

Une nouvelle approche pour la détection linéaire optimale dans le plan temps - fréquence

Cédric Richard et Régis Lengellé

Laboratoire de Modélisation et Sûreté des Systèmes
 Université de Technologie de Troyes
 12, rue Marie Curie - B.P. 2060
 10010 Troyes Cedex
 cedric.richard@univ-troyes.fr

RÉSUMÉ

L'élaboration d'un détecteur nécessite la connaissance des propriétés statistiques de l'observation conditionnellement aux hypothèses. Cependant, de nombreuses applications mettent en jeu des phénomènes complexes dans le cadre desquels la connaissance a priori est minimale. L'objet de cet article est de proposer une méthode pour la détection et la classification temps-fréquence de signaux aléatoires non-stationnaires, connus uniquement au moyen d'un ensemble de réalisations bruitées. Le récepteur obtenu est optimal (probabilité d'erreur minimale) pour tout critère de contraste ne dépendant que des moments conditionnels d'ordre 1 et 2 de la statistique de détection. Cette méthode est validée dans le cadre de la détection du complexe K dans l'EEG de sommeil.

ABSTRACT

Detector design requires substantial knowledge of the observation statistical properties, conditionally to the hypotheses. Nevertheless, many applications involve complex phenomena, in which few a priori information is available. The aim of this paper is to introduce a method for the time-frequency detection and classification of non-stationary signals, directly from labeled training data. The obtained receiver is optimum (probability of error minimum) in the sense of the best discriminant criterion which depends only on the first and second order moments of the statistic. The efficiency of our approach for K-complexes detection in sleep EEG is explored. It results from the present study that the obtained receiver is potentially the best one which can be found in the literature.

1 Introduction

L'analyse temps-fréquence (TF) a connu des développements méthodologiques majeurs ces 20 dernières années, en raison de sa faculté à prendre explicitement en compte l'évolution temporelle du contenu fréquentiel des signaux étudiés. L'association de procédures de détection à ce type de méthodes a également fait l'objet de nombreux travaux de recherche [1]. Cependant, les solutions proposées sont généralement basées sur la relation de Moyal et ne constituent alors que les reformulations TF de détecteurs optimaux définis classiquement à partir des échantillons du signal temporel [2]. On notera toutefois que l'approche TF permet d'englober une grande variété de détecteurs (filtrage adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe, détecteur d'énergie, etc.) au moyen d'une expression unique de la statistique de détection, ce qui lui confère une propriété supplémentaire de généralisation par rapport à l'approche temporelle classique [1][2].

L'élaboration d'une structure de détection nécessite la connaissance des propriétés statistiques de l'observation conditionnellement aux hypothèses. Cependant, de nombreuses applications (signatures vibratoires de moteurs thermiques [3], signaux EEG [4], etc.) mettent en jeu des phénomènes complexes dans le cadre desquels la connaissance *a priori* est minimale. Il peut alors être intéressant de tirer profit des informations disponibles sur les signaux en élaborer

directement la structure de détection sur une base de données expertisées. Récemment, Jones et Sayeed ont adopté cette approche et déterminé des détecteurs TF optimaux au sens du critère de contraste de Fisher [5]. Dans [6], Samimy, Rizzoni *et al.* ont suivi une démarche analogue en maximisant le rapport signal sur bruit en sortie du détecteur. On notera enfin l'approche différente de Heitz qui consiste à optimiser les paramètres de la représentation TF, afin de maximiser une distance définie au préalable entre les hypothèses [7].

L'objet de cette communication est de proposer une méthode pour la détection et la classification temps-fréquence de signaux aléatoires non-stationnaires connus au moyen d'un ensemble de réalisations bruitées. Le récepteur obtenu est optimal (probabilité d'erreur minimale) au sens du meilleur critère de contraste ne dépendant que des moments conditionnels d'ordre 1 et 2 de la statistique de détection, sans que celui-ci soit explicité analytiquement. Nous montrons également que les approches proposées par Jones et Sayeed [5] et par Samimy, Rizzoni *et al.* [6] ne conduisent pas nécessairement à une solution optimale. Enfin, notre méthode est validée dans le cadre de la détection du complexe K dans l'EEG de sommeil.

