

# Répétition/modulation des symboles pour l'égénéralisation autodidacte au second-ordre dans un cadre mono-capteur

A. Chevreuil<sup>(1)</sup> et Ph. Loubaton<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Département Signal de Télécom Paris  
46 rue Barrault 75634 Paris cedex 13, France  
chevreui@sig.enst.fr

<sup>(2)</sup> Equipe Systèmes de Communication, Université de Marne-la-Vallée  
2, rue de la Butte Verte 93166 Noisy-le-Grand, France

## RÉSUMÉ

Dans le cadre de l'égénéralisation autodidacte au second-ordre, nous proposons de réorganiser la séquence des symboles de manière à donner naissance, à l'émetteur, à des propriétés statistiques cycliques. Le "canal" - c'est-à-dire les paramètres inconnus de la transmission prise dans son ensemble - peut alors, grâce à l'exploitation de cette cyclo-stationnarité, être identifié en aveugle sans aucune des restrictions classiquement rencontrées (typiquement problèmes de zéros communs, parfois de sur-détermination d'ordre). La solution proposée est simple et fait appel à une version contrainte de la méthode sous-espace. Des comparaisons avec les approches existantes sont données dans la partie "simulations numériques"; les bonnes performances de notre méthode sont commentées.

## ABSTRACT

Instead of transmitting the mere sequence of symbols, we propose in here to change the structure of the input - namely by repeating and modulating the symbols - which gives rise to second-order cyclostationary structures. These ones are exploited in reception so as to facilitate the blind equalization. The identification of the unknown channel is shown not to suffer from the classical problem (common zeroes, or/and over-determination problems). Simulation evidences - which include comparisons with existing systems - are plotted and thoroughly commented: the results of our method are good on realistic contexts for short data sequences and bad SNR.

## 1 Introduction. Répétition-modulation.

Soit donnée une séquence de symboles  $\{s(n)\}$ , au débit  $1/T_s$ , et supposée stationnaire au sens large. On désire transmettre cette dernière dans un milieu sujet à des distorsions linéaires (trajets multiples) : il est connu que les observations échantillonnées laissent apparaître une forte Interférence-Entre-Symboles (IES), même si les conditions de Nyquist sont satisfaites. Notons que beaucoup de systèmes de communications numériques (radio-mobile, systèmes haut-débits...) souffrent de tels effets, ce qui a motivé un grand nombre de recherches dans le domaine de l'égénéralisation. En particulier, beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'identification des paramètres inconnus dus aux distorsions : on cherche alors à restituer le "canal" (afin d'en inverser les effets dans une seconde étape) par des méthodes rapides et de complexité raisonnable. Une solution naturelle est d'intercaler périodiquement entre des trames de symboles une courte séquence connue du récepteur : bien qu'actuellement utilisée dans la norme GSM, une telle approche peut être incompatible avec les contraintes d'efficacité spectrale ou/et de mobilité importante. Ces derniers arguments ont suggéré le problème, dit *autodidacte*, de l'identification du canal sans qu'un apprentissage ne soit nécessaire : en se basant *uniquement* sur des statistiques à l'ordre deux, faciles et rapides à estimer, il a été démontré que l'exploitation de certains types de *diversité* permet de résoudre le problème d'identification du canal : la diversité spatiale dans le cadre

d'un récepteur à plusieurs capteurs ; la diversité temporelle dans les systèmes sur-échantillonnés, étroitement connectée aux propriétés de cyclo-stationnarité des-dits systèmes - voir [3]. La pierre d'achoppement de ces méthodes est précisément que la condition de diversité n'est pas acquise dans bien des cas : supposant que seul un capteur est disponible, il a été précisément montré dans [5] que le caractère "bande-limitée" des systèmes impose que la plupart des cyclo-spectres sont numériquement faibles, mettant en défaut la condition de diversité temporelle, ce qui conduit à des problèmes mal conditionnés.

