

Distribution de Wigner-Ville Locale pour la réduction des interférences

Harald Oehlmann et David Brie

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CNRS URA 821

Université Henri Poincaré, Nancy 1, B.P. 239, 54506 Vandœuvre Cedex (France)

Tel.: 03 83 91 20 69 — Fax: 03 83 91 20 30 — E-Mails: oehlmann@cran.u-nancy.fr, brie@cran.u-nancy.fr

RÉSUMÉ

La classe des distributions de Wigner-Ville Locales étend la classe de Cohen par la définition d'un noyau local i.e. dépendant du point temps-fréquence considéré. L'objectif de cette contribution est la détermination de ces noyaux locaux pour la réduction des interférences. On propose également un nouveau formalisme qui permet l'étude de certaines propriétés des distributions locales.

ABSTRACT

The class of Local Wigner-Ville Distributions extends the Cohen class by the definition of a local kernel i.e. depending on the time-frequency point considered. The aim of this paper is to determine these local kernels for interference reduction. A new formalism is also proposed allowing the study of some properties of these local distributions.

1 Introduction

La plupart des distributions temps-fréquence (DTF) utilise un noyau de lissage pour réduire les termes d'interférence de la distribution de Wigner-Ville (DWV). Le choix du noyau est crucial puisque c'est lui qui va déterminer la lisibilité de la DTF. Une des approches les plus abouties est celle de Baraniuk et Jones [1], qui ont, d'une part, montré que le noyau optimal pour la réduction des interférences dépendait du signal analysé et, d'autre part, formulé le problème de sa détermination comme un problème d'optimisation sous contraintes. Cependant, le choix d'un noyau global limite la classe de signaux pour lesquels la réduction des interférences est efficace. Cela a motivé des travaux plus récents [2, 4], qui tentent de s'affranchir de cette limitation en rendant le noyau dépendant du temps.

Le travail présenté dans cet article étend cette approche en définissant un noyau dépendant explicitement du point temps-fréquence (TF) considéré.

Comme point de départ, on considère la distribution de pseudo Wigner-Ville lissée [3] définie par :

$$\begin{aligned} \text{PWV}(t, \omega) &= \Phi(t, \omega) \star \text{WV}(t, \omega) \\ &= \mathcal{F}^{2D} \{ \phi(\theta, \tau) \cdot A(\theta, \tau) \} \end{aligned} \quad (1)$$

où $\text{WV}(t, \omega)$ est la DWV, $A(\theta, \tau)$ la fonction d'ambiguïté et $\Phi(t, \omega)$ ($\phi(\theta, \tau)$) un filtre de lissage séparable :

$$\Phi(t, \omega) = \Phi^T(\omega) \cdot \Phi^F(t) \quad \phi(\theta, \tau) = \phi^T(\tau) \cdot \phi^F(\theta)$$

La notation T (resp. F) stipule que le filtre permet la réduction des interférences temporelles (resp. fréquentielles). Si on se restreint à des fonctions rectangulaires :

$$\phi^T(\tau) = \text{rect}_{\tau_{\max}}(\tau) \quad \phi^F(\theta) = \text{rect}_{\theta_{\max}}(\theta) \quad (2)$$

l'effet du filtre de lissage peut s'interpréter comme une limitation des bornes d'intégration de la DWV aux valeurs $]-\tau_{\max}; \tau_{\max}[$ (resp. $]-\theta_{\max}; \theta_{\max}[$). L'idée sous-jacente à la distribution de Wigner-Ville Locale (DWVL) est de remplacer

les bornes d'intégration fixes τ_{\max} (resp. θ_{\max}) par des bornes dépendant explicitement du point TF considéré $\tau_{\max}(t, \omega)$ (resp. $\theta_{\max}(t, \omega)$).

L'organisation de cette communication est la suivante : La première partie permet de définir les fonctions produit temporel et fréquentiel ; leur étude permet de montrer l'existence et d'évaluer, de façon théorique, les bornes d'intégration optimales au sens de la réduction des interférences. De plus, les fonctions produit possèdent des capacités de séparation des auto et intertermes. Sur la base de ces résultats, une procédure d'estimation des bornes optimales est proposée. Puis un nouveau formalisme pour le lissage local de la DWV est introduit. Il permet d'interpréter la fonction de lissage local comme un noyau dépendant du point TF considéré. Certaines propriétés de cette nouvelle classe de DTF sont étudiées. Les performances de cette approche sont illustrées par un exemple de simulation.

