

# Synthèse Précise d'Images Fractales

Rachid JENNANE\*, Rachid HARBA \*, Gérard JACQUET\*\*

\*ESPEO, Université d'Orléans BP 6744 45067 Orléans Cedex 2 FRANCE

\*\*LTSI, Université de Saint Etienne, 23 rue Paul Michelon 42023 Saint Etienne Cedex 2 FRANCE

Tél : +33 02 38 49 45 38, Fax : +33 02 38 41 72 45, e-mail : jennane@lesi.univ-orleans.fr

## RÉSUMÉ

Cette communication a pour but de présenter des méthodes de synthèse d'images fractales de type mouvement brownien fractionnaire. Ce travail est centré sur l'extension en 2D de deux méthodes précises dans le cas 1D. La première est basée sur une décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments et la deuxième sur la fonction de Weierstrass-Mandelbrot. Leur qualité est évaluée par trois tests statistiques de conformité au modèle du mouvement brownien fractionnaire. Seule l'extension de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot est précise pour les valeurs de H testées.

## 1 Introduction

Dans de nombreux domaines, des signaux de type "signaux en 1/f" ou "signaux fractals" peuvent être représentés par le modèle du mouvement brownien fractionnaire [1] (FBM pour fractional Brownian motion). Le paramètre H ( $0 < H < 1$ ) contrôle alors ce qu'il est convenu d'appeler la rugosité du signal : plus H est proche de 0, plus le signal est agité, plus H est proche de 1 plus le signal est lisse [2].

La synthèse de tels processus permet de mettre en évidence ce comportement. Il existe de nombreuses méthodes de synthèse. Dans un travail récent [3], nous avons testé 5 méthodes dans le cas unidimensionnel (1D) : la méthode du "midpoint displacement", la synthèse par transformée de Fourier rapide inverse, la génération par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments du processus, la synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot et enfin une synthèse par ondelettes. Seules deux méthodes étaient précises : la méthode basée sur la décomposition de Cholesky (CHO) et celle utilisant la fonction de Weierstrass-Mandelbrot (WMA). Ceci résulte de 3 tests statistiques qui permettent d'évaluer la conformité au modèle FBM. Le premier consiste à vérifier que le processus aléatoire synthétisé est gaussien, le deuxième est un test de stationnarité des incréments du processus et le dernier permet de vérifier que ces mêmes incréments sont statistiquement similaires.

Pour étudier les phénomènes fractals bidimensionnels (2D) tels que certaines surfaces ou textures, la synthèse précise de FBM en deux dimensions (FBM2D) est une première étape nécessaire. Il est clair que seules les

## ABSTRACT

In this communication we present methods to generate fractal images. This work treats the extension to the 2D case of 1D precise methods. The first one is based on the Cholesky decomposition of the covariance matrix of the process increments and the second one on the Weierstrass-Mandelbrot function. Three statistical tests allow to assess the validity of the fractional Brownian motion model. Only the extension of the Weierstrass-Mandelbrot function gives proper results.

méthodes de synthèse précises en 1D pourront être candidates pour réaliser une synthèse de qualité dans le cas 2D.

Dans cette communication, nous proposons d'étendre au cas 2D les deux méthodes de synthèse de signaux fractals statistiques qui ont été validées en 1D : CHO et WMA. Les tests statistiques utilisés dans le cas 1D seront utilisés pour vérifier l'adéquation entre les données obtenues et le modèle FBM.

Le plan de cette communication est le suivant : dans la section 2, nous présentons les 2 méthodes de synthèse bidimensionnelles proposées. La section 3 est consacrée à l'évaluation des méthodes de synthèse et aux résultats obtenus. Une conclusion termine cette étude.

## 2 Synthèse d'images fractales

### 2.1 Synthèse CHO

Dans le cas 1D, cette méthode [4] consiste à générer en premier lieu les incréments du processus (FGN pour fractionnal Gaussian noise) assimilables à une dérivée et définis comme :

$$FGN_m[i] = FBM[i + m] - FBM[i], \quad (2.1)$$

où m correspond à un intervalle de temps et i à un indice temporel discret.