Face à ces limitations, une idée récente a été d'injecter au niveau de l'émetteur des fréquences cycliques significatives, permettant de re-conditionner les problèmes - voir dans [1] et [2] les différents points de vue adoptés. Au sein de ces approches, nous préconisons la construction suivante : on se donne un entier naturel  $L$  et un réel  $\alpha$  ; soit la suite  $\{v(n)\}$  fonctionnant à la cadence  $2/T_s$  (double de celle des symboles  $\{s(n)\}$ ) obtenue en blocs, par

$$\begin{cases} v(2Ln + k) = \frac{1}{\sqrt{2}}s(n + k) & \text{si } 0 \leq k \leq L - 1 \\ v(2Ln + k) = \frac{1}{\sqrt{2}}s(n + k)e^{i2\pi\alpha k} & \text{si } L \leq k \leq 2L - 1 \end{cases} \quad (1)$$

On décide de ne pas changer la bande-passante du filtre de mise-en-forme par rapport à un système de Nyquist classique fonctionnant avec la séquence d'origine  $\{s(n)\}$ , mais simplement de rapprocher les impulsions ; il vient alors que le signal

analogique en réception est

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(n)h_a(t - n\frac{T_s}{2})$$

où  $h_a(\cdot)$  est la response impulsionnelle globale du système, prenant en compte la forme de l'impulsion, le canal physique (les trajets multiples) ainsi que le filtre de réception. Naturellement, tous les paramètres de la transmission restent inchangés par rapport au cas où  $\{s(n)\}$  aurait été transmise :

- le ratio  $\frac{E_b}{N_0}$  : certes l'énergie allouée pour un symbole  $v(n)$  est divisée par deux par rapport au symbole d'information, mais ce dernier est répété une fois ;
- l'efficacité spectrale ne change pas car le débit utile ne bouge pas, de même que la bande passante.

L'échantillonnage en réception à la cadence  $2/T_s$  donne l'observation (supposée non-bruitée pour le moment)

$$y(n) = [h(z)].v(n) \quad (2)$$

où  $h(z) = \sum_0^M \mathbf{h}(k)z^{-k}$  est obtenu par échantillonnage de  $h_a(t)$  à  $2/T_s$ , et  $M$  est l'ordre du modèle.

Nous développons maintenant une approche sous-espace "structurée" permettant l'identification de  $h(z)$ .

## 2 Approche d'identification proposée.

Dans la suite, on supposera que la taille des blocs, *i.e.*  $L$ , est "très grande" devant la taille du filtre. On définit, à partir des observations, et pour  $n = 0 \dots L - 1$ , le signal à deux composantes défini par

$$\tilde{y}(n) = [y(n), y(n + L)e^{-i2\pi\alpha n}]^T. \quad (3)$$

Cette construction, relative à la transmission du premier bloc de données, est répétée de la même manière pour les blocs suivants. On peut aisément montrer que, aux instants  $M, \dots, L - 1; L + M, \dots, 2L - 1; \dots$ , on peut écrire :

$$\tilde{y}(n) = [\underline{H}(z)].s(n) \quad (4)$$

où

$$\underline{H}(z) = [h(z), h(ze^{2i\pi\alpha})]^T. \quad (5)$$

On a mis en évidence un processus multi-varié  $\{\tilde{y}(n)\}$  pouvant être vu, à certains effets de bord près (entièrement contôlables) comme la sortie d'un filtre vectoriel à réponse impulsionnelle finie excité par la suite des symboles. On se ramène donc à des problèmes standards quant à l'identification de ce filtre à la différence que ce dernier est fortement structuré. Au vu de (4), il semble naturel d'utiliser des approches sous-espace - voir [4] - dans lesquelles la symétrie de  $\underline{H}(z)$  est à prendre en compte.

### 2.1 Une approche algébrique : contexte non-bruité

Dans la suite,  $\hat{M} = M + \Delta M$  désigne une estimation de l'ordre du canal telle que  $\Delta M \geq 0$ ; on suppose que les données sont observées pendant  $T$  périodes symboles,  $T \gg$

$\hat{M}$ . On appelle alors  $Y_{\hat{M}}(n) = [\tilde{y}^T(n), \dots, \tilde{y}^T(n - \hat{M})]^T$  aux instants pour lesquels (4) est vérifiée. Il est simple de montrer que

$$Y_{\hat{M}}(n) = \mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})S_{\hat{M}+M}(n) \quad (6)$$

où  $S_{\hat{M}+M}(n) = [s(n), \dots, s(n - M - \hat{M})]^T$  et

$$\mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H}) = \begin{bmatrix} \underline{H}(0) & \dots & \underline{H}(\hat{M}) & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \underline{H}(0) & \dots & \underline{H}(\hat{M}) \end{bmatrix}$$

où  $\underline{H}(k) = [\mathbf{h}(k), \mathbf{h}(k)e^{-i2\pi\alpha k}]^T$  est le  $k$ ème coefficient de  $\underline{H}(z)$ <sup>1</sup>.

