

# Reconstruction en Tomographie d'Emission Mono-photonique avec Correction d'Atténuation par l'Algorithme du Résidu Minimal

Valérie La, Pierre Grangeat, Pascal Sire, Patrick Hugonnard

LETI (CEA - Technologies Avancées)  
DSYS/SCSI - CEA/G - 17 rue des Martyrs  
F 38054 Grenoble Cedex 9 - France

valerie.la@cea.fr, pierre.grangeat@cea.fr, pascal.sire@cea.fr, patrick.hugonnard@cea.fr

## RÉSUMÉ

Cet article décrit une méthode itérative de reconstruction d'image avec correction d'atténuation à partir de mesures de projections atténuées en Tomographie d'Émission Mono-Photonique. Cette méthode est basée sur l'application de l'algorithme du Résidu Minimal à la résolution d'un système linéaire quasi-symétrique. Comme le problème inverse est mal posé, des techniques de régularisation sont employées pour stabiliser la reconstruction. Nous présentons une méthode de régularisation spatialement adaptative. L'algorithme de reconstruction est mis en œuvre à la fois pour la géométrie parallèle et la géométrie conique. Les résultats expérimentaux obtenus sur des données simulées, sur des fantômes anatomiques et sur des données cliniques montrent que l'algorithme proposé est au moins deux fois plus rapide que l'algorithme standard du gradient conjugué préconditionné, et que la méthode de régularisation adaptative est bien adaptée.

## ABSTRACT

This paper describes an iterative attenuation compensation method for reconstructing images from attenuated projections in Single-Photon Emission Computed Tomography. This method is based on the application of the Minimal Residual algorithm to a quasi-symmetric linear system. As the inverse problem is ill-posed, some regularization techniques are used in order to stabilize the reconstruction process. We present a spatially adaptive regularization method. The reconstruction algorithm is implemented for both parallel-beam and cone-beam geometries. Experimental results obtained with numerical simulations, anatomic phantoms and clinical data show that the proposed algorithm is at least twice as fast as the standard preconditioned conjugate gradient algorithm, and that the spatially adaptive regularization method is valuable.

## 1 Introduction

Cet article présente une méthode itérative de correction d'atténuation permettant de reconstruire une image à partir de mesures de projections atténuées en Tomographie d'Émission Mono-Photonique (TEMP). Cette méthode repose sur l'algorithme du Résidu Minimal (RM) et suppose que la distribution d'atténuation de l'organe étudié est connue. Celle-ci est obtenue par reconstruction à partir de mesures de transmission.

Le principe de la TEMP est d'injecter un produit radioactif au patient, puis de mesurer les rayonnements gamma émis selon plusieurs incidences. Les photons émis sont atténués par les différents tissus traversés. Le but est de reconstruire la distribution d'activité émise en chaque point de l'organe en corrigeant ce phénomène d'atténuation. Cette correction est nécessaire pour améliorer la quantification de l'activité reconstruite.

Après quelques rappels théoriques sur les méthodes de reconstruction, nous décrirons le principe de la méthode de correction d'atténuation proposée, en insistant sur l'algorithme du RM et l'approche de régularisation adoptée. Puis, nous appliquerons cette méthode dans le cas d'une trajectoire d'acquisition semi-circulaire en géométrie parallèle, et dans le cas d'une trajectoire circulaire en géométrie conique.

## 2 Rappels théoriques

Le problème inverse en reconstruction tomographique consiste à restituer, à partir des mesures de projections  $m$ , l'objet  $f$  tel que :

$$X_{\mu} f = m \quad (1)$$

où  $X_{\mu}$  est l'opérateur de projection atténuée. En absence d'atténuation, on sait formuler un opérateur inverse exact en géométrie parallèle à partir de la formule d'inversion de la transformée de Radon bidimensionnelle. En géométrie conique, cela est également vrai si la trajectoire du point focal satisfait la condition de complétude qui spécifie que tout hyperplan intersectant l'objet à reconstruire doit couper en au moins un point la trajectoire ; sinon, par exemple si la trajectoire est circulaire, seuls des inverses approchés sont disponibles. Cependant, en présence d'atténuation, il n'existe pas de formule d'inversion exacte dans le cas général d'une distribution d'atténuation non uniforme. Ceci conduit à reconstruire  $f$  en résolvant le système linéaire correspondant à l'équation (1). Ce système est résolu par des techniques itératives, que l'on peut classer en deux grandes familles. La première famille regroupe les méthodes Iterative Filtered BackProjection (IFBP), qui corrigent itérativement l'image obtenue par une méthode analytique de reconstruction n'effectuant pas ou que de manière approchée une compensation de l'atténuation. La seconde famille de méthodes itératives concerne les méthodes algébriques dont le