2 Les fonctions produit temporel et fréquentiel

2.1 Définitions

La DWV est définie par :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Elle peut se décomposer en la somme de deux intégrales sur l'axe des réels positifs :

$$\begin{aligned} \text{WV}(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in [0; \infty[} s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\tau \in]0; \infty] } s^* \left(t + \frac{\tau}{2} \right) s \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

qui, compte-tenu de la relation $z + z^* = 2 \Re\{z\}$ s'écrit :

$$\text{WV}(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{o}(\tau) \Re \left\{ s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} \right\} d\tau$$

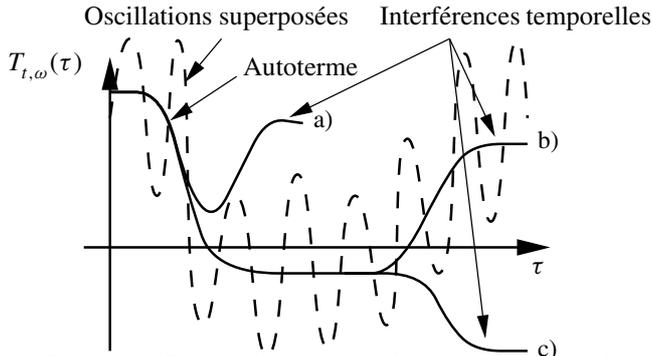


FIG. 1 — Géométrie de la fonction produit temporel.

avec :

$$o(\tau) = \begin{cases} 1/2 & \tau = 0 \\ 1 & \tau \neq 0. \end{cases}$$

La fonction produit temporel est alors définie comme l'argument de l'intégrale :

$$T_{t,\omega}(\tau) = o(\tau) \Re \left\{ s \left(t + \frac{\tau}{2} \right) s^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega\tau} \right\}.$$

De manière duale, la DWV peut aussi s'exprimer en fonction de la transformée de Fourier (TF) du signal $S(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$:

$$WV(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) e^{-j t \theta} d\theta.$$

En effectuant une décomposition similaire de l'intégrale, on définit la fonction produit fréquentiel par :

$$F_{t,\omega}(\theta) = o(\theta) \Re \left\{ S \left(\omega - \frac{\theta}{2} \right) S^* \left(\omega + \frac{\theta}{2} \right) e^{-j t \theta} \right\}.$$

2.2 Bornes d'intégration optimales et propriétés des fonctions produit

Les résultats essentiels obtenus par [5] sont les suivants. Pour les signaux séparables en temps :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ s_1(t) &= 0 \quad \text{if } t \notin T_1 =]-\infty; t_1] \\ s_2(t) &= 0 \quad \text{if } t \notin T_2 = [t_2; \infty[\end{aligned}$$

les bornes optimales dépendent uniquement du temps et sont données par :

$$\tau_{\max}(t) = \begin{cases} -2(t - t_2) & t < \frac{t_1+t_2}{2} \\ 2(t - t_1) & t \geq \frac{t_1+t_2}{2} \end{cases} \quad \theta_{\max} = \infty. \quad (3)$$

Par dualité TF, les bornes optimales pour les signaux séparables en fréquence dépendent de la fréquence et s'expriment de manière similaire à l'équation (3).

Le cas des signaux non-séparables a été traité sur deux exemples significatifs, un premier séparable dans le plan TF (deux chirps parallèles), et le second purement non-séparable (deux composantes qui se croisent). Dans ce cas aussi, les bornes optimales existent, elles sont dépendantes du signal considéré et leurs valeurs théoriques satisfont à la règle du point milieu [3].

Elles admettent également une interprétation géométrique simple : la limite $\tau_{\max}(t, \omega)$ (resp. $\theta_{\max}(t, \omega)$) correspond à la distance mesurée selon l'axe temporel (resp. axe fréquentiel) entre les auto-termes engendrant l'interférence.

Les fonctions produit ont des capacités de séparation des auto et intertermes. Plus précisément, la fonction produit tem-

porel permet de séparer les interférences temporelles tandis que la fonction produit fréquentiel inclut les autotermes et termes d'interférences temporelles en les répartissant dans tout l'espace (t, ω, τ) . De manière duale, la fonction produit fréquentiel permet de séparer les autotermes des termes d'interférences fréquentielles.

Ces capacités de séparation résultent de la géométrie des fonctions produit qui est illustrée dans le cas de la fonction produit temporel pour des interférences temporelles (voir fig. 1). Les limites d'intégration optimales pour la réduction des interférences sont celles qui permettent de ne conserver que les autotermes.

3 Estimation des bornes d'intégration optimales

L'estimation des bornes optimales s'effectue en deux étapes, à savoir le lissage des fonctions produit suivi d'une procédure de détection des interférences.