On considère la matrice suivante :

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{T} \sum_n Y_{\hat{M}}(n)Y_{\hat{M}}(n)^*. \quad (7)$$

où l'on somme sur des indices  $n \leq T$  pour lesquels (4) a lieu. On obtient que  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})\hat{\mathcal{S}}\mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})^*$  où  $\hat{\mathcal{S}} = \sum_n S_{\hat{M}+M}(n)S_{\hat{M}+M}(n)^*$ . La matrice  $\hat{\mathcal{S}}$  est supposée de rang plein - ce qui ne manque pas de se produire si la séquence des symboles est persistante et  $T$  "suffisamment grand". En utilisant pleinement la structure linéaire du vecteur  $\underline{H}(z)$ , on aboutit alors au théorème suivant, surprenant pour les habitués des méthodes dites "sous-espace" :

**Théorème 2.1** — Si  $\alpha$  est irrationnel, l'équation de la variable vectorielle  $\mathcal{G}$  de dimension  $\hat{M} + 1$

$$\mathcal{G}P\mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})\hat{\mathcal{S}}\mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})^*P^*\mathcal{G}^* = 0 \quad (8)$$

admet des solutions  $\mathcal{G} = [\mathbf{G}(0), \dots, \mathbf{G}(\hat{M})]$  telles que  $G(z) = \sum_{k=0}^{\hat{M}} \mathbf{G}(k)z^{-k}$  vérifie

$$G(z) = \lambda H(z)$$

pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La matrice structurante  $P$  est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & e^{i2\pi\alpha} & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & e^{i2\pi\alpha\hat{M}} \end{bmatrix}$$

Ce théorème peut être démontré grâce à certaines propriétés sur les espaces rationnels ; il est aisé de déduire la démonstration de [2]. Etant donné que le caractère irrationnel de  $\alpha$  n'a pas de sens pour les systèmes à virgule fixe, on peut étendre le théorème à des  $\alpha$  rationnels remplissant quelques conditions peu restrictives - voir [2]. La conséquence immédiate de ce théorème est que, en environnement non bruité, l'identification du canal inconnu  $h(z)$  peut être menée *sans erreur* sans que celui-ci ne soit soumis à aucune contrainte (en particulier, aucune restriction sur la position des zéros de  $h(z)$  n'est demandée). De plus, la méthode n'exige pas la connaissance précise de l'ordre du modèle : il suffit en effet de sur-estimer ce dernier. A la lumière de ce résultat, nous développons un point de vue statistique lorsque le milieu est perturbé par des interférences additives.

<sup>1</sup> $\underline{H}(k) = 0$  pour  $k > M$

## 2.2 Approche statistique.

Supposons maintenant que  $y(n) = [h(z)].v(n) + b(n)$  où  $\{b(n)\}$  est un processus du second-ordre, blanc, décorrélié de la séquence des symboles. Le processus  $Y_{\hat{M}}(n)$  est stationnaire, et on montre que  $\mathcal{R}$ , donnée par (7), est un estimateur consistant de

$$E[Y_{\hat{M}}(n)Y_{\hat{M}}(n)^*] \quad (9)$$

(pour  $n$  tel que (4) est valable). On remarque que l'on a aussi

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})\mathcal{S}\mathcal{T}_{\hat{M}}(\underline{H})^* + \sigma^2 I_{2\hat{M}+1}$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit,  $I_{2\hat{M}+1}$  la matrice identité de taille  $2\hat{M} + 1$  et  $\mathcal{S}$  la matrice de corrélation des symboles. Reprenant le théorème précédent, on montre alors simplement que la quantité

$$\hat{\mathcal{H}} = \underset{\|\mathcal{G}\|=1}{\operatorname{argmin}} \mathcal{G}P\hat{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{R}}^*P^*\mathcal{G}^*$$

est une estimée du canal : supposant la phase du canal connue, il est aisé, par des raisonnements de perturbations matricielles, de montrer que cet estimateur du canal est consistant. On notera en conclusion que la couleur des symboles  $\{s(n)\}$  ne change pas les résultats obtenus.