principe est de maximiser la vraisemblance  $P(m|f)$ . Lorsque celle-ci est supposée gaussienne, cela revient à minimiser l'erreur quadratique  $\|m - X_\mu f\|^2$ , ou à résoudre les équations normales :

$$X_\mu^t X_\mu f = X_\mu^t m. \quad (2)$$

Un algorithme de minimisation très employé est celui du Gradient Conjugué (GC). Cependant, sa vitesse de convergence est relativement faible. Elle peut être améliorée en préconditionnant le système normal (2) par un opérateur  $P$  approchant l'inverse de  $X_\mu^t X_\mu$ . Une autre méthode de préconditionnement est de choisir un opérateur  $P$  approchant l'inverse de  $X_\mu$ , ce qui aboutit au système préconditionné suivant :

$$PX_\mu f = Pm. \quad (3)$$

Le produit  $PX_\mu$  est alors proche de l'identité, à un facteur de normalisation près, lié notamment à l'atténuation moyenne dans la région étudiée. Une expression possible pour  $P$  est l'inverse exact, quand il existe, ou un inverse approché de l'opérateur de projection non atténuée  $X$ . Plus le conditionnement de  $PX_\mu$  est proche de 1, plus la vitesse de convergence est rapide.

En pratique, du fait du caractère mal posé du problème inverse, la solution  $f$  obtenue est très bruitée. Pour éviter l'amplification du bruit, on fait appel à une technique de lissage, qui consiste à convoluer les mesures  $m$  par un filtre passe-bas  $W$  avant de reconstruire. Le système (3) devient donc :

$$PX_\mu f = PWM. \quad (4)$$

(4) est classiquement résolu par le GC.  $PX_\mu$  n'étant pas symétrique, on résout en fait les équations normales :

$$X_\mu^t P^t PX_\mu f = X_\mu^t P^t PWM. \quad (5)$$

### 3 Méthode proposée

Notre objectif est de développer une méthode de reconstruction itérative rapide, stable, et spatialement adaptative, tout en restant dans le contexte des approches linéaires afin d'assurer une bonne quantification. L'accélération des calculs nous a conduit à sélectionner l'algorithme du RM appliqué à un système préconditionné. Pour améliorer la stabilité sans passer par des équations normales d'optimisation, nous avons été amenés à développer une approche spécifique de régularisation par contrainte spatialement adaptative sur l'objet. Nous détaillons ces deux aspects ici. Notons que la déconvolution de la réponse impulsionnelle du collimateur placé devant la gamma caméra, qui introduit un flou dans les images, peut être réalisée en incluant le filtre de déconvolution dans l'opérateur  $W$  de prétraitement des mesures [4].

#### 3.1 L'algorithme du RM

L'objectif poursuivi est d'améliorer la vitesse de convergence des méthodes de reconstruction standard. Nous avons vu précédemment que l'application du GC au système (4) nécessitait le passage aux équations normales (5). Cette symétrisation élève le conditionnement de la matrice au carré et dégrade

ainsi la vitesse de convergence de l'algorithme. L'idée est alors de résoudre (4) directement, sans passer par les équations normales. Cela est possible en faisant appel à l'algorithme du RM. Cet algorithme de type "résidu conjugué" permet de résoudre un système quasi-symétrique en s'affranchissant de la symétrisation [1]. Notons un tel système par l'équation :

