

# Comparaison de représentations temps-fréquence appliquées à la classification de signaux non-stationnaires

Edith Grall-Maës, Pierre Beuseroy

Laboratoire de Modélisation et Sûreté des Systèmes, Université de Troyes  
12, rue Marie Curie BP 2060 10010 Troyes cedex FRANCE

## RÉSUMÉ

Les travaux présentés concernent une étude comparative de différentes représentations temps-fréquence (RTF) utilisées dans un but d'analyse et de classification de signaux non-stationnaires. La distribution de Wigner-Ville (DWV) est utilisée comme référence et trois représentations n'appartenant pas à la classe de Cohen sont considérées. La première méthode consiste à effectuer sur la DWV un lissage avec un noyau gaussien adapté au contenu local du signal. Les deux autres éliminent les interférences par l'application d'un masque, déterminé à partir de la DWV du signal. La classification est effectuée par discrimination linéaire des représentations. L'application considérée (discrimination de complexes-K et d'ondes delta dans l'EEG du sommeil) montre que l'utilisation de RTFs déduites de la DWV par filtrage non-linéaire peut permettre d'améliorer conjointement la lisibilité de la représentation et la classification de signaux non-stationnaires.

## 1 Introduction

Les représentations temps-fréquence (RTF) permettent de décrire le contenu des signaux conjointement en temps et en fréquence [1]. Ainsi, elles peuvent mettre en évidence certaines caractéristiques des signaux non-stationnaires.

L'approche temps-fréquence facilitant l'analyse de signaux non-stationnaires, différents travaux ont été effectués sur l'apport des RTFs aux problèmes de détection et de classification. Les RTFs utilisées sont classiquement issues de la classe de Cohen ou du groupe affine (classe affine et transformée en ondelettes) [2]. Le choix de la RTF dépend souvent d'une alternative entre propriétés théoriques et lisibilité de la représentation.

Flandrin [3] et Lemoine [2] ont proposé une formulation à l'intérieur de la classe de Cohen qui permet d'exprimer de nombreux détecteurs classiquement connus dans le domaine temporel. Le test de détection consiste à effectuer une corrélation entre la distribution de Wigner-Ville (DWV) du signal observé et une distribution  $C_r(t,f;\phi)$  de la classe de Cohen d'un signal  $r$  de référence. Le noyau  $\phi$  relatif à  $C_r$  dépend de propriétés statistiques connues du processus à détecter. Ce test trouve une formulation équivalente en appliquant le noyau sur la DWV du signal observé plutôt que sur le signal de référence. Lorsque le processus à détecter vérifie des propriétés statistiques bien précises (signal connu à phase initiale aléatoire, canal de Rayleigh, ..), l'expression de ce détecteur est souvent optimale (ou sous-optimale) au sens d'un critère bien défini (maximum de vraisemblance, déflexion,...).

## ABSTRACT

A comparison of different time-frequency representations (TFR) used for analyzing and classifying non-stationary signals is presented. The Wigner-Ville distribution (WVD) is used as reference and three other representations outside the Cohen class are considered. The first one uses an adaptive optimal-kernel to smooth the WVD. The others remove cross-components by applying a mask, which depends on the WVD of the signal. The designed classifier is a linear discriminant function. Our given problem (discrimination between K-complex and delta waves) demonstrates that TFRs obtained by non-linear filtering of the WVD can improve both the readability of the representation and the classification of non-stationary signals.

L'étude actuellement menée s'intéresse aux RTFs développées dans le but d'obtenir une représentation aisée à interpréter, et n'appartenant ni à la classe de Cohen ni à la classe affine. Nous souhaitons déterminer si l'utilisation de RTFs déduites de la DWV par filtrage non-linéaire peut améliorer la classification de certains processus pour lesquels aucune propriété statistique n'est connue. Le processus est simplement connu à partir d'un ensemble d'apprentissage.

Dans le cadre de cette étude, quatre RTFs sont considérées : la DWV qui sert de référence, la méthode du noyau adaptatif [4], une méthode de traitement d'image (méthode des surfaces) [5], et la méthode de corrélation [6]. Pour chaque méthode, la classification est effectuée par discrimination linéaire sur les pixels des représentations. L'étude comparative a été menée dans le cadre d'une application précise. Le problème posé concerne la discrimination entre les complexes K et les ondes delta de l'EEG du sommeil.

Après avoir décrit les différentes RTFs utilisées et le principe de classification, les résultats sont présentés.