## 3 Applications numériques.

Dans la suite  $L = 80$  et  $\alpha = 51/360$ . On considère ici le canal obtenu par les spécifications suivantes (correspondant à un contexte radio-mobile) : la porteuse est à  $1\text{GHz}$  et la période symbole est  $T_s = 3.7\mu\text{s}$ . La fonction de mise-en-forme est un cosinus-surélevé de facteur 0.5 tronqué en dehors de l'intervalle  $[-2.5T_s, 2.5T_s]$  (c'est-à-dire qu'approximativement 5 lobes sont pris en compte). Trois trajets sont tirés aléatoirement ; nous avons travaillé sur la réalisation suivante :

	retard (en $T_s$ )	atténuation (en dB)
1 <sup>er</sup> trajet	7.0000	0
2 <sup>nd</sup> trajet	7.0832	-2.51
3 <sup>eme</sup> trajet	10.800	-1.13

Dans les systèmes étudiés dans la suite, le filtre  $h(z)$  considéré est donc de degré  $M = 14$  : on a représenté, Figure (1), les parties réelle et imaginaire de  $h(z)$ .

Les séquences  $\{s(n)\}$  sont blanches et binaires. Les systèmes pris en considération ici sont

- système classique sur-échantillonné (exploitation de la cyclo-stationnarité “naturelle”) : l'observation s'écrit  $[h(z)].\tilde{s}(n) + w(n)$  où  $\tilde{s}(2n) = s(n)$  et  $\tilde{s}(2n+1) = 0$ . L'identification de  $h(z)$  est effectuée par une méthode sous-espace (on a supposé l'ordre parfaitement estimé) après stationnarisation du processus.
- système de codage par répétition décrit dans [1]. L'observation s'écrit  $[h(z)].v_{\text{repet}}(n) + w(n)$  où  $\{v_{\text{repet}}\}$  s'écrit comme dans (1) avec  $\alpha = 0$  pour des blocs de longueur  $L = M + \Delta$ , où  $\Delta$  est la sur-détermination de l'ordre du canal. L'identification est menée grâce à une méthode sous-espace.

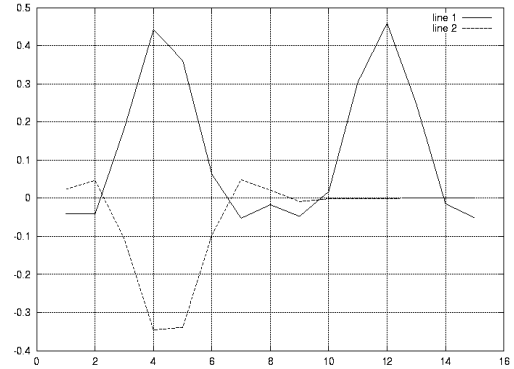


FIG. 1 — réponse impulsionnelle. Ligne pleine : partie réelle. Ligne pointillée : partie imaginaire.

Dans les comparaisons données par la suite, on se donne comme critère l'écart quadratique moyen (on effectue 200 expériences “Monte-Carlo”) entre le canal et l'estimée obtenue par les différentes méthodes. Comme l'identification au second-ordre ne permet pas de connaître la phase, on supposera celle-ci connue.

### 3.1 Echec du simple sur-échantillonnage.

Rappelons que dans ce contexte, le canal inconnu n'est identifiable au second-ordre que si  $h(z)$  et  $h(-z)$  n'admettent pas de zéros communs. Nous avons représenté, Figure (2), les pôles de ces deux polynômes.

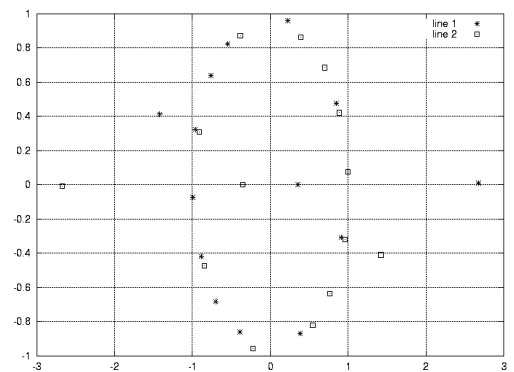


FIG. 2 — “\*” : racines de  $h(z)$  ; “o” : racines de  $h(-z)$

On constate un grand nombre de groupes de zéros “presque communs”, expliquant les très mauvais résultats donnés par la Figure (3).

Nous retiendrons que cette approche nécessite des très forts ratios Signal/Bruit ou/et un grand nombre d'observations. Les résultats donnés par notre construction améliorent les précédents de  $30\text{dB}$ .