$$Ax = b$$

où  $A$  est une matrice quasi-symétrique, i.e. une matrice symétrique définie positive perturbée par une petite matrice anti-symétrique. La vitesse de convergence est alors proportionnelle à  $\sqrt{K(A)}$  au lieu de  $K(A)$  dans le cas du GC, où  $K(A)$  est le conditionnement de  $A$ . Dans l'algorithme du RM, la mise à jour des directions de descente est réalisée par rapport aux résidus  $r_k = b - Ax_k$ , alors que dans le GC elle est effectuée par rapport aux gradients  $g_k = A^t(Ax_k - b)$ . Cette différence explique le fait que le RM converge plus rapidement que le GC. De plus, deux résidus successifs sont conjugués par rapport à  $A$  dans le RM, alors qu'ils le sont par rapport à  $AA^t$  dans le GC. L'algorithme du RM se déroule comme suit :

$$\begin{aligned} x_0, r_0 &= b - Ax_0, d_0 = r_0, q_0 = Ad_0 \\ \alpha_k &= \frac{r_k^t q_k}{q_k^t q_k} \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_k q_k \\ \beta_{k+1} &= -\frac{(Ar_{k+1})^t q_k}{q_k^t q_k} \\ d_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k \\ q_{k+1} &= Ar_{k+1} + \beta_{k+1} q_k \end{aligned}$$

Par rapport au GC, seul un vecteur supplémentaire est à stocker, le vecteur  $q$ . A chaque itération, la matrice  $A$  n'intervient que dans un produit matrice-vecteur.

L'application du RM à la résolution de (4) suppose que la matrice  $PX_\mu$  est quasi-symétrique, hypothèse que l'on peut faire puisque  $PX_\mu$  est proche de l'identité, à un facteur de normalisation près.

#### 3.2 Régularisation

La méthode décrite ci-dessus est instable car la mise en œuvre discrète impose des approximations numériques. Les images reconstruites montrent des artefacts de bruit numérique, qui sont amplifiés à chaque itération. Afin de stabiliser la reconstruction, nous avons élaboré une méthode de régularisation de l'objet pour un problème quasi-symétrique, inspirée de celle de Tikhonov.

L'idée est d'imposer des contraintes de "douceur" sur l'objet. Pour un problème symétrique, une méthode de régularisation standard est celle de Tikhonov, qui consiste à ajouter au critère initial un terme de contraintes spatiales sur l'objet. A ce critère quadratique pénalisé, les équations normales associent un système linéaire régularisé. Une telle démarche n'est plus applicable pour un problème asymétrique sans passer par les équations normales. Pour les éviter, l'idée est alors de négliger la partie anti-symétrique de la matrice en profitant de sa nature quasi-symétrique. Ceci nous conduit à faire l'approximation suivante :

$$PX_\mu \simeq Q^t Q \quad (6)$$

où  $Q^t Q$  est la factorisation de Cholesky pour les matrices symétriques définies positives. Notons  $b$  le terme  $PWm$ . Alors l'équation (4) devient :

$$Q^t Q f = b.$$

Résoudre ce système est équivalent à minimiser l'erreur  $\|Qf - (Q^t)^{-1}b\|^2$ , critère que l'on peut pénaliser en adoptant une approche de Tikhonov :

$$\chi^2(f) = \|Qf - (Q^t)^{-1}b\|^2 + \lambda \|Cf\|^2$$

où  $C$  est un opérateur de différentiation et  $\lambda$  un paramètre de régularisation, choisi empiriquement. Annuler le gradient de  $\chi^2(f)$  revient à résoudre le système :

$$(Q^t Q + \lambda C^t C) f = b.$$

En utilisant l'approximation (6), on obtient le système suivant :

$$(P X_\mu + \lambda C^t C) f = PWm.$$

Cette méthode de régularisation est rendue spatialement adaptative afin de préserver un fort contraste dans les régions d'intérêt de l'image, tout en lissant les artéfacts de bruit dans le fond de l'image. L'adaptativité est réalisée en faisant dépendre  $\lambda$  de la région dans l'image : on choisit une valeur faible pour les régions d'intérêt et une valeur élevée pour le fond. Les différentes zones de l'image sont définies par une segmentation de la première image reconstruite au cours du processus itératif, égale au terme  $PWm$ . Dans le cas de l'imagerie cardiaque, nous avons développé une méthode de segmentation simple reposant sur des opérations de seuillage, d'analyse de connexité et d'ajustement d'un ellipsoïde [3].