2 Enoncé du problème

Dans le contexte de la classe de Cohen, le problème de détection considéré peut s'écrire sous la forme du test binaire d'hypothèses [8] :

$$\begin{cases} H_0: & C_x(k, \omega; \Pi) = C_b(k, \omega; \Pi) \\ H_1: & C_x(k, \omega; \Pi) = C_{s+b}(k, \omega; \Pi) \end{cases} \quad (2.1)$$

où : \mathbf{x} est le signal discret observé,
 s le processus à détecter (éventuellement complexe),
 \mathbf{b} un bruit additif (éventuellement complexe),
 C_x une représentation de la classe de Cohen de \mathbf{x} .

Par analogie avec la théorie classique du filtrage adapté [9] et dans le cas où la position du signal est connue, on peut considérer la statistique de détection suivante :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{(k)} \sum_{(\omega)} g(k, \omega) C_x(k, \omega; \Pi) \quad (2.2)$$

où g est un gabarit TF à définir en fonction des propriétés connues du processus s à détecter. En choisissant de lisser la référence g plutôt que l'observation, la statistique (2.2) peut être reformulée selon :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{(k)} \sum_{(\omega)} v(k, \omega) W_x(k, \omega) \quad (2.3)$$

où W_x est la représentation de Wigner-Ville de l'observation. Comme cela a été évoqué précédemment, on notera que la référence v peut être déterminée par maximisation du critère de Fisher [5] ou du rapport signal sur bruit [6].

L'objet du paragraphe 3 est de proposer une méthodologie conduisant à la détermination de v et du seuil de détection γ_0 optimaux au sens du meilleur critère de contraste ne dépendant que des moments conditionnels d'ordre 1 et 2 de la statistique (2.3).

3 Conception d'un détecteur TF optimal

3.1 Principes généraux de la méthode

Supposons, pour simplifier les expressions, que le plan TF est discret et de dimensions finies ($K \times \Omega$). Le problème de détection (2.1) peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}^T \mathbf{Y} + \gamma_0 \geq 0 \text{ alors } H_1, \\ \text{sinon } H_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

avec :

$$\mathbf{Y} = \left[W_x(1,1) \dots W_x(1,\Omega) W_x(2,1) \dots W_x(2,\Omega) \dots W_x(K,\Omega) \right]^T,$$

$$\mathbf{V} = \left[v(1,1) \dots v(1,\Omega) v(2,1) \dots v(2,\Omega) \dots v(K,\Omega) \right]^T.$$

La détermination du détecteur TF consiste donc à trouver \mathbf{V} et γ_0 optimaux au sens d'un critère f défini au préalable. En utilisant un minimum d'informations *a priori*, la statistique de détection peut être caractérisée par ses moments conditionnels d'ordre 1 et 2:

$$\begin{aligned} \eta_i &= E \left\{ \lambda(\mathbf{Y}) \middle| H_i \right\} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_i + \gamma_0, \\ \sigma_i^2 &= \text{Var} \left\{ \lambda(\mathbf{Y}) \middle| H_i \right\} = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= E \left\{ \mathbf{Y} \middle| H_i \right\}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_i &= E \left\{ (\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i)(\mathbf{Y} - \mathbf{M}_i)^T \middle| H_i \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En l'absence de connaissances *a priori* sur les lois de probabilité conditionnelles, soit $f(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$ une mesure de la séparabilité des classes H_0 et H_1 . Ce critère devant être optimal pour le récepteur recherché, les dérivés partielles de f par rapport à \mathbf{V} et γ_0 doivent être nulles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2} \frac{\partial \sigma_2^2}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \mathbf{V}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma_0} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1^2} \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \gamma_0} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2^2} \frac{\partial \sigma_2^2}{\partial \gamma_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_0} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

La résolution de ce système conduit à une solution analytique du problème (3.1) particulièrement intéressante [10] :

$$\mathbf{V}_{\text{opt}} = \left[\alpha \boldsymbol{\Sigma}_0 + (1 - \alpha) \boldsymbol{\Sigma}_1 \right]^{-1} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0), \quad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{\partial f / \partial \sigma_0^2}{\partial f / \partial \sigma_0^2 + \partial f / \partial \sigma_1^2}. \quad (3.6)$$

Ainsi, le filtre linéaire optimal \mathbf{V}_{opt} ne dépend de f que par l'intermédiaire d'un paramètre α ($0 \leq \alpha \leq 1$). Nous retenons dans notre cas la valeur de α qui minimise la probabilité d'erreur P_e . Pour estimer celle-ci, plusieurs méthodes peuvent être envisagées : resubstitution, validation croisée, etc. Cette méthodologie conduit ainsi, à partir d'une base d'apprentissage, au récepteur TF optimal (P_e minimale) au sens du meilleur critère $f(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$.