### 3.2 Comparaison avec un simple codage par répétition.

On a choisi  $\Delta = 2$ . La consistance des deux approches est observée - voir Figure (4) ;

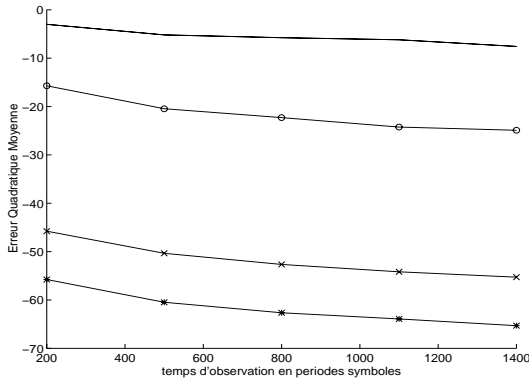


FIG. 3 — ligne simple : sur-éch.  $RSB = 40dB$ ; “o” : sur-éch.  $RSB = 50dB$ ; “x” : répétition/modulation  $RSB = 40dB$ ; “\*” : répétition/modulation  $RSB = 50dB$  ;

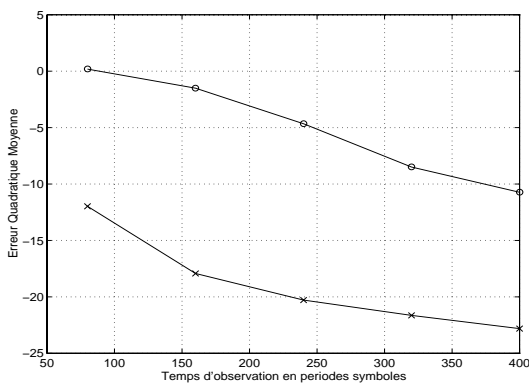


FIG. 4 —  $RSB = 15dB$ . “o” : répétition; “x” : répétition/modulation

on remarque les meilleures performances du système répétition/modulation. La Figure (5) le confirme.

Notons les bonnes performances de notre approche même à mauvais RSB, alors que le nombre d’observations est faible (160 symboles, *i.e.*, 2 trames).

## 4 Conclusion.

Au sein des approches visant à injecter des propriétés statistiques cycliques, nous avons montré qu’un schéma de répétition suivi de modulation des symboles offre une grande flexibilité au regard de l’égalisation aveugle au second-ordre. La méthode proposée est simple et jouit de performances très satisfaisantes.

## Références

[1] M. K. Tsatsanis and G. B. Giannakis, “Coding-induced cyclostationarity for blind channel equalization” in *Proc. of the 29th Conference on Information sciences and systems*, The John Hopkins University, Baltimore, pages 685-690, 1995.

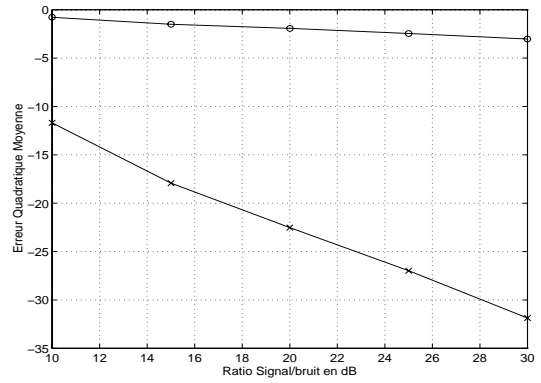


FIG. 5 — 160 périodes symboles. “o” : répétition; “x” : répétition/modulation

[2] A. Chevreuil and P. Loubaton, “Modulation and second-order cyclo-stationarity : structured subspace method and identifiability” in *IEEE Signal Processing Letters*, July 1997.

[3] A. Chevreuil, Ph. Desbouvries, A. Gorokhov, Ph. Loubaton and Ch. Vignat, “Blind equalization in the presence of jammers and unknown noise. Solutions based on second-order cyclostationary statistics” soumis à *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995.

[4] K. Abed-Meraim, P. Loubaton and E. Moulines, “A subspace algorithm for certain blind identification problems” in *IEEE trans. on Information Theory*, vol.45, no 1, January 1997.

[5] A.J. van der Veen, “Resolution limits of blind multi-user channels identification schemes : the band-limited case” in *Proc. ICASSP’96* pages 2722-2725.