3.1 Lissage des fonctions produit

Les composantes situées au même instant mais à des positions fréquentielles différentes engendrent dans la fonction produit temporel des oscillations haute-fréquence, selon t et τ , qui viennent se superposer aux auto et intertermes (voir fig. 1). Pour réduire l'influence de ces oscillations, nous effectuons un lissage de la fonction produit temporel avec un filtre gaussien bidimensionnel séparable dans le plan (t, τ) :

$$\bar{T}_{t,\omega}(\tau) = T_{t,\omega}(\tau) \star_{(\tau,t)} (\mathbf{G}_{\sigma_\tau}(\tau) \cdot \mathbf{G}_{\sigma_t}(t))$$

où $\mathbf{G}_\sigma(\tau)$ est la fonction gaussienne d'énergie unité et de variance σ^2 . Les paramètres décrivant la durée de la gaussienne $\sigma_\tau(\tau)$ et $\sigma_t(\tau)$ sont choisis linéairement décroissant de manière à prendre en compte la géométrie des termes d'interférences. Un filtrage similaire est effectué sur la fonction produit fréquentiel dans le plan (θ, ω) avec des filtres de durée décroissante selon θ .

3.2 Détection des termes d'interférence

La deuxième étape de la procédure d'estimation consiste à détecter les termes d'interférence sur les fonctions produit lissées (lignes continues sur la fig. 1). Les bornes d'intégration optimales sont alors estimées selon :

$$\tau_{\max}(t, \omega) = \min \left\{ \tau_0 \left| \left(\bar{T}_{t,\omega}(\tau_0) - \min_{\tau_+ < \tau < \tau_0} \bar{T}_{t,\omega}(\tau) \right) > \lambda_+^T \right. \right. \\ \left. \left. \vee \left(\bar{T}_{t,\omega}(\tau_0) < \lambda_-^T \right) \right\}. \quad (4)$$

Les seuils λ_+ et λ_- sont définis par :

$$\lambda_+^T(\tau) = \lambda_0^T - \lambda_\Delta^T \cdot \tau, \quad \lambda_-^T(\tau) = -\lambda_+^T(\tau). \quad (5)$$

Compte-tenu de la géométrie des termes d'interférence, les seuils sont choisis linéairement décroissants. τ_+ est une constante petite choisie de manière à éviter les problèmes de bords engendrés par le filtrage. Cette procédure de détection, appliquée en chaque point TF à la fonction produit temporel lissée permet d'obtenir les valeurs $\tau_{\max}(t, \omega)$ et appliquée à la fonction produit fréquentiel lissée, les valeurs de $\theta_{\max}(t, \omega)$.

4 Lissage local de la distribution de Wigner-Ville

Les bornes optimales fournissent une description détaillée de la géométrie des interférences du signal étudié. La distribution de WV est obtenue par lissage local de la DWV avec des filtres séparables. On entend par lissage local, un lissage effectué avec des filtres dont la taille dépend du point TF considéré.

4.1 Formalisme

La formalisation de la notion de lissage local impose de définir deux ensembles de variables temps et fréquence, le premier (t, ω) relatif à la convolution avec la DWV et le second (t', ω') relatif aux filtres. Ainsi dans le cas des filtres séparables rectangulaires utilisés pour la réduction des interférences, le filtre local est donné par :

$$\begin{aligned} \Phi(t', \omega', t, \omega) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}^{2D} \left\{ \text{rect}_{\tau_{\max}(t', \omega')}(\tau) \cdot \text{rect}_{\theta_{\max}(t', \omega')}(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

De manière plus générale, étant donnée une fonction arbitraire quadridimensionnelle $\Phi(t', \omega', t, \omega)$, on obtient une distribution également quadridimensionnelle $\text{WVL}(t', \omega', t, \omega)$ par convolution, selon les variables t et ω , de la distribution de Wigner-Ville avec le filtre local :

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \Phi(t', \omega', t, \omega) \star_{(t, \omega)} \text{WV}(t, \omega). \quad (7)$$

La distribution finale, appelée distribution de Wigner-Ville Locale (DWVL), est alors obtenue en égalant les deux ensembles de variables :

$$\text{WVL}(t, \omega) = \text{WVL}(t' = t, \omega' = \omega, t, \omega). \quad (8)$$