3.2 Algorithme

En supposant que l'on dispose de N_i réalisations pour chaque hypothèse H_i , l'algorithme permettant de déterminer le récepteur TF optimal à partir d'un ensemble d'apprentissage est le suivant :

Objets manipulés :

\mathbf{x}_i^j : $j^{\text{ème}}$ réalisation de l'hypothèse H_i , $i \in \{0, 1\}$.

\mathbf{Y}_i^j : représentation de Wigner-Ville de \mathbf{x}_i^j (cf. §3.1).

$\hat{\mathbf{M}}_i$: estimation de l'espérance de \mathbf{Y} , conditionnellement à l'hypothèse H_i , $i \in \{0, 1\}$.

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i$: estimation de la matrice de variance-covariance de \mathbf{Y} , conditionnellement à l'hypothèse H_i , $i \in \{0, 1\}$.

α : variable appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (cf. §3.1).

$\Delta\alpha$: incrément de la variable α .

Séquencement :

1) Initialisation de l'algorithme :

- Pour chaque réalisation \mathbf{x}_i^j , évaluation du vecteur \mathbf{Y}_i^j .
 - Evaluation de $\widehat{\mathbf{M}}_i$ et $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_i$, $i \in \{0, 1\}$.
 - Initialisation de la variable α à 0.
- 2) Tant que ($\alpha \leq 1$), répéter :
- Calcul de \mathbf{V}^α par :
- $$\mathbf{V}^\alpha = \left[\alpha \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 + (1 - \alpha) \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_1 \right]^{-1} \left(\widehat{\mathbf{M}}_1 - \widehat{\mathbf{M}}_0 \right).$$
- Recherche du seuil γ_0^α pour lequel la probabilité d'erreur P_e^α du détecteur obtenu est minimale.
 - Incrémentement de α : $\alpha \leftarrow \alpha + \Delta\alpha$.
- 3) Le détecteur retenu ($\mathbf{V}^\alpha, \gamma_0^\alpha$) minimise P_e^α .

3.3 Quelques caractéristiques de la méthode

Le récepteur obtenu au moyen de la méthode décrite ci-dessus offre des performances supérieures à celles obtenues pour un détecteur établi par maximisation du critère de contraste de Fisher. En effet, soient P_0 et P_1 les probabilités *a priori* des événements H_0 et H_1 . Le discriminant linéaire de Fisher maximise le critère suivant [11] :

$$f_{\text{Fisher}}(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2) = \frac{(\eta_0 - \eta_1)^2}{P_0 \sigma_0^2 + (1 - P_0) \sigma_1^2},$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{V}_{\text{Fisher}} = \left[P_0 \boldsymbol{\Sigma}_0 + (1 - P_0) \boldsymbol{\Sigma}_1 \right]^{-1} \left(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \right) \text{ car } \alpha = P_0.$$

On démontre ainsi que le discriminant linéaire de Fisher est un cas particulier de (3.5), où α est égal à P_0 .

Cette remarque est également valable pour le discriminant linéaire obtenu par maximisation du rapport signal sur bruit. Dans ce cas, on a en effet :

$$f_{\text{RSB}}(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2) = \frac{(\eta_0 - \eta_1)^2}{\sigma_0^2},$$

et par conséquent : $\mathbf{V}_{\text{RSB}} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \left(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0 \right)$ car $\alpha = 1$.

En conclusion, les détecteurs obtenus par maximisation du critère de Fisher ou du rapport signal sur bruit ne garantissent en aucun cas une probabilité d'erreur minimale au sens des fonctions $f(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$.

