Identification autodidacte au second ordre d'un système multi-entrées / multi-sorties bruité : Le cas d'un bruit temporellement blanc et spatialement coloré

François Desbouvries(1) **et Philippe Loubaton**(2)

GDR PRC ISIS / CNRS

(1) Institut National des Télécommunications / Département Signal et Image,
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry
desbou@int-evry.fr

(2) Université de Marne la Vallée / Équipe Système de Communication,
2 rue de la butte verte, 93166 Noisy le Grand Cedex
loubaton@univ-mlv.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous considérons l'identification autodidacte d'un système p entrées / q sorties (avec $p < q$) de réponse impulsionnelle infinie $H(z)$, excité par un bruit blanc, et perturbé par un bruit additif temporellement blanc mais de matrice de covariance inconnue. Nous montrons que sous certaines conditions $H(z)$ est identifiable à partir de la fonction d'autocovariance de l'observation. Nous proposons également des procédures simples d'identification.

ABSTRACT

In this paper, we address the blind identification problem of p–inputs q–outputs (in the case $p < q$) infinite impulse response transfer matrices $H(z)$, when excited by a white noise, and corrupted by an additive white noise with unknown covariance matrix. Under certain conditions, we show that $H(z)$ is identifiable from the autocovariance function of the observation. Some simple algebraic identification procedures are also given.

1 Introduction et formulation du problème

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le signal de dimension q défini par

$$y_n = [H(z)]s_n + w_n = [B(z)A(z)^{-1}]s_n + w_n, \qquad (1)$$

où $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^{-k}$ (resp. $B(z) = \sum_{k=0}^{M} B_k z^{-k}$, et $A(z) = \sum_{k=0}^{P} A_k z^{-k}$) est la transformée en z d'une réponse impulsionnelle infinie matricielle $q \times p$, (resp. d'une réponse impulsionnelle finie matricielle $q \times p$, et $p \times p$). La séquence d'entrée s_n (non-observable) est un bruit blanc de dimension p, et w_n est un bruit additif de dimension q dont nous allons bientôt préciser les propriétés statistiques. Nous supposons que w_n est décorrélé avec s_n. Nous supposons en outre que **(i)** $p < q$, **(ii)** $B(z)$ est irréductible, c'est-à-dire $\mathrm{Rang}(B(z)) = p \;\; \forall z$, **(iii)** $H(z)$ est à phase minimale, et **(iv)** A_P est de rang complet p. Le problème étudié est l'identification de $B(z)$ et de $A(z)$, à partir de la donnée (supposée exacte) de la fonction d'autocovariance de la sortie y. Cette question est motivée par le problème de l'égalisation autodidacte en communications numériques.

Dans ce cadre, les composantes de s_n représentent en effet les symboles émis par différents émetteurs partageant la même fréquence, et y_n coïncide avec le signal vectoriel obtenu en prélevant le champ reçu sur un réseau de capteurs. Le filtre inconnu $H(z)$ modélise l'effet de la propagation dans le milieu et w_n est un bruit additif. L'identification de $H(z)$ à partir des statistiques du second ordre des observations y_n a été considéré par de nombreux auteurs ces dernières années, mais uniquement dans le cas où w_n est blanc temporellement et spatialement, c'est-à-dire $E(w_n w_m^T) = \sigma^2 I \times \delta_{m,n}$. Le problème est alors relativement simple car σ^2 coïncide avec la plus petite valeur propre d'une matrice de covariance constituée à partir des observations. σ^2 est donc aisément identifiable et on se ramène au cas non bruité pour lequel on dispose de beaucoup de bonnes solutions dès lors que l'on suppose que $p < q$ et que $B(z)$ est irréductible (cf. par exemple [2]). Dans cet article, nous considérons le cas beaucoup plus délicat *où le bruit est blanc temporellement mais pas spatialement*, c'est-à-dire $E(w_n w_m^T) = \Sigma \times \delta_{m,n}$ avec Σ inconnu. Une telle situation peut être par exemple rencontrée si le bruit est dû au milieu de propagation (bruit atmosphérique HF, contexte de l'acoustique sous-marine ...)

