Extension de l'algorithme de la fenêtre disquée à des formes convexes

Frédérique Robert, Michel Jourlin, Jean-Marie Becker

Laboratoire Image Signal et Acoustique, CNRS ep 0092
CPE Lyon
43, boulevard du 11 Novembre
69616 Villeurbanne cedex

ISEM Toulon
Place Georges Pompidou
83000 Toulon

RÉSUMÉ

L'algorithme de la fenêtre disquée permet de déterminer les caractéristiques (rayon et centre) du cercle circonscrit à tout ensemble compact du plan. Cet algorithme utilise des opérateurs de morphologie mathématique et est rappelé au début de cet article. Son extension à la recherche du plus petit homothétique d'un ensemble convexe donné contenant un ensemble compact est ensuite exposée, ainsi que quelques applications à la mise en oeuvre de paramètres de forme ou d'un algorithme de centrage mutuel d'une forme dans une autre.

ABSTRACT

The circumscribed disk algorithm giving the features of the circumscribed disk to any planar compact set, using mathematical morphology operators is recalled ; it is shown how it can be extended to the search of the minimal homothetic set of a convex shape including a given compact set. Some applications are described for pattern recognition and shape studies.

1 Introduction

L'algorithme de la fenêtre disquée (AFD) permet de déterminer le cercle circonscrit à tout objet plan X. On suppose que X est compact (fermé et borné), mais il n'est pas nécessairement connexe. Alexander [1] a suggéré une nouvelle manière d'obtenir le rayon du cercle circonscrit correspondant à une ensemble fini de points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, une description de l'algorithme de la fenêtre disquée a été donnée dans deux articles par M. Jourlin et B. Laget [3, 4]. Leur algorithme permet d'évaluer la position du centre et la valeur du rayon du cercle circonscrit à un ensemble compact et il peut être généralisé à la définition du plus petit homothétique d'un ensemble convexe donné contenant un ensemble compact [6]. Ensuite, il devient possible d'établir des familles de formes (en vue de leur classification) à partir de quelques ensembles convexes préalablement choisis, ceci permettant d'obtenir des paramètres de formes particuliers, définis en fonction de ces convexes.

2 Rappels sur l'algorithme de la fenêtre disquée

Le rayon R(X) et le centre a(X) du cercle circonscrit à un ensemble compact X sont définis par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} &R(X) = inf\left\{R > 0, B\left(O,R\right]\Theta Fr(X) \neq \varnothing\right\} \\ &a(X) \in B\left(O,R(X)\right]\Theta Fr(X) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Où $Fr(X)$ désigne la frontière de X et Θ la soustraction de Minkowski (érosion) et $B\left(O,R\right]$ la boule de centre O et de rayon R.

a(X) appartient donc à l'érodé ultime de $B\left(O,R_0\right]\Theta Fr(X)$ pour tout $R_0 \geq R(X)$. Il est donc suffisant de connaître une valeur R_0 supérieure à $R(X)$ pour déterminer $a(X)$ et en déduire la valeur de $R(X)$. Cette valeur initiale peut être choisie par exemple comme étant égale à la moitié de la longueur de la diagonale d'un rectangle englobant le compact. La relation suivante donne $R(X)$ en fonction de R_0 :

$$R(X) = R_0 - R_u \qquad (2.2)$$

Où R_u est donné par :

$$\left(B(O,R_0]\Theta Fr(X)\right)\Theta B(O,R_u) = B(O,R(X)] \qquad (2.3)$$

En d'autres termes, R_u est le nombre de pas d'érosions pour atteindre l'érodé ultime de $B(O,R_0]\Theta Fr(X)$. La figure 1 illustre cet ensemble.

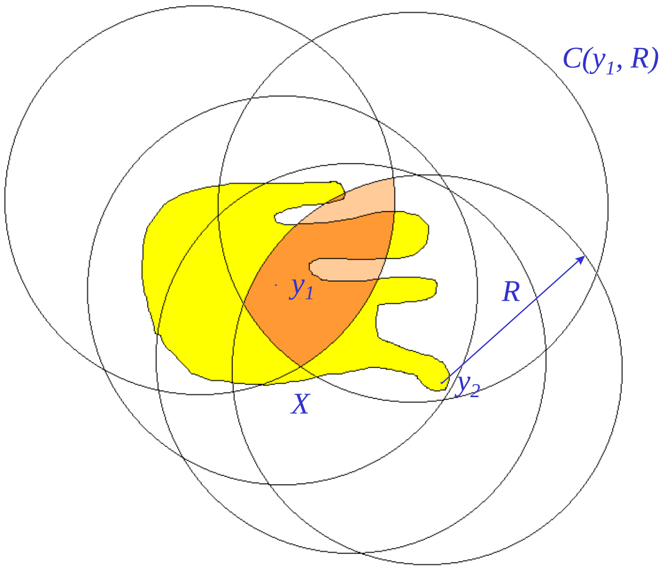

Fig. 2.1. $B(O,R]\Theta Fr(X)$ *avec* $R \geq R(X)$ *: intersection des disques centrés en chaque point de la frontière de X*