## 2 Description des représentations temps-fréquence utilisées

Deux approches en dehors de la classe de Cohen ont été considérées. D'une part, une méthode consiste à lisser la DWV avec un noyau adapté au signal et évoluant au cours du temps. D'autre part, deux méthodes de traitement d'image sélectionnent les termes signal par l'application d'un masque. Pour l'évaluation des performances de classification la représentation de Wigner-Ville sert de référence.

## 2.1 La représentation de Wigner-Ville

La distribution de Wigner-Ville [7], définie par :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

est un outil largement utilisé pour l'analyse temps-fréquence. Elle possède une bonne résolution temps-fréquence et un nombre important de propriétés théoriques (marginales en temps et en fréquence, conservation des supports temporel et fréquentiel, ...) [8]. Néanmoins, sa structure quadratique conduit à la présence de termes d'interférence, rendant souvent l'interprétation de l'image difficile.

Les différentes RTFs de la classe de Cohen  $C(t, f)$  peuvent être obtenues à partir de la DWV, par convolution bidimensionnelle avec un noyau  $\phi(t, f)$  :

$$C_x(t, f; \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t', f') \phi(t-t', f-f') dt' df' \quad (2)$$

Ainsi, la statistique de détection qui consiste à effectuer une corrélation entre une RTF de la classe de Cohen associée à un noyau  $\phi$  et la signature d'un signal de référence  $r$  peut se ramener à la corrélation entre la DWV et la version lissée de la signature [3] :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \iint C_x(t, f; \phi) W_r(t, f) dt df \\ &= \iint W_x(t, f) C_r(t, f; \phi) dt df \end{aligned} \quad (3)$$

Cette dualité suppose un noyau  $\phi$  identique pour toute réalisation  $x$ . Elle ne s'applique donc pas aux représentations de la classe de Cohen pour lesquelles le noyau dépend du signal.

## 2.2 La méthode du noyau adaptatif

Cette RTF proposée par Baraniuk&Jones [4][9] utilise un noyau radialement gaussien, qui dépend des caractéristiques temps-fréquence du signal, et qui s'adapte au cours du temps. A chaque instant  $t$ , un noyau optimal  $\phi(t)$  est calculé à partir d'une fonction d'ambiguïté  $A(t)$  à court-terme. La portion de signal considéré est limitée à l'intervalle  $[t-L, t+L]$ . La RTF à chaque instant est déterminée à l'aide de la transformée bidimensionnelle de Fourier du noyau localement optimal multiplié par la fonction d'ambiguïté à court-terme.

Etant donnée la fonction d'ambiguïté  $A(r, \theta; t)$  en coordonnées polaires, le noyau optimal radialement gaussien  $\phi(r, \theta; t)$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{\phi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |A(r, \theta) \phi(r, \theta)|^2 r dr d\theta \quad (4)$$

avec les contraintes

$$\phi(r, \theta) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2(\theta)}\right) \text{ et } \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sigma^2(\theta) d\theta \leq \alpha \quad (5)$$

$\sigma(\theta)$  permet de contrôler la largeur de la fonction gaussienne et  $\alpha$  correspond au volume situé sous le noyau. La

représentation obtenue dépend de la durée  $L$  et du volume  $\alpha$ , généralement compris entre 1 et 5.

La recherche d'un noyau de forme adaptée au signal instantané permet de fournir un bon compromis entre la réduction des interférences et la concentration de la distribution. En revanche, si le signal possède plusieurs composantes à un même instant, le noyau favorise les composantes d'énergie élevée.

## 2.3 La méthode des surfaces

Cette RTF est basée sur le fait qu'en général les composantes signal de la DWV occupent des régions régulières et positives, contrairement aux interférences. Le principe consiste donc à sélectionner les composantes signal en éliminant les régions caractérisées par la présence d'énergie et de faible surface [5].

Dans une première étape, les pixels dont l'énergie est supérieure à une valeur  $\epsilon$  sont conservés et une valeur nulle est attribuée aux autres. Le seuil  $\epsilon$  est défini en pourcentage de la valeur maximale dans la distribution discrète de WV. Les pixels conservés, connexes entre eux, définissent des régions dans l'image. La seconde étape consiste à conserver toutes les régions de surface supérieure à un seuil  $S$ , proportionnel à la plus grande région.

Cette méthode a l'avantage de fournir une image dont la concentration est aussi bonne que celle obtenue avec la DWV. En revanche, elle ne permet pas d'éliminer les interférences connexes aux composantes signal.