Soit $\{R_k^y\}$ (resp. $\{R_k\}$) la fonction d'autocovariance de y (du signal $[B(z)A(z)^{-1}]s_n$). On a $R_0^y = R_0 + \Sigma$, et $R_k^y = R_k$ pour $k \geqslant 1$. Σ étant inconnu, R_0^y ne contient pas d'information sur R_0, si ce n'est l'inégalité $R_0 < R_0^y$. **Par conséquent le problème considéré ici consiste à identifier** $B(z)$ **et** $A(z)$ **à**

partir de la seule connaissance de la séquence tronquée des $R_k, k \geqslant 1$, où $R_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} H(e^{i\omega})H^*(e^{i\omega})d\omega$.

Ce problème semble n'avoir été abordé que dans 3 contributions. Dans [4] et [1], le cas spécifique $p = 1$ a été étudié. Dans [4], on a montré que la fonction $q \times 1$ inconnue n'était pas nécessairement identifiable. En cas d'identifiabilité, une procédure d'identification basée sur la théorie de la réalisation stochastique a été proposée. Cependant, elle repose sur un problème d'optimisation non convexe difficile, pour lequel il n'a pas été proposé de solution satisfaisante. Dans [1], on suppose de plus que les composantes de $H(z)$ n'ont pas de zéro commun, ce qui simplifie considérablement le problème. En particulier, sous réserve qu'une condition suffisante simple soit vérifiée, un algorithme d'identification de type "sous-espace", basé sur une décomposition en valeurs singulières, a été proposé. Enfin, une solution alternative a été proposée dans [3], dans le cas purement MA ($P = 0$). Il a été montré que, sous certaines conditions, la séquence d'autocovariances $\{R_i\}_{i=1}^{M-1}$ contenait suffisamment d'information pour permettre de retrouver $B(z)$ de façon unique. Le présent article est une généralisation directe au cas $P > 0$ de la technique développée dans [3].

2 Présentation générale de notre méthode d'identification

Notre méthode est basée sur le raisonnement suivant. Si R_0 était connu, on se ramènerait dans (1) au cas non bruité, et ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, sous les hypothèses **(i)** à **(iv)**, l'identification de $H(z)$ deviendrait un problème classique. Par conséquent nous cherchons des conditions suffisantes raisonnables (c'est-à-dire menant à des algorithmes simples) d'identifiabilité de R_0 à partir de la fonction d'autocovariance tronquée $\{R_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Dans ce paragraphe, nous faisons une présentation générale de notre procédure d'identification. Ainsi que nous allons le voir, les idées développées dans [3] s'étendent aisément au cas $P > 0$. Ceci est la raison pour laquelle ce paragraphe est relativement court. Cependant, cette brièveté n'est obtenue qu'en éludant la difficulté principale. Nous faisons en effet l'hypothèse fondamentale que nous avons à notre disposition le noyau à gauche d'une certaine matrice de Sylvester dépendant de $B(z)$. Mais il se trouve que sur ce point clé l'extension au cas $P > 0$ des résultats obtenus en [3] n'est pas triviale. C'est la raison pour laquelle nous reportons la discussion de ce point délicat au paragraphe 3.

Nous supposons que :

- **(C1)** Les colonnes $(B_i(z))_{i=1,p}$ de $B(z)$ sont toutes de même degré M,
- **(C2)** $B(z)$ is irréductible, c'est-à-dire Rang$(B(z)) = p \;\; \forall z \neq 0$ (y compris $z = \infty$),
- **(C3)** $B(z)$ est à colonnes réduites (c'est-à-dire Rang$(B_M) = p$ étant donné **(C1)**).

Grâce à ces hypothèses, $B(z)$ est une base polynomiale minimale du sous-espace rationnel $\mathcal{S}$ engendré par ses colonnes, avec des indices de Kronecker $M_i = M \;\; \forall i \in [1, p]$ (nous supposons que le lecteur est familier avec les sous-espaces vectoriels rationnels, c'est-à-dire les espaces vectoriels sur le corps des fractions rationnelles ; dans le cas contraire, nous recommandons [6] et [5]). Soit $\mathcal{G}$ l'"orthogonal" de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'espace rationnel, de dimension $(q - p)$, constitué de toutes les fonctions de transfert rationnelles $g(z)$ de dimension $1 \times q$ satisfaisant $g(z)f(z) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{S}$. Ainsi que nous allons le voir, les indices de Kronecker $(M_j^{\perp})_{j=1,q-p}$ de $\mathcal{G}$ (ou indices de Kronecker duaux de $B(z)$) jouent un rôle crucial dans le développement à venir. Ils satisfont l' importante égalité $\sum_{i=1}^{p} M_i = \sum_{j=1}^{q-p} M_j^{\perp}$ (cf. par exemple [5]). Grâce à **(C1)**, cette égalité s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{q-p} M_j^{\perp} = Mp. \tag{2}$$