## 4 Mise en œuvre

La méthode de reconstruction proposée est générale : elle est indépendante de la géométrie d'acquisition. Par contre, sa mise en œuvre est différente selon que l'on considère la géométrie parallèle ou la géométrie conique. En effet, l'expression de l'opérateur de préconditionnement  $P$  doit être choisie en conséquence. On se réfère au cas non atténué pour la recherche d'un tel opérateur. Nous nous plaçons dans le cas d'une trajectoire d'acquisition circulaire.

### 4.1 Application à la géométrie parallèle

En géométrie parallèle, il existe un inverse exact de l'opérateur de projection non atténué  $X$ , qui est l'opérateur de filtrage-rétroprojection :

$$X^{-1} = R^t H D$$

où  $R^t$  est l'opérateur de rétroprojection parallèle non atténué et  $H D$  est le filtre rampe de fonction de transfert  $|v|$  [3]. Cela constitue donc un inverse approché de l'opérateur de projection atténué  $X_\mu$  et peut donc être pris comme opérateur de préconditionnement  $P$ . Le système à résoudre est :

$$(R^t H D R_\mu + \lambda C^t C) f = R^t H D m \quad (7)$$

où  $R_\mu$  est l'opérateur de projection parallèle atténué.

Nous montrons ici quelques résultats obtenus en imagerie cardiaque [3]. L'objet est de taille  $84 \times 84 \times 64$ , avec un pas d'échantillonnage de 6.8mm dans chaque direction. Il y a 64

projections de taille  $64^2$ , équiréparties sur  $180^\circ$ . L'acquisition est faite avec le couple d'isotopes de transmission/émission Cobalt/Thallium. Les figures 1, 2 et 3 représentent une coupe transverse du fantôme reconstruit respectivement sans correction d'atténuation, après 10 itérations du RM et 20 itérations du GC préconditionné (GCP). Dans ce dernier cas, le système résolu est le suivant :

$$(R_\mu^t H D R_\mu + \lambda C^t C) f = R_\mu^t H D m$$

où  $R_\mu^t$  est l'opérateur de rétroprojection parallèle atténué. En effet, le produit  $P^t P$  dans l'équation (5) se simplifie en une opération de filtrage uni-dimensionnel  $H D$ . Par rapport au RM (7), la différence réside dans l'opérateur de rétroprojection. L'estimé initial  $f_0$  de l'objet est pris égal à 0 pour le RM et à l'image reconstruite par filtrage-rétroprojection pour le GCP.

Ces résultats montrent l'apport de la correction d'atténuation en termes d'uniformité de l'activité reconstruite et de forme des structures. De plus, on observe qu'il faut environ 10 itérations pour atteindre la convergence dans le cas du RM contre 20 dans le cas du GCP. Le facteur d'accélération est encore plus élevé dans le cas de données simulées [3].

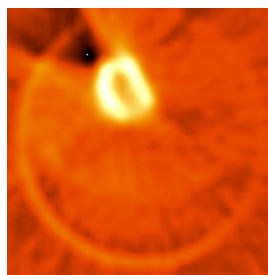


Fig.1 sans correction

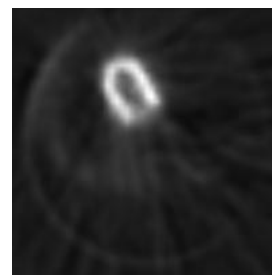


Fig.2 RM 10 itérations



Fig.3 GCP 20 itérations

### 4.2 Application à la géométrie conique

En géométrie conique,  $X$  n'a pas d'inverse exact mais seulement des inverses approchés. Ceux-ci proviennent en général d'une approche de reconstruction qui est soit directe, soit indirecte via le domaine de Radon [2]. Nous utilisons comme expressions pour  $P$  les formules d'inversion de Feldkamp et de Grangeat, qui correspondent à chacune des deux approches respectivement. La différence entre ces deux méthodes de reconstruction concerne la zone d'ombre du domaine de Radon. Celle-ci peut être comblée par interpolation dans l'approche indirecte, ce qui permet une réduction des artéfacts qui lui sont liés.