## 2.4 La méthode de corrélation

Cette méthode consiste à considérer la DWV comme une image et à affecter chaque pixel soit à une composante d'interaction soit à une composante signal, selon un coefficient de corrélation [6].

Compte tenu du principe d'incertitude de Gabor, le produit durée-bande de tout signal est borné inférieurement. Dans le plan temps-fréquence, les signaux les plus concentrés possible correspondent à des signaux gaussiens. Les régions positives de l'image correspondant à des composantes d'interaction sont caractérisées par une concentration élevée et ne peuvent être assimilées à des fonctions gaussiennes. Il s'agit de déterminer s'il existe, pour chaque pixel, une bonne corrélation dans le plan temps-fréquence entre le contenu local du signal et un chirp gaussien (signal gaussien à modulation linéaire de fréquence).

Pour chaque point  $(n, k)$  un coefficient de corrélation  $cc(n, k)$  mesure la corrélation entre la RTF du contenu local du signal et celle d'un chirp gaussien. Le coefficient  $cc(n, k)$  est donné par :

$$cc(n, k) = \max_{(\sigma, f_0)} \frac{\sum_{n' k'} W_{xf}(n', k') W_{h(\sigma, f_0)}(n'-n, k'-k)}{\left( \sum_{n' k'} W_{xf}^2(n', k') \sum_{n' k'} W_{h(\sigma, f_0)}^2(n'-n, k'-k) \right)^{1/2}} \quad (6)$$

en considérant différents chirp gaussiens :

$$h(\sigma, f_0)(t) = e^{-t^2/\sigma^2 + \pi j f_0 t^2} \quad (7)$$

$W_{h(\sigma, f_0)}(n, k)$  est la DWV du signal gaussien  $h$ ,

$W_{xf}(n', k') = W_x(n', k') W_{h(\sigma, f_0)}(n' - n, k' - k)$  correspond à

une version filtrée de la DWV, permettant de limiter localement le contenu du signal  $x$ .

La RTF est obtenue en conservant les pixels de valeur positive et dont le coefficient de corrélation est supérieur à un seuil  $\gamma$  donné, généralement choisi entre 0,5 et 0,7. Il peut être envisagé d'asservir cette valeur pour satisfaire la conservation de l'énergie du signal.

La représentation est caractérisée par une bonne concentration dans le plan temps-fréquence. Contrairement à la méthode des surfaces, les interférences adjacentes aux composantes signal sont éliminées, puisque les pixels sont analysés indépendamment. Lorsque des interférences sont superposées au signal, le signal n'est généralement pas éliminé, mais le caractère oscillant des interférences demeure.

### 3 Méthode de classification

Le problème posé est un problème de classification, à deux classes. Afin de comparer les différentes méthodes et effectuer le moins possible de traitements a priori, la classification est effectuée directement sur les pixels de la RTF. Le détecteur choisi classiquement en temps-fréquence est de type filtrage adapté. Le vecteur de référence peut être construit à partir d'une base d'exemples par discrimination linéaire.

La fonction linéaire discriminante:

$$\begin{cases} h(X) = -V^T X - v_0 > 0 & \text{pour } X \in C_0 \\ h(X) = V^T X + v_0 > 0 & \text{pour } X \in C_1 \end{cases} \quad (8)$$

où  $X$  est le vecteur à classer, s'écrit sous la forme

$$h(Z) = W^T Z > 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z = [-1 \ -x_1 \ \dots \ -x_n] & \text{si } X \in C_0 \\ Z = [+1 \ x_1 \ \dots \ x_n] & \text{si } X \in C_1 \end{cases}$$

Le vecteur  $W$  est calculé par minimisation d'une erreur au sens des moindres carrés, qui prend en compte le nombre d'échantillons mal classés. L'erreur est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\text{sign}(W^T Z_j) - 1)^2 \quad (9)$$

L'algorithme utilisé est celui donné par Ho-Kashyap [10]. Il permet de calculer  $W$  par une méthode itérative.

## 4 Résultats

### 4.1 Présentation du problème de détection

Il s'agit de faire la distinction entre un complexe K (classe  $C_0$ ) et une onde delta (classe  $C_1$ ) dans l'EEG du sommeil. Les signaux relatifs à ces deux phénomènes sont en effet très similaires.

