mise à jour dont le rôle est de compenser l'erreur a priori due à la fois au bruit et aux variations du canal en régime permanent.

Quelque soit l'état d'un canal donné et de son égaliseur à l'instant  $n_{av}$ , on souhaite une égalisation parfaite a posteriori à l'instant  $n_{ap}$ , soit  $f_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{ap}}^\top \mathbf{g}_{n_{ap}} \simeq \delta_v$ .

Indépendamment d'un algorithme d'égalisation, nous allons établir l'expression de la mise à jour « idéale » d'un filtre adaptatif. En considérant les écritures récurrentes de  $\mathbf{g}$  et de  $\mathcal{T}_{n_{ap}}$ , nous exprimerons, par la méthode des moindres carrés, le terme de mise à jour  $\alpha_{n_{ap}}$  qui assure à chaque itération l'égalisation parfaite du canal. Soit,

$$\mathcal{T}_{n_{ap}}^\top \alpha_{n_{ap}} = \delta_v - \mathcal{T}_{n_{ap}}^\top \mathbf{g}_{n_{av}}$$

D'où, quelque soit la valeur de  $f_{n_{av}}$ ,

$$\alpha_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{ap}} (\mathcal{T}_{n_{ap}}^\top \mathcal{T}_{n_{ap}})^{-1} (\delta_v - f_{n_{av}} - \mathcal{T}_{\mathbf{u}}^\top \mathbf{g}_{n_{av}})$$

### 4.2 Cas particulier

Le terme de mise à jour est nul lorsque l'égaliseur réalise correctement l'inversion du canal à l'instant  $n_{av}$  et appartient au noyau de  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$ . Lorsque l'égaliseur parvient à un moment donné  $n_{ap}$  à satisfaire ces deux conditions, alors pour tous les instants postérieurs, il continuera à les satisfaire.

Dans le cas de la dérive et celui du saut, l'égaliseur essaie de tendre vers une solution optimale qui assure à la fois l'orthogonalité avec l'espace engendré par la variation et l'inversion parfaite du canal.

## 5 Conclusion

Le rôle du DNE est tout simplement d'estimer l'égalisabilité d'un canal variant dans le temps. Nous ne pouvons prévoir, uniquement à partir de cette quantité, le comportement d'un algorithme égaliseur. Il est, en fait, fonction d'une multitude de paramètres interactifs. En revanche, nous pourrions évaluer à partir de sa valeur l'importance de la modification que doit subir l'égaliseur pour continuer à égaliser correctement le canal. Les performances se détérioreront plus facilement, si tous les autres paramètres influents ne sont pas optimaux, lorsque la mise à jour est trop importante, soit pour un DNE important.

## Annexe

Un canal qui se met, à l'instant  $n_0$ , soit à dériver de façon constante ou soit à subir une variation brusque, est modélisé respectivement par l'expression suivante :

$$\mathbf{h}_{n_{ap}}(z) = \mathbf{h}_{n_{av}}(z) + \mathbf{u}(z)$$

Le terme  $\mathbf{u}(z)$  représente la fonction de transfert de la variation du canal. Cette dernière va générer une phase transitoire pendant  $N$  itérations, durant laquelle la matrice de convolution de la variation n'est pas de structure Toeplitz. Soit  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(Q) & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(Q) \\ 0 & & \dots & \dots & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

Puis, elle est suivie d'un régime permanent pendant lequel la matrice de convolution de variation devient  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}} = \mathcal{T}(\mathbf{u})$ .

Néanmoins, quelque soit la période et le type de variation, l'écriture formelle de la matrice de convolution du canal reste identique à celle de sa fonction de transfert. En effet, la relation devient :

$$\mathcal{T}_{n_{ap}} = \mathcal{T}_{n_{av}} + \mathcal{T}_{\mathbf{u}}$$

## Références

- [1] O. Macchi, *Adaptive processing : The least mean squares approach with applications in transmission*, Wiley & Sons, 1995.
- [2] S. McLaughlin et al. *A performance study of three adaptive equalizers in the mobile communications environment*, in Proc. ICC, 1989.
- [3] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue, *Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters*, IEEE Trans. on SP, 1994.
- [4] I. Fijalkow, *Multichannel equalization lower bound : a function of channel noise and disparity*, SSAP-96, 1996.