Les processus FGN définis par (2.1) sont des processus stationnaires, centrés et statistiquement similaires. Pour  $m = 1$ , la fonction d'autocorrélation du FGN peut s'écrire :

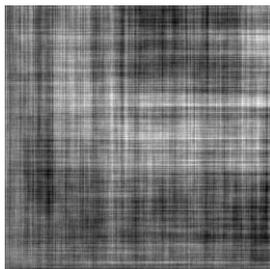
$$r_{FGN_1}(k) = \frac{\sigma_1^2}{2} (|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}) \quad (2.2)$$

où  $\sigma_1^2$  représente la variance de  $FGN_1$ .

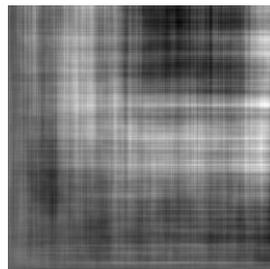
La matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}$  de FGN dépend donc de  $H$ . Elle est de Toeplitz et peut être décomposée comme  $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ .  $\mathbf{L}$  est une matrice triangulaire inférieure.

Soit  $\mathbf{Y}$  un processus gaussien de taille  $N$ , centré et blanc. Le produit  $\mathbf{L}\mathbf{Y}$  génère un processus FGN. Par incrémentation suivant (2.1), on obtient une trace FBM1D.

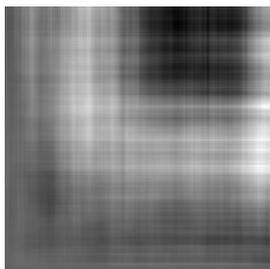
Pour synthétiser une image fractale isotrope basée sur cette méthode, nous supposons que le processus de synthèse est une transformation à noyau séparable. Si  $\mathbf{Q}$  est une matrice  $N \times N$  composée d'échantillons gaussiens, centrés et indépendants, le produit matriciel  $\mathbf{Q}\mathbf{L}$  génère une matrice dont chaque ligne est un signal type FGN. Par contre, chaque vecteur colonne est composé d'échantillons gaussiens mutuellement indépendants. On peut alors appliquer cette même transformation sur les colonnes et l'opération finale s'écrit  $\mathbf{L}\mathbf{Q}\mathbf{L}$ . La matrice résultat a des lignes et des colonnes type FGN1D. Par incrémentation en ligne puis colonne suivant (2.1), on obtient un FBM2D. Les 4 images suivantes montrent une réalisation d'un tel processus pour  $H = 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.8$ .



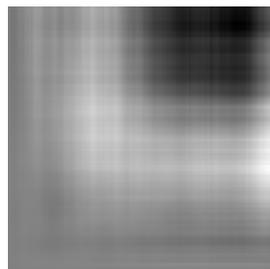
$H = 0.2$



$H = 0.4$



$H = 0.6$



$H = 0.8$

On remarque sur ces images un effet de tissage dû à l'incrémentation en lignes et en colonnes.

## 2.2 Synthèse WMA

Des travaux sur l'extension de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot unidimensionnelle au cas 2D ont déjà été réalisés dans [5]. Ici, nous proposons une approche type traitement du signal. Avant de détailler notre méthode, un bref rappel du cas 1D permet de positionner le problème.

La fonction complexe de Weierstrass-Mandelbrot  $W(t)$  s'écrit dans le cas 1D de la manière suivante [6] :

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{i 2\pi b^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{Hn}}. \quad (2.3)$$

$b$  est un réel strictement positif différent de 1,  $\varphi_n$  une phase aléatoire prise dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ .

Cette fonction est la somme d'exponentielles complexes aux fréquences positives  $b^n$  qui forment une progression géométrique de raison  $b$ . Leur amplitude suit une loi en puissance dépendant de  $H$ . On peut montrer que les incréments sont stationnaires et similaires [5]. En pratique, on prend la partie réelle de  $W(t)$  :

$$\text{Re}[W(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \varphi_n - \cos(2\pi b^n t + \varphi_n)}{b^{Hn}}. \quad (2.4)$$

En adoptant un point de vue synthèse fréquentielle,  $W(t)$  a de fortes similitudes avec une synthèse par transformée de Fourier inverse où seules les fréquences positives seraient considérées. La symétrie hermitique pour un signal réel permet de construire le signal analytique  $A(t)$  :

$$A(t) = \int_0^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df. \quad (2.5)$$

$X(f)$  est la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  dont l'amplitude pour un fractal suit une loi en  $|f|^{-H-0.5}$ . La différence entre  $W(t)$  et  $A(t)$  tient au fait que les fréquences ne sont pas réparties de la même manière dans les deux cas.