La base de signaux dont nous disposons est formée de 292 complexes-K et 314 ondes delta. Les signaux sont composés de 64 points et échantillonnés à la fréquence 32 Hz.

La figure 1 montre un exemple de représentation de complexe-K et d'onde delta avec la DWV et avec la méthode de corrélation.

Le but de l'étude étant de comparer les performances de différentes RTFs appliquées à la détection, il est important de pouvoir disposer de la meilleure résolution possible en temps et en fréquence. Cependant, la dimension de l'espace de représentation est limitée par le nombre de signaux dans la base. La méthode choisie a donc consisté à conserver la meilleure résolution temps-fréquence possible et à éliminer les zones de très faible énergie.

Les RTFs ont été calculées afin d'obtenir des images 64\*64. Ces images ont été décimées d'un facteur 2 en temps et en fréquence. Finalement, un masque, identique pour chacune des méthodes, a été appliqué pour limiter la dimension du vecteur  $X$ . Ce masque a été déterminé à partir des DWV moyennes  $Wm0$  et  $Wm1$  relatives à chacune des classes. Il englobe tous les points de  $Wm0$  et  $Wm1$  seuillées à 10% du maximum de  $(Wm0+Wm1)/2$  (figure 2).

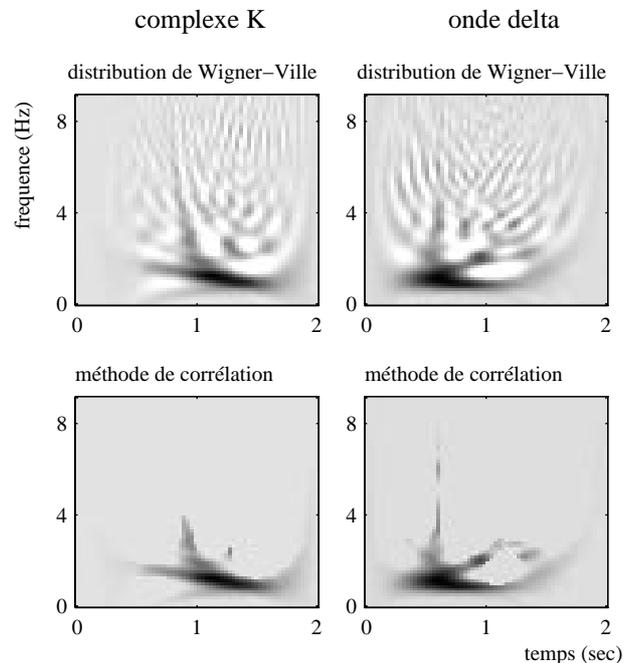


figure 1: exemple de complexe-K et d'onde delta

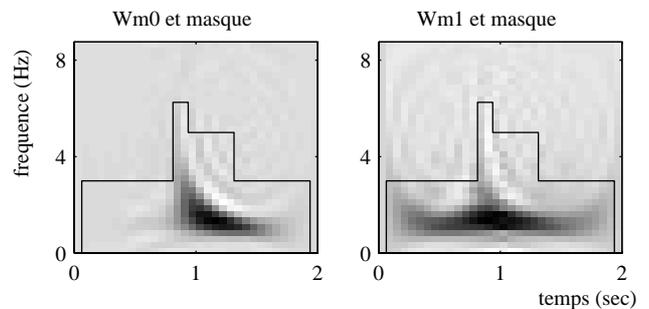


figure 2: DWV moyennes du complexe-K ( $Wm0$ ) et de l'onde delta ( $Wm1$ ), et délimitation de la zone des pixels considérés pour la classification

La dimension du vecteur obtenue est 434. Cette valeur est encore relativement importante par rapport à la dimension de la base d'exemples. L'algorithme du leave-one-out a été choisi pour estimer la probabilité d'erreur de classification. Il a la propriété d'être non-biaisé [11].