Soit maintenant $T_N(B)$ la matrice de Sylvester généralisée $(N+1)q \times (M+N+1)p$:

$$T_N(B) = \begin{bmatrix} B_0 & \dots & B_M & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & B_0 & \dots & B_M \end{bmatrix} \quad , \tag{3}$$

N étant choisi de telle sorte que **(C4)** $(N+1)q > (M+N+1)p$. *Supposons* de plus qu'il soit possible de calculer le noyau à gauche Ker$^l(T_N(B))$ de $T_N(B)$ à partir d'un nombre suffisant N' de matrices de corrélation $\{R_i\}_{i=1}^{N'}$ (cf. paragraphe 3). Soit $g = (g_0, \dots, g_N)$ un vecteur ligne de $\mathbb{R}^{q(N+1)}$ et $g(z) = \sum_{k=0}^{N} g_k z^{-k}$ la fonction de transfert $1 \times q$ correspondante. Ils satisfont :

$$gT_N(B) = 0 \Longleftrightarrow g(z)B(z) = 0, \tag{4}$$

donc Ker$^l(T_N(B))$ est isomorphe au sous-espace vectoriel rationnel $\mathcal{G}_N = \{x(z)_{1\times q}, deg(x(z)) \leqslant N, \text{t.q. } x(z)B(z) = 0\}$. Grâce à (2) et à **(C4)**, il est clair qu'au moins un des indices de Kronecker duaux $(M_j^{\perp})_{j=1,q-p}$ est inférieur ou égal à N. Soit r le plus grand indice satisfaisant $M_r^{\perp} \leqslant N$. Alors $\mathcal{G}_N$ est de dimension r, et en résumé la connaissance de Ker$^l(T_N(B))$ permet la reconstruction potentielle d'une base polynomiale minimale $G(z)$ de $\mathcal{G}_N$, qui à l'évidence est une matrice polynomiale $r \times q$ de degré N.

Maintenant, si $r = q - p$, c'est-à-dire si les indices de Kronecker duaux $M_j^{\perp}$ sont tous inférieurs ou égaux à N, alors Ker$^l(T_N(B))$ est isomorphe à $\mathcal{G}_N = \mathcal{G}$, et donc $B(z)$ est identifiable, à une matrice $p \times p$ constante orthogonale près, à partir des $\{R_i\}_{i=1}^{N'}$ (cf. [3, section III.B.2] pour plus de détails).

Cette condition suffisante est assez sévère, mais heureusement elle n'est pas nécessaire pour que $B(z)$ soit identifiable. Si $r < q - p$, alors $\mathcal{G}_N$ est inclus strictement dans $\mathcal{G}$, mais on a toujours $G(z)B(z) = 0$. Montrons comment utiliser cette information pour identifier le coefficient inconnu R_0. $0 = G(z)B(z) = G(z)H(z)H^T(z^{-1}) = G(z)(R_0 + S_+(z) + S_+^T(z^{-1}))$, avec $S_+(z) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i z^{-i}$. Donc $G(z)R_0 = -G(z)(S_+(z) + S_+^T(z^{-1}))$. Soit $G(z) = \sum_{i=0}^{N} G_i z^{-i}$ et $G_{0:N} = [G_0^T \cdots G_N^T]^T$. En égalant dans les deux membres les coefficients de $z^0, z^{-1} \cdots, z^{-N}$, on obtient $G_{0:N}R_0 =$ une certaine matrice connue T. R_0 est unique si **(C5)** $G_{0:N}$ est de rang colonne complet (ce qui implique en particulier que $(N+1)r \geqslant$

q) ; dans le cas contraire, il existe encore des conditions suffisantes simples sous lesquelles R_0 reste identifiable (cf. [3, section III.B.3] pour plus de détails).