L'évaluation de la méthode de reconstruction a été réalisée sur des données simulées dans le cas d'une trajectoire circulaire sur  $360^\circ$ . Nous présentons ici un fantôme de cœur, de taille  $128^3$ , acquis sur 128 points de vue avec un détecteur de taille  $128^2$ . Le pas d'échantillonnage sur l'objet est de 6.8mm dans chaque direction. Les figures 4,5,6 montrent respectivement l'objet idéal, l'image reconstruite sans correction d'atténuation, et celle reconstruite après 10 itérations du RM. Le préconditionnement utilisé est celui par la formule d'inversion de Feldkamp. Pour ce jeu de données, la zone d'ombre est très restreinte et par conséquent, le préconditionnement choisi suffit. Par contre, quand la taille de la zone d'ombre n'est pas négligeable, le préconditionnement par la formule de Grangeat est préférable car il permet de réduire les artefacts de reconstruction liés à la zone d'ombre. Le RM est initialisé avec une image nulle. Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites sur l'apport de la correction d'atténuation. La figure 7 montre des profils normalisés à travers les deux branches du cœur pour les différentes images : le trait plein correspond au profil idéal, le trait pointillé au profil de la reconstruction avec le RM, et le trait grisé au profil non corrigé en atténuation. On constate que la correction d'atténuation permet de restaurer l'uniformité entre les deux branches.



Fig.4 objet idéal

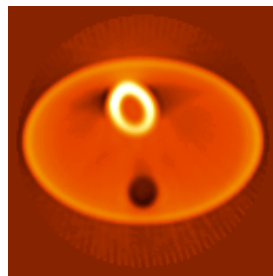


Fig.5 sans correction

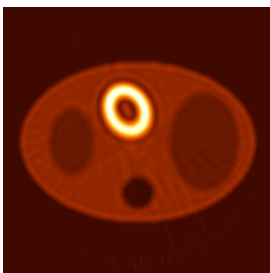


Fig.6 RM 10 itérations

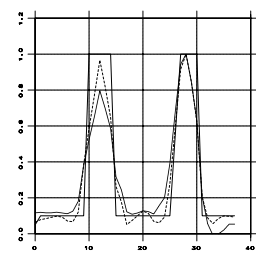


Fig.7 profils normalisés

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode itérative de reconstruction avec correction d'atténuation en imagerie TEMP. Nous avons montré qu'en géométrie parallèle, le RM converge typiquement en 10 itérations, alors que le GC préconditionné nécessite au moins 20 itérations. En géométrie conique, la convergence du RM est aussi obtenue après environ 10 à 15 itérations. L'algorithme a été stabilisé par une méthode de régularisation spatialement adaptative, permettant la préservation d'un fort contraste dans la région d'intérêt tout en lissant les artefacts de bruit dans le fond. Par conséquent, l'algorithme proposé est rapide et régularisé. Toutefois, sa robustesse est dépendante de la procédure de segmentation mise

en œuvre dans la régularisation spatiale. Par ailleurs, le processus de minimisation est arrêté lorsque les hypothèses de quasi-symétrie sont mises à défaut.

Notons que cette approche est généralisable à des trajectoires plus complexes en géométrie conique, comme la trajectoire hélicoïdale.

## Références

- [1] O. Axelsson, "Conjugate Gradient Type Methods for Unsymmetric and Inconsistent Systems of Linear Equations", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 29, 1-16, 1980.
- [2] P. Grangeat, P. Sire, R. Guillemaud, V. La, "Indirect Cone-Beam Three-Dimensional Image Reconstruction" in C. Roux, J.L. Coatrieux Eds, *Contemporary Perspectives in Three-Dimensional Biomedical Imaging*, Studies in health technology and informatics, Vol. 30, IOS Press, pp. 29-52, 1997.
- [3] V. La, P. Grangeat, S. Iovleff, A. Mallon, P. Sire, "The Use of the Least-Squares Minimal Residual Algorithm for Fast and Regularized Attenuation Compensation in SPECT", *IEEE 1996 Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, Anaheim, Californie, USA, 2-9 Nov, 1996.
- [4] P. Sire, P. Grangeat, S. Iovleff, V. La, A. Mallon, "Evaluation of Two Conjugate Gradient Based Algorithms for Quantitation in Cardiac SPECT Imaging", *IEEE 1996 Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, Anaheim, California USA, Nov 2-9, 1996.