Ce point de vue particulier permet de proposer une extension en 2D de la fonction de Weierstrass-Mandelbrot. En effet, la double symétrie hermitique :  $A2D(f_1, f_2) = A2D^*(-f_1, -f_2)$  et  $A2D(-f_1, f_2) = A2D^*(f_1, -f_2)$  assure qu'une image de type FBM isotrope peut être obtenue par une double intégration sur 2 quarts de plan :

$$A2D(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(f_1, f_2) e^{i 2\pi (f_1 x + f_2 y)} df_1 df_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(-f_1, f_2) e^{i 2\pi (-f_1 x + f_2 y)} df_1 df_2. \quad (2.6)$$

$X(f_1, f_2)$  est la transformée de Fourier 2D de  $x(t_1, t_2)$  qui, pour une image fractale, suit une loi qui dépend de  $f_1$  et  $f_2$  comme  $|f_1^2 + f_2^2|^{-H/2-0.5}$ . Par conséquent, la fonction de Weierstrass-Mandelbrot que nous proposons en 2D est la suivante :

$$W2D(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b^{\frac{n+m}{2}} \left[ (1 - e^{i 2\pi (b^n x + b^m y)}) e^{i\varphi_{n,m}^1} + (1 - e^{i 2\pi (-b^n x + b^m y)}) e^{i\varphi_{n,m}^2} \right]}{\left[ b^{2n} + b^{2m} \right]^{\frac{H+1}{2}}} \quad (2.7)$$

$\varphi_{n,m}^1$  et  $\varphi_{n,m}^2$  sont des phases aléatoires indépendantes prises dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ . On peut montrer que cette fonction a des incréments stationnaires et similaires [7]. Des

images réelles sont alors obtenues en ne gardant que la partie réelle de cette matrice :

$$\begin{aligned} \text{Re}[W2D(x,y)] = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b^{\frac{n+m}{2}} \frac{[\cos \varphi_{n,m}^1 + \cos \varphi_{n,m}^2]}{[b^{2n} + b^{2m}]^{\frac{H+1}{2}}} - \\ & b^{\frac{n+m}{2}} \frac{[\cos(2\pi b^n x + 2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^1) + \cos(-2\pi b^n x + 2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^2)]}{[b^{2n} + b^{2m}]^{\frac{H+1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour réaliser la synthèse d'images FBM, (2.8) doit être calculée pour chaque point  $(x, y)$  de l'image, la somme est tronquée à une valeur maximale de  $n$  et de  $m$  en fonction de la précision désirée.

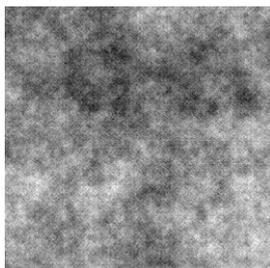
L'implémentation de cette expression se fait à l'aide de 4 boucles imbriquées. Deux d'entre elles représentent la taille de l'image soit  $N \times N$  et les deux autres représentent le nombre de termes de la boucle soit  $L \times L$ . La complexité de l'algorithme est donc de l'ordre de  $N^2 L^2$  ce qui est énorme.

Nous proposons une implémentation qui permet de réduire cette complexité. Tout d'abord, nous ne prenons pas en compte les termes constants c'est-à-dire ceux indépendants de  $x$  et de  $y$ . Les autres termes peuvent être décomposés à l'aide du développement de  $\cos(a + b)$  pour obtenir :

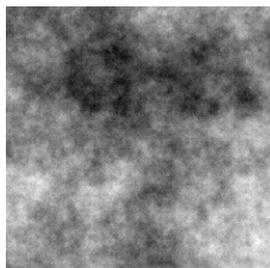
$$\begin{aligned} \text{Re}[W2D(x,y)] = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(b^n x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b^{\frac{n+m}{2}} [\cos(2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^1) + \cos(2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^2)]}{[b^{2n} + b^{2m}]^{\frac{H+1}{2}}} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(b^n x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b^{\frac{n+m}{2}} [\sin(2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^1) + \sin(2\pi b^m y + \varphi_{n,m}^2)]}{[b^{2n} + b^{2m}]^{\frac{H+1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ceci permet de faire le calcul avec 3 boucles imbriquées de sorte que la complexité de l'algorithme est maintenant de l'ordre de  $NL(N+L)$ .