Résumons nous.

***Théorème 2.1* —**

Supposons que **(C1)** *à* **(C4)** *soient vérifiées. Supposons par ailleurs que l'on puisse calculer* $Ker^l(T_N(B))$ *à partir de* $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$, *et que* **(C5)** *soit vérifiée.*

Alors R_0 *est identifiable à partir de* $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$. *L'identification ultérieure de* $B(z)$ *et de* $A(z)$ *devient par conséquent un problème classique.*

Toute la procédure repose donc sur la possibilité de calculer le noyau à gauche de $T_N(B)$ (ou, de façon équivalente, le sous-espace engendré par ses colonnes) à partir de la seule connaissance (d'un nombre suffisant) de matrices de covariance R_i, excluant $i = 0$. Nous allons désormais nous focaliser sur ce point clé spécifique.

3 Obtention de $\mathrm{Ker}^l(T_N(B))$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que sous certaines conditions, il est possible de calculer $\mathrm{Ker}^l(T_N(B))$ à partir des noyaux à gauche et à droite de la matrice $\mathcal{R}_N$ de dimensions $q(N+1) \times q(N+1)$, définie par :

$$\mathcal{R}_N \stackrel{def}{=} E(\begin{bmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_{n-N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^T_{n-(N+1)} \cdots y^T_{n-(2N+1)} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} R_{N+1} & \cdots & R_{2N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 & \cdots & R_{N+1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Or (1) se réécrit $y_n = \sum_{k=0}^{M} B_k u_{n-k} + w_n$, avec

$$u_n \stackrel{def}{=} [A(z)^{-1}]s_n \quad . \quad (6)$$

Soit $\{R^u_k \stackrel{def}{=} E(u_n u^T_{n-k})\}$ la fonction d'autocovariance du processus autorégressif u_n. $\mathcal{R}_N$ se factorise donc en

$$\mathcal{R}_N = T_N(B)\mathcal{K}_N T_N^T(B) \quad , \quad (7)$$

où $T_N(B)$ a été définie en (3), et $\mathcal{K}_N$ est la matrice $(M+N+1)p \times (M+N+1)p$ définie par :

$$\mathcal{K}_N \stackrel{def}{=} E(\begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n-(M+N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T_{n-(N+1)} \cdots u^T_{n-(M+2N+1)} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} R^u_{N+1} & \cdots & R^u_{M+2N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^u_{-(M-1)} & \cdots & R^u_{N+1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

3.1 Le cas où $T_N(B)$ est de rang colonne complet

À partir de (7), il est clair que $\mathrm{Ker}^l(T_N(B)) \subset \mathrm{Ker}^l(\mathcal{R}_N) \cap \mathrm{Ker}^l(\mathcal{R}_N^T)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}^l(\mathcal{R}_N) \cap \mathrm{Ker}^l(\mathcal{R}_N^T)$. Puisque nous supposons que **(C6)** $T_N(B)$ est de rang colonne complet,

$$\begin{cases} x^T T_N(B)\mathcal{K}_N T_N^T(B) = 0 \\ x^T T_N(B)\mathcal{K}_N^T T_N^T(B) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

implique que $x^T T_N(B)[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T] = 0$. Si de plus **(C7)** $[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T]$ est de rang complet (par lignes), alors $x^T T_N(B) = 0$.

Nous allons maintenant rendre les conditions **(C6)** et **(C7)** plus explicites. Observons tout d'abord que s'il existe $i \in [1, p]$, tel que $M_i < M$, alors B_M est de rang déficient et donc $T_N(B)$ ne peut pas être de rang colonne complet ; donc **(C6)** implique **(C1)**. Maintenant, $q > p$, et $B(z)$ est une base polynomiale minimale du sous-espace engendré par ses colonnes. Par conséquent, il est bien connu [7] que $\mathrm{Rang}(T_N(B)) = (N+1)q - \sum_{j, M_j^{\perp} \leqslant N}(N+1-M_j^{\perp})$. Grâce à (2), cette egalité devient :

$$\mathrm{Rank}(T_N(B)) = (M+N+1)p - \sum_{j, M_j^{\perp} > N+1} (M_j^{\perp} - (N+1)). \quad (10)$$

$T_N(B)$ est donc de rang colonne complet $(M+N+1)p$ si et seulement si $N+1 \geqslant M^{\perp}_{q-p}$. Nous avons obtenu le

***Théorème 3.1* —**

Supposons que **(C1)** *à* **(C4)** *soient vérifiées.*

Alors $T_N(B)$ *est de rang colonne complet* $(M+N+1)p$ *si et seulement si* $M_j^{\perp} \leqslant N+1 \ \ \forall j \in [1, q-p]$.