4 Applications

4.1 Détection d'un signal déterministe

Afin d'illustrer notre méthode, on se propose dans un premier temps de détecter un signal déterministe (fenêtre gaussienne) noyé dans un bruit blanc gaussien centré. Pour cela, on dispose de 3000 réalisations des hypothèses H_0 et H_1 . On pourra considérer que $P_0 = P_1 = 1/2$. Les résultats obtenus pour un rapport signal sur bruit de -3 dB sont représentés dans la figure 1.

Cet exemple illustre parfaitement la sous-optimalité des approches proposées dans [5] et [6]. Enfin, dans le cadre de cette application, nous avons pu également constater expé-

riementalement que les performances de notre détecteur diffèrent peu de celles du filtre adapté TF ($|\Delta P_e| < 0.2\%$).

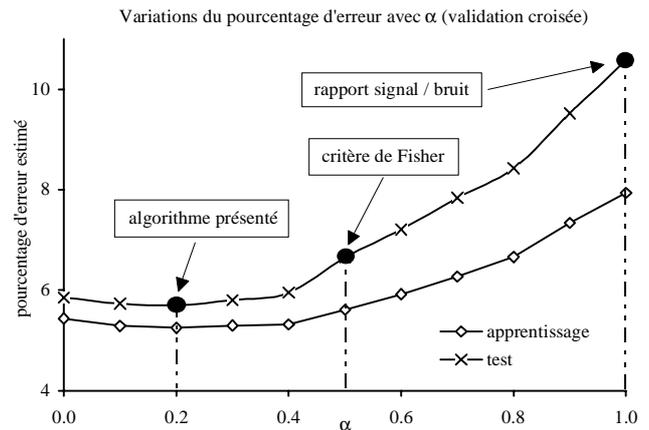


figure 1 : détection aveugle d'un signal déterministe

4.2 Détection du complexe K dans l'EEG

Le complexe K est un phénomène transitoire de l'EEG de sommeil. La détection automatique de cet événement en sommeil lent est rendue délicate par la non stationnarité du bruit, dont les caractéristiques statistiques peuvent être très proches (cas des ondes delta, dont on donne un exemple ci-dessous).

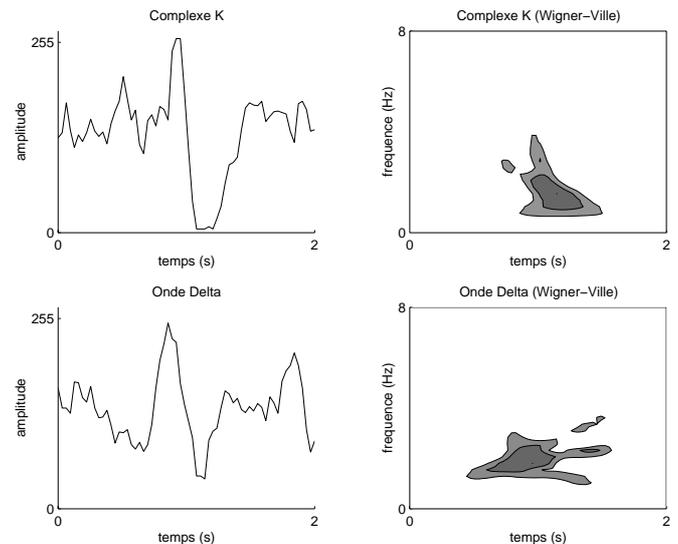


figure 2 : exemple de complexe K et d'onde delta ($f_c = 32$ Hz)

Dans la présente étude, la principale difficulté a consisté à réduire la dimension du problème (64×64), compte tenu du fait que peu de données étaient disponibles (292 complexes K et 314 ondes delta). Pour cela, seules les informations de la bande de fréquences [0 - 8Hz] ont été retenues, l'énergie du complexe K étant principalement localisée entre 0 et 6Hz. De plus, la résolution TF du détecteur a été volontairement limitée en imposant à v d'être constant sur des zones contiguës de dimensions ($0.125s \times 1Hz$). Le nombre de variables a pu ainsi être ramené à 128.