L'algorithme de la fenêtre disquée s'écrit comme suit :

Acquérir un ensemble compact X
Calculer son enveloppe convexe, EC(X)
Calculer l'ensemble des points extrémaux E(X) de EC(X)
Pour chaque point x de E(X)
Tracer le cercle de centre x et de rayon R_0
Remplir ce cercle en tenant compte de l'intersection des disques déjà tracés.
Supprimer tous les points n'appartenant pas à la nouvelle intersection
Calculer l'érodé ultime de l'intersection des disques

Cet algorithme pose le problème d'être très coûteux en temps. En effet, les opérations concernant la recherche de l'enveloppe convexe et de ses points extrémaux, mais aussi le remplissage des cercles nécessitent beaucoup de temps. Une optimisation de cet algorithme a pu être établie [5]. Elle propose d'utiliser uniquement un tracé de disques et de s'intéresser à l'ensemble complémentaire de l'union des cercles centrés en chaque point de *Fr(X)* et de rayon R_0. La relation fondamentale suivante a été établie dans cet article :

$$\left(\bigcup_{y \in Fr(X)} C(y,R]\right)^C = \begin{cases} \left(X \oplus C(O,R)\right)^C \cup \left(B(O,R]\Theta Fr(X)\right) & si\ R \geq R(X) \\ \left(X \oplus C(O,R)\right)^C \cup \left(X\Theta C(O,R)\right) & si\ 0 < R < R(X) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Où *C(O, R)* désigne le cercle de centre *O* et de rayon *R* et ⊕ l'addition de Minkowski (dilatation).

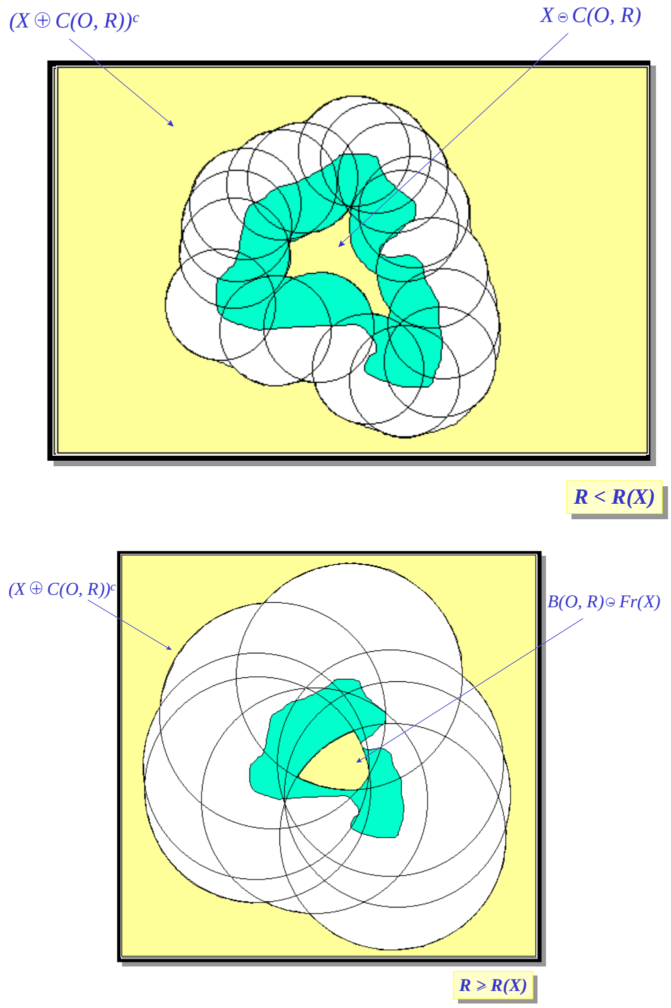

Fig. 2.2. Illustration de l'équation 2.4

De l'équation 2.4 se déduit un nouvel algorithme qui permet d'isoler $B(O,R]\Theta Fr(X)$ et donc de calculer les caractéristiques du cercle circonscrit à X [5]. La figure 2.3 montre une forme compacte et la figure 2.4 son disque circonscrit. En gris dans la forme compacte, on peut voir $B(O,R(X)]\Theta Fr(X)$, l'ensemble des centres possibles pour le cercle circonscrit.