## 4.2 Résultats et discussion

Les valeurs des paramètres pour les différentes méthodes correspondent à des valeurs standard :

- noyau adaptatif :  $L = 8$  et  $\alpha = 3$
- méthode des surfaces :  $\varepsilon = 5\%$  et  $S = 20\%$
- méthode de corrélation :  $\gamma = 0,6$

Le tableau 1 regroupe les résultats de classification pour les quatre méthodes considérées, obtenus avec l'algorithme du leave-one-out. Dans le second tableau sont donnés la moyenne et la variance de la statistique de décision pour les deux classes, ainsi que l'indice de dispersion  $D$  (critère de Fisher [12]) pour mesurer le contraste obtenu :

$$D = \frac{(m_0 - m_1)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \quad (10)$$

	$P_{D1/C0} (\%)$	$P_{D0/C1} (\%)$
distribution de Wigner-Ville	8,6 %	8,6 %
méthode du noyau adaptatif	6,8 %	7,6 %
méthode des surfaces	6,5 %	7,0 %
méthode de corrélation	6,8 %	5,7 %

tableau 1 : résultats de classification

	$m_0$	$m_1$	$\sigma_0^2$	$\sigma_1^2$	$D$
DWV	2,3	-3,9	2,7	7,6	3,6
noyau	1,3	-2,2	0,8	2,5	3,6
surfaces	2,7	-3,9	3,4	7,0	4,2
corrélacion	2,8	-3,9	3,7	6,7	4,3

tableau 2 : moyenne et variance de la statistique de décision, et indice de dispersion

Les résultats de classification obtenus avec les trois RTFs correspondant à des filtrages adaptés au signal sont meilleurs que ceux obtenus avec la DWV. L'indice de dispersion montre que les méthodes liées au traitement d'image améliorent la séparabilité des classes. La méthode du noyau adaptatif effectue un lissage de la DWV. La variance de la valeur des pixels est alors plus faible que celle obtenue pour les autres méthodes, et la distribution de la statistique de décision différente.

L'utilisation de RTFs n'appartenant pas à la classe de Cohen peut donc apporter une amélioration en terme de détection, lorsque le signal est simplement connu à partir d'une base d'apprentissage.

## 5 Conclusion

Une étude comparative de différentes RTFs, utilisées dans le cadre de la classification de signaux non-stationnaires par corrélation entre une représentation de référence et la représentation des signaux à classer, a été effectuée. A l'intérieur de la classe de Cohen, cette statistique de décision peut toujours s'écrire à l'aide de la DWV. Les RTFs considérées dans ces travaux présentent l'originalité d'être déduites de la DWV par filtrage non-linéaire. L'étude expérimentale a porté sur la classification de complexes-K et d'ondes delta. Elle a montré que ces RTFs (méthode du noyau adaptatif, méthode des surfaces, méthode de corrélation) peuvent permettre d'améliorer conjointement la lisibilité des représentations et la classification des signaux.

Une autre approche pour la décision repose sur l'extraction d'attributs de l'image temps-fréquence. Dans ce cas, l'apport des représentations présentées ici reste à évaluer.

## 6 Références

- [1] P. Flandrin, *Temps-fréquence*. Paris, Hermès, 1993.
- [2] O. Lemoine, Détection de signaux non-stationnaires par représentation temps-fréquence, *Thèse de Doctorat*, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [3] P. Flandrin, "A time-frequency formulation of optimum detection," *IEEE Trans. on Acous., Speech, Signal Processing*, vol. 36 pp1377-1384, 1988.
- [4] D. L. Jones and R. G. Baraniuk, "An adaptive optimal-kernel time-frequency representation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2361-2371, 1995.
- [5] F. Auger and C. Doncarli, "Un algorithme d'élimination des termes d'interférences de la transformation de Wigner-Ville discrète," *GRETSI*, Juan-les-pins, 1989.
- [6] E. Grall-Maës, P. Beuseroy "Elimination of cross-components of the discrete Wigner-Ville distribution via a correlation method," *International Conference on Signal Processing*, Beijing, pp335-338, 1996.
- [7] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker, "The Wigner distribution - A tool for time-frequency signal analysis - Part I : Continuous-time signals," *Philips J. Res.*, vol. 35, pp. 217-250, 1980.
- [8] L. Cohen, "Time-frequency distributions - A review," *Proc. IEEE*, vol. 77, pp. 941-981, 1989.
- [9] R. G. Baraniuk and D. L. Jones, "A radially Gaussian, signal dependent time-frequency representation," *Signal Processing*, vol. 32, pp. 263-284, 1993.
- [10] Y.C. Ho and R.L. Kashyap, "An algorithm for linear inequalities and its applications," *IEEE Trans. Electronic Computers*, EC-14, pp. 683-688, 1965.
- [11] L. Devroye, L. Györfi and G. Lugosi, *A probabilistic theory of pattern recognition*. Springer-Verlag, 1991.
- [12] K. Fukunaga, *Introduction to statistical pattern recognition*. Academic Press, 1990.