Après un apprentissage sur la base de données citée plus haut, notre détecteur a affiché des performances satisfaisantes si on les compare aux résultats publiés antérieurement

	Da Rosa <i>et al.</i> [12]	Bankman <i>et al.</i> [13]	Destiné <i>et al.</i> [14]	Détection dans le
Approche	modélisation	réseau de neurones	réseaux de neurones	plan temps-fréquence
$P_{\text{Bonne Détection}}$ (%)	89	95	76	93.5
$P_{\text{Fausse Alarme}}$ (%)	49	14	12	8.5

tableau 1 : performances des détecteurs de complexes K proposés dans la littérature.

(voir tableau 1). On notera que les résultats présentés ont été estimés au moyen d'une procédure de "leave-one-out" [10].

5 Conclusion

L'algorithme proposé permet de déterminer le détecteur linéaire optimal (P_e minimale) au sens de l'ensemble des critères du type $f(\eta_0, \eta_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$, à partir d'une base d'apprentissage. Ses performances sont supérieures à celles des récepteurs établis par maximisation du critère de Fisher ou du rapport signal/bruit. On a pu également constater expérimentalement qu'il offre des caractéristiques comparables à celles du filtrage adapté TF lorsque le processus à détecter est déterministe. Néanmoins, cette approche suppose que l'on dispose d'une base d'apprentissage suffisamment riche et représentative des phénomènes étudiés. Actuellement, nous envisageons d'associer une procédure de type "Branch and Bound" à la méthode présentée afin de sélectionner les zones pertinentes de l'image TF, lorsque la base d'apprentissage est de faible dimension et qu'il est alors indispensable de réduire la dimension du problème.

6 Références

- [1] O. LEMOINE, "Détection de Signaux Non Stationnaires par Représentation Temps-Fréquence", Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [2] P. FLANDRIN, "A Time-Frequency Formulation of Optimum Detection," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 36, no. 9, pp. 1377-1384, 1988.
- [3] M. CHIOLLAZ, P. FLANDRIN, and N. GACHE, "Utilisation de la Représentation de Wigner-Ville comme Outil de Diagnostic des Défauts de Fonctionnement des Moteurs Thermiques," in *Proc. 11ème Colloque GRETSI*, 1987, pp. 579-582.
- [4] C. RICHARD and R. LENGELLE, "Joint Time and Time-Frequency Optimal Detection of K-complexes in Sleep EEG," submitted to *Computers and Biomedical Research*, 1997.
- [5] D. L. JONES and A. M. SAYEED, "Blind Quadratic and Time-Frequency based Detectors from Training Data," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1995, pp. 1033-1036.
- [6] B. SAMIMY, G. RIZZONI, A. M. SAYEED, and D. L. JONES, "Design of Training Data-Based Quadratic Detectors with Application to Mechanical Systems," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1996, pp. 1767-1770.
- [7] C. HEITZ, "Optimized Time-Frequency Representations for the Classification of Signals," in *Proc. 15ème Colloque GRETSI*, 1995, pp. 317-320.
- [8] P. FLANDRIN, *Temps-Fréquence*. Paris, France: HERMES, 1993.
- [9] H. V. POOR, *An Introduction to Signal Detection in Noise*. New York, USA: Springer-Verlag, 1994.
- [10] K. FUKUNAGA, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. London, GB: Academic Press, 1990.
- [11] L. DEVROYE, L. GYORFI, and G. LUGOSI, *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*. New York, USA: SPRINGER VERLAG, 1996.
- [12] A. C. DA ROSA, B. KEMP, and T. PAIVA, "A Model-based Detector of Vertex Sharp Waves and K-Complexes in Sleep Electroencephalogram," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, vol. 78, pp. 71-79, 1991.
- [13] I. N. BANKMAN, V. G. SIGILLITO, R. A. WISE, and P. L. SMITH, "Feature-Based Detection of K-Complex Wave in the Human Electroencephalogram using Neural Networks," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 39, no. 12, pp. 1605-1610, 1992.
- [14] J. DESTINE, B. BECKERS, M. FOMBELLIDA, R. POIRRIER, D. DIVE, and G. FRANCK, "Utilisation des Réseaux de Neurones Artificiels pour la Reconnaissance de Grapho-Elements Phasiques dans le Cadre de l'Analyse du Sommeil," in *Proc. Symposium International 25 ans d'Analyse Automatique du Sommeil*, 1994.