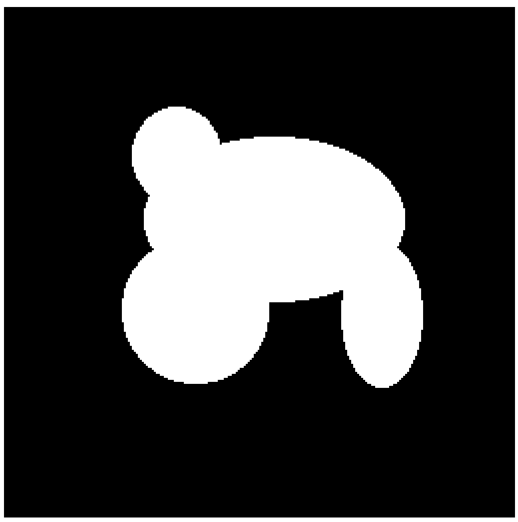

Fig. 2.3. Forme compacte

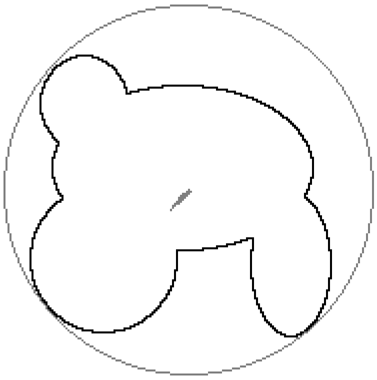

Fig. 2.4. Cercle circonscrit à une forme compacte

Résoudre le problème difficile de la recherche du cercle circonscrit à une forme quelconque a été ramené à résoudre le problème de l'obtention du cercle inscrit dans un ensemble convexe. Ceci se traduit par la recherche de l'érodé ultime dans notre algorithme. De plus, le temps de calcul a été grandement diminué (dans un rapport de 1 à 10) en se restreignant au tracé de cercles au lieu des disques et en s'abstenant de déterminer l'enveloppe convexe et ses points extrémaux.

3 Extension à la recherche du plus petit homothétique d'un convexe

L'algorithme précédent peut fonctionner pour la recherche du plus petit homothétique d'un ensemble convexe donné contenant un ensemble compact [6]. Le problème à résoudre consiste à définir les caractéristiques du convexe de manière à pouvoir faire le parallèle avec le cercle. Pour un cercle, nous étions amenés à déterminer son centre et son rayon. Dans le cas d'un ensemble convexe, il s'agit de définir un centre et un rapport d'homothétie permettant de réduire ce convexe à l'échelle recherchée.

Nous avons choisi comme centre du convexe, son centre de gravité. En effet, il s'agit de l'un des points caractéristiques de la forme mais il est également possible de choisir un point caractéristique au sens des coefficients de symétrie les plus connus (Besicovitch, Minkowski, Blaschke...) [2], c'est-à-dire un point le mieux centré dans un convexe. Pour le rapport d'homothétie, celui-ci sera défini de manière similaire au rayon du cercle, à partir du nombre de pas d'érosion nécessaire pour atteindre l'érodé ultime. De la même manière que pour un disque, une des conditions initiales consistera à vérifier que l'homothétique du convexe contient le compact (ce qui est équivalent à choisir un rayon au départ supérieur au rayon recherché). Ainsi, il s'agit de trouver l'érodé du convexe par la frontière du compact et d'en calculer l'érodé ultime pour trouver le "centre" du compact qui devra coïncider avec le centre de gravité du convexe, pour que celui-ci contienne le compact.