Par ailleurs, le rang de $[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T]$ est régi par le théorème suivant (faute de place, la démonstration ne peut être donnée ici ; elle utilise pleinement le fait que u_n défini en (6) est un processus autorégressif d'ordre P régulier, c'est-à-dire que $E([u_n^T \cdots u^T_{n-k}]^T [u_n^T \cdots u^T_{n-k}])$ est définie positive $\forall k$) :

***Théorème 3.2* —**

Soit u_n *le processus AR(P) défini par (6), et soit* $\mathcal{K}_N$ *la matrice définie par (8). Alors*

– *si* $0 \leqslant P \leqslant M$, *alors* $[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T]$ *est de rang complet* $(M+N+1)p$ *si et seulement si* $N+1 \leqslant M$.

– *si* $P > M$, *alors* $[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T]$ *est de rang complet* $(M+N+1)p$ *si* **(i)** $N+1 \leqslant M$, *ou* **(ii)** $(Sup(P-M, M+1) \leqslant N+1 \leqslant 2P-M)$ *et* (A_P *est de rang complet).*

Il nous reste à rassembler les théorèmes 3.1 et 3.2. Observons tout d'abord que pour M, P, p et q donnés, **(C4)** et **(C6)** s'affaiblissent lorsque N croît. Pour présenter le meilleur résultat d'identifiabilité, il convient donc de choisir N le plus grand possible. Comme par ailleurs le rang de $[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T]$ ne dépend que de N, nous choisissons $N+1 = M$ dans le cas $P \leqslant M$, et $N+1 = 2P-M$ sinon. Ceci nous mène au

***Théorème 3.3* —**

Supposons que **(C1)** *à* **(C3)** *soient vérifiées.*

– *(a) cas* $0 \leqslant P \leqslant M$

Si **(i)** $q > 2p$, *et* **(ii)** $T_{M-1}(B)$ *est de rang colonne complet* $\Leftrightarrow M_j^{\perp} \leqslant M \ \forall j \in [1, q-p]$,

Alors $Ker^l(T_{M-1}(B)) = Ker^l(\mathcal{R}_{M-1}) \cap Ker^l(\mathcal{R}^T_{M-1})$.

– *(b) cas* $P > M$

Si **(i)** $q > (2P/(2P-M))p$, **(ii)** $T_{2P-M-1}(B)$ *est de rang colonne complet* $\Leftrightarrow M_j^{\perp} \leqslant 2P-M \ \forall j \in [1, q-p]$, *et* **(iii)** A_P *est de rang complet, alors* $Ker^l(T_{2P-M-1}(B)) = Ker^l(\mathcal{R}_{2P-M-1}) \cap Ker^l(\mathcal{R}^T_{2P-M-1})$.

Il est intéressant de remarquer que plus P est grand (comparativement à M), plus les hypothèses du cas (b) sont faibles, en comparaison de celles du cas (a) : la partie autorégressive du modèle (1) a donc tendance à régulariser le problème. Il est donc le bienvenu, particulièrement dans le cas $P \leqslant M$, d'essayer de s'affranchir de la condition assez drastique : $T_N(B)$ est de rang colonne complet. C'est le but du paragraphe suivant.