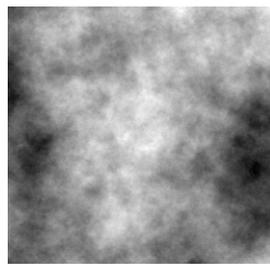
Les 4 images suivantes illustrent cette méthode pour  $H = 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.8$ .



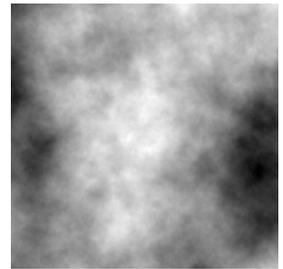
H = 0.2



H = 0.4



H = 0.6



H = 0.8

Ces images varient avec  $H$ , plus  $H$  est grand, plus la texture obtenue est lisse.

### 3 Evaluation de la qualité des images

Pour évaluer l'adéquation entre des données réelles et le modèle FBM, nous avons mis au point une méthode spécifique. Nous allons brièvement décrire cette technique. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus pour les images générées.

#### 3.1 Méthode

Parmi les nombreuses propriétés du FBM définies dans [1][3], seules 3 conditions sont nécessaires et suffisantes (CNS) pour qu'un processus  $X(t)$  soit de type FBM : si  $X(t)$  est un processus aléatoire gaussien ayant des incréments stationnaires et similaires, alors c'est un mouvement brownien fractionnaire.

A partir de ces 3 CNS, l'étude de la validité du modèle FBM pour un processus aléatoire  $X(t)$  peut être faite à l'aide de 3 tests d'hypothèse à un niveau de signification  $\alpha$  donné :

- i) un test de normalité réalisé sur le processus par un test du chi-deux [8]
- ii) un test de stationnarité des incréments du processus réalisé par le run test [8],
- iii) un test de similarité des incréments du processus réalisé par un test du chi-deux adapté [3]. Ce test consiste à comparer les densités de probabilités des incréments obtenus pour différents intervalles.

Afin de respecter les contraintes d'indépendance, seules les statistiques ensemblistes sont considérées. Ainsi, les 3 tests d'hypothèse sont appliqués sur  $R$  réalisations indépendantes et discrétisées de longueur  $N$ .

En toute rigueur, pour vérifier l'adéquation entre nos images et le modèle FBM, il faudrait vérifier les propriétés du modèle FBM bidimensionnel. Ces tests étant fastidieux à mettre en place, nous proposons de vérifier la correspondance entre les lignes d'images et le modèle FBM1D en utilisant les tests décrits ci-dessus. Pour ce faire, nous rappelons que la coupe par un plan vertical d'un FBM2D est un FBM1D de même paramètre  $H$  [9]. Nous considérons donc  $n$  directions de la grille d'échantillonnage dans l'intervalle  $[0^\circ ; 180^\circ]$ . Ces directions sont choisies de manière à ce que les points considérés de la grille d'échantillonnage soient alignés.

### 3.2 Résultats

Pour assurer l'indépendance des réalisations, on génère 100 images de taille 512x512 ayant le même paramètre H. Sur chacune de ces 100 images, nous prélevons un signal de 250 échantillons dans chacune des n directions. L'opération est répétée pour H prenant les valeurs 0.2, 0.4, 0.6 et 0.8.

Pour la synthèse WMA, nous avons choisi de prendre  $b = 1.3$  pour  $H \leq 0.5$  et  $b = 1.1$  pour  $H > 0.5$ , pour assurer une bonne couverture en fréquence. D'autre part, nous limitons les indices n et m des sommes de (2.9) à 400 car au delà, les résultats sont quasiment identiques. Ces résultats sont exprimés en pourcentages de tests positifs au niveau de signification  $\alpha = 0.01$ .