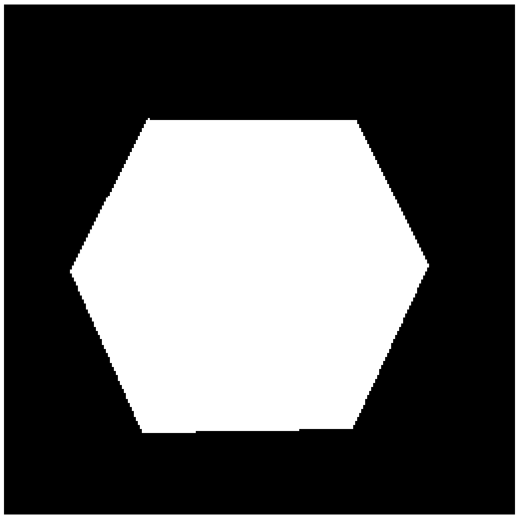

Fig. 3.1. Un ensemble convexe

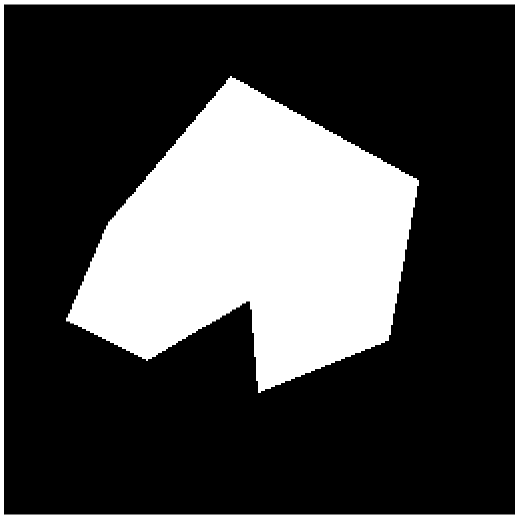

Fig. 3.2. Une forme polygonale compacte

Les figures 3.1 à 3.4 montrent les résultats obtenus grâce à l'algorithme suivant :

Acquérir un ensemble compact X
Acquérir un ensemble convexe A
Calculer g, centre de gravité de A
k = 1
Tant que $X \not\subset A_k$ *(à une translation près) faire*
    augmenter la valeur de k
Pour tout point x de Fr(X)
    Tracer $Fr(A_k)$
Isoler l'ensemble contenu B dans l'union des $Fr(A_k)$
Calculer l'érodé ultime de B

Où A_k désigne l'image de A dans l'homothétie de centre g et de rapport k.

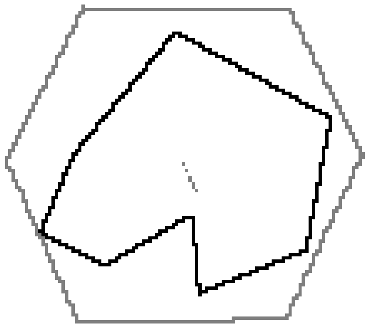

Fig. 3.3. Centrage du polygone dans le convexe

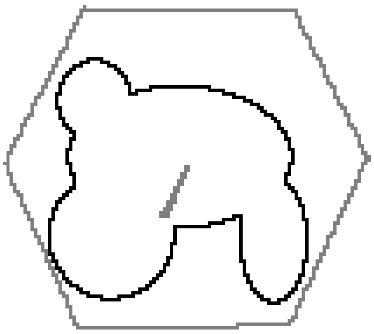

Fig. 3.4. Centrage de la forme compacte dans le convexe

Quelques petits problèmes subsistent quant à la mise en oeuvre d'un tel algorithme. En effet, il n'est pas évident de réaliser une homothétie de rapport quelconque dans un espace discret. C'est pourquoi, des erreurs d'arrondi peuvent apparaître et engendrer des défauts visibles au niveau des zones de contact entre le compact et l'homothétique du convexe.

4 Applications

Un tel algorithme peut déterminer le plus petit homothétique d'un convexe contenant un compact. Ainsi, un nouveau paramètre de forme permettant d'évaluer le degré de similitude entre le compact et le convexe peut être défini par le rapport de l'aire du compact sur l'aire de l'homothétique du convexe. Ceci permet donc de réaliser une classification des formes compactes relativement à un convexe donné. Il est alors possible d'en déduire des classes d'équivalence regroupant les formes donnant la même valeur pour un convexe donné.

Une seconde application est celle qui consiste à centrer mutuellement deux formes l'une à l'intérieur de l'autre. Grâce à l'algorithme précédent, il est possible de déterminer la position d'un compact qui convient le mieux pour qu'il soit centré dans un convexe donné.

5 Références

[1] Alexander R. *"The circumscribed disk and its relation to a theoretic of Krisbaum and Valentine"*, Math. Mag., n°3, 1984.

[2] Grünbaum B. *"Measures of symmetry for convex sets"*, Proc. Symp. Pure Math. (AMS), 7, 1963.

[3] Jourlin M., Laget B. "*New applications of classical geometry to pattern recognition"*, GRETSI, Biarritz, 1984 : 937-40.

[4] Jourlin M., Laget B. *"The circumscribed disk and its relation to Minkowski's substraction"*, Doctorat ès sciences Thesis, Université de Saint-Etienne, France, 1984.

[5] Robert F. , Jourlin M. *"Improvement and applications of the circumscribed disk algorithm"*, Q-MAT97 Proceedings, pp 457-464, Warsaw, Poland, April 1997.

[6] Serra J. *"Convexes circonscrits"* Note N897, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, France, june 1984.