3.2 Le cas où $T_N(B)$ est de rang déficient

Nous ne faisons plus l'hypothèse **(C6)**. Donc (9) implique $x^T T_N(B)[\mathcal{K}_N T_N^T(B), \mathcal{K}_N^T T_N^T(B)] = 0$, et donc $x^T T_N(B) = 0$, si **(C8)** $[\mathcal{K}_N T_N^T(B), \mathcal{K}_N^T T_N^T(B)]$ est de rang complet (par lignes). Notons que **(C6)** et **(C7)** impliquent **(C8)**. Réciproquement, $x^T[\mathcal{K}_N \mathcal{K}_N^T] = 0$ implique $x^T[\mathcal{K}_N T_N^T(B), \mathcal{K}_N^T T_N^T(B)] = 0$ et donc **(C8)** implique **(C7)**, mais pas **(C6)**. Donc **(C8)** est plus faible que la réunion des deux conditions **(C6)** et **(C7)**.

Des calculs assez lourds (que nous ne pouvons donner ici, faute de place) permettent d'exprimer simplement **(C8)** en fonction des coefficients de $H(z)$ (la fonction de transfert inconnue) et de $\tilde{H}(z)$, $\tilde{H}(z)$ étant l'unique fonction anticausale à phase minimale qui vérifie $H(z)H^T(z^{-1}) = \tilde{H}(z)\tilde{H}^T(z^{-1})$. Les résultats sont résumés dans les deux théorèmes suivants (pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 3.1, nous les écrivons pour $N+1 = M$ dans le cas $0 \leqslant P \leqslant M$, et pour $N+1 = 2P-M$ dans le cas $P > M$). Le premier de ces deux théorèmes englobe et généralise les résultats déjà obtenus dans le cas MA (cf. [3, lemma 3.1]).

Théorème 3.4 (le cas $0 \leqslant P \leqslant M$***)*** —
Supposons que **(i) (C1)** *à* **(C3)** *soient vérifiées,* **(ii)** $0 \leqslant P \leqslant M$ *et* **(iii)** $q > 2p$. *Supposons de plus que les matrices*

$$\begin{bmatrix} H_M & \cdots & H_{M+(P-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{M-(P-1)} & \cdots & H_M \end{bmatrix} \quad et$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_M & \cdots & \tilde{H}_{M+(P-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{M-(P-1)} & \cdots & \tilde{H}_M \end{bmatrix}$$

soient de rang complet Mp.
Alors $Ker^l(T_{M-1}(B)) = Ker^l(\mathcal{R}_{M-1}) \cap Ker^l(\mathcal{R}^T_{M-1})$.

Théorème 3.5 (le cas $P > M$***)*** —
Supposons que **(i) (C1)** *à* **(C3)** *soient vérifiées,* **(ii)** $P > M$ *et* **(iii)** $q > 2p$. *Supposons de plus que les matrices*

$$\begin{bmatrix} H_P & \cdots & & \cdots & H_{2P-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ H_0 & & & & H_{P-1} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & H_0 & \cdots & H_M \end{bmatrix} \quad et$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_M & \cdots & \tilde{H}_0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \tilde{H}_{P-1} & & & & \tilde{H}_0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \tilde{H}_{2P-1} & \cdots & & \cdots & \tilde{H}_P \end{bmatrix}$$

soient de rang complet Pp.
Alors $Ker^l(T_{2P-M-1}(B)) = Ker^l(\mathcal{R}_{2P-M-1}) \cap Ker^l(\mathcal{R}^T_{2P-M-1})$.

Références

[1] K. Abed Meraim, "Second Order Blind Identification/Equalization : Algorithms and Statistical Performance", PHD Thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, July 1995.

[2] K. Abed Meraim, P. Loubaton and E. Moulines, "A subspace algorithm for certain blind identification problems", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 43, N. 3, pp. 499-511, March 1997.

[3] F. Desbouvries, I. Fijalkow and P. Loubaton, "On the identification of noisy MA models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, N. 12, pp. 1810-14, December 1996.

[4] I. Fijalkow and P. Loubaton, "Identification of rank one rational spectral densities from noisy observations : a stochastic realization approach", *System and Control Letters* 24, pp. 201-205, 1995.

[5] G. D. Forney, "Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems", *SIAM Journal on Control*, vol 13, number 3, May 1975, pp. 493-520.

[6] T. Kailath, "*Linear Systems*", Prentice-Hall, 1980.

[7] S. Kung, T. Kailath and M. Morf, "A generalized resultant matrix for polynomial matrices", *Proceedings of the IEEE Conf. on Decision and Control*, *Florida* pp. 892-95, 1976.