Nous avons choisi 8 directions aux angles  $0^\circ, 26^\circ5, 45^\circ, 63^\circ5, 90^\circ, 116^\circ5, 135^\circ$  et  $153^\circ5$ .

Afin de résumer les résultats obtenus, nous proposons un indicateur de qualité qui consiste à ne garder que le minimum des résultats obtenus par les différents tests et pour chaque méthode de synthèse. Les tableaux 1 et 2 regroupent les résultats obtenus respectivement pour WMA et CHO.

H	0.2	0.4	0.6	0.8
$0^\circ$	86	90	98	99
$26^\circ5$	98	98	94	92
$45^\circ$	97	98	98	99
$63^\circ5$	98	92	90	94
$90^\circ$	98	97	92	94
$116^\circ5$	98	98	97	96
$135^\circ$	96	98	98	99
$153^\circ5$	98	97	97	96

**Tableau 1 :** Indice de qualité (compris entre 0 et 100) pour les images WMA. Les valeurs inférieurs à 90 sont reportées sur fond grisé.

H	0.2	0.4	0.6	0.8
$0^\circ$	98	98	98	98
$26^\circ5$	86	92	95	86
$45^\circ$	98	97	97	93
$63^\circ5$	75	63	49	43
$90^\circ$	96	94	99	96
$116^\circ5$	94	90	90	94
$135^\circ$	90	86	88	84
$153^\circ5$	83	90	86	88

**Tableau 2 :** Indice de qualité (compris entre 0 et 100) pour les images CHO. Les valeurs inférieurs à 90 sont reportées sur fond grisé.

L'analyse des résultats obtenus montre que la synthèse en deux dimensions par WMA génère des données que l'on peut considérer comme gaussiennes et dont les incréments sont stationnaires et similaires dans les 8 directions considérées. Par contre, pour la synthèse CHO, on constate que les résultats ne sont satisfaisants que pour les

orientations multiples de  $45^\circ$  ; pour les autres directions, ils sont nettement moins bons.

### 4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté deux méthodes de synthèse d'images fractales type mouvement brownien fractionnaire. Ces méthodes sont l'extension au cas bidimensionnel des synthèses par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot et par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments du FBM qui génèrent des signaux conformes au modèle FBM dans le cas unidimensionnel.

A l'aide de 3 tests d'hypothèse de conformité au modèle FBM, nous avons montré que seule la synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot bidimensionnelle donne de bons résultats. Les images obtenues par cette fonction peuvent servir d'images de référence pour valider les différentes méthodes d'analyse d'images fractales.

Les deux méthodes proposées peuvent être étendues sous certaines conditions pour générer des images anisotropes [7].

### 5 Références

[1] MANDELBROT B. B., VAN NESS J. W., "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications", SIAM, Vol. 10, N° 4, pp. 422-438, 1968.

[2] PENTLAND A. P. "Fractal-Based Description of Natural Scenes", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, N° 6, pp. 661-674, November 1984.

[3] JENNANE R., HARBA R., JACQUET G., "Estimation de la Qualité des Méthodes de Synthèse du Mouvement Brownien Fractionnaire", Traitement du Signal, Vol. 13, N° 4, pp. 289-302, 1997.

[4] LUNDAHL T., OHLEY W. J., KAY S. M., SIFFERT R., "Fractional Brownian Motion : A Maximum Likelihood Estimator and its Application to Image Texture", IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 5, N°3, pp. 152-161, 1986.

[5] AUSLOOS M., BERMAN D. H., "A Multivariate Weierstrass-Mandelbrot Function", Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A400, pp. 337-350, 1985.

[6] BERRY M. V., LEWIS Z. V., "On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function", Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A370, pp. 459-484, 1980.

[7] JENNANE R., "Modélisation Fractale de Textures : Application à l'Analyse de l'Architecture Osseuse", Thèse de 3<sup>ème</sup> Cycle de l'Université d'Orléans, 1995.

[8] BENDAT J. S., PIERSOL A. G., "RANDOM DATA : Analysis and Measurement Procedures", Wiley-Interscience, 1971.

[9] BARNESLEY M. F., DEVANEY R. L., MANDELBROT B. B., PEITGEN H. O., SAUPE D., VOSS R. F., "The Science of Fractal Images", Springer-Verlag, 1988.