Bien que très intuitive, la formulation (8) ne permet pas d'exprimer de manière directe le lien entre la DWVL et le filtre local $\Phi(t', \omega', t, \omega)$. Ce lien peut être obtenu en exploitant la propriété de l'impulsion de Dirac, $f(t_0) = \int \delta(t - t_0) f(t) dt$, qui permet d'écrire la DWVL selon :

$$\text{WVL}(t, \omega) = \iint \text{WVL}(t', \omega', t, \omega) \delta(t' - t) \delta(\omega' - \omega) dt' d\omega'$$

qui, compte tenu de (7) et après intégration par rapport aux variables t' et ω' , s'écrit :

$$\text{WVL}(t, \omega) = \iint \Phi(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) \text{WV}(T, \Omega) dT d\Omega$$

L'intérêt de cette définition alternative de la DWVL, est de lier explicitement le filtre local à la distribution et par la même, de permettre l'étude de certaines propriétés de la DWVL.

4.2 Extension de la classe de Cohen

La DWVL n'appartient pas à la classe de Cohen. Cependant, compte tenue de l'équation (7), elle peut s'écrire :

$$\text{WVL}(t', \omega', t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}^{2D} \left\{ \phi(t', \omega', \theta, \tau) \cdot A(\theta, \tau) \right\}. \quad (9)$$

Cette écriture permet d'interpréter :

$$\phi(t', \omega', \theta, \tau) = \left(\mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau, t \rightarrow \theta}^{2D} \right)^{-1} \left\{ \Phi(t', \omega', t, \omega) \right\}$$

comme un noyau dépendant explicitement du temps et de la fréquence. Dans ce sens, les DWVL peuvent être vues comme une extension de la classe de Cohen.

4.3 Lien avec la méthode du noyau optimal adaptatif

Dans [4], Jones et Baraniuk ont proposé la méthode du noyau optimal adaptatif (NOA), qui détermine un noyau optimal pour chaque instant à partir de la fonction d'ambiguïté à court terme $A(t', \theta, \tau)$. En adoptant les notations du paragraphe précédent, la Distribution NOA s'écrit :

$$\text{NOA}(t', t, \omega) = \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega}^{2D} \left\{ \phi^{\text{NOA}}(t', \theta, \tau) \cdot A(t', \theta, \tau) \right\}$$

$$\text{NOA}(t, \omega) = \text{NOA}(t' = t, t, \omega).$$

Compte tenu de (9), la distribution NOA est membre de la classe des DWVL. Elle est caractérisée par le noyau local :

$$\phi(t', \theta, \tau) = \phi^{\text{NOA}}(t', \theta, \tau) \frac{A(t', \theta, \tau)}{A(\theta, \tau)}.$$

De manière plus générale, toutes les distributions utilisant la fonction d'ambiguïté à court terme sont membres de la classe des DWVL [2, 4].

4.4 Propriétés de la classe des DWVL

Chaque membre de la classe des DWVL est caractérisé par son noyau dépendant du point TF considéré. Dans ce paragraphe, nous donnons les conditions que doit satisfaire le noyau pour voir certaines propriétés satisfaites.

- Covariance en translation

$$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega) = \Phi(t' - t_0, \omega' - \omega_0, t, \omega)$$

$$\tilde{\phi}(t', \omega', \theta, \tau) = \phi(t' - t_0, \omega' - \omega_0, \theta, \tau)$$

où $\tilde{\Phi}$ (ou $\tilde{\phi}$) correspond au noyau local associé au signal translaté.

- Covariance en dilatation

$$\tilde{\Phi}(t', \omega', t, \omega) = \Phi\left(at', \frac{\omega'}{a}, at, \frac{\omega}{a}\right)$$

où $\tilde{\Phi}$ est le noyau local associé au signal dilaté. Le noyau doit être de la forme :

$$\Phi(t', \omega', t, \omega) = f(t' \cdot \omega', t \cdot \omega, t' \cdot \omega, t \cdot \omega')$$

- Réalité $\phi(t', \omega', \theta, \tau) = \phi(t', \omega', -\theta, -\tau)$

- Conservation de l'énergie (condition suffisante)

$$1 = \iint \Phi(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) dt d\omega \quad \forall T, \Omega$$

- Distributions marginales (condition suffisante)

- Marginale temporelle

$$\int \Phi(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) d\omega = \delta(t - T) f(t, T, \Omega)$$

$$\text{avec } f(t, T, \Omega) = 1 \quad \forall t = T$$

- Marginale fréquentielle

$$\int \Phi(t, \omega, t - T, \omega - \Omega) dt = \delta(\omega - \Omega) f(\omega, T, \Omega)$$

$$\text{avec } f(\omega, T, \Omega) = 1 \quad \forall \omega = \Omega$$

La DWVL à interférences réduites est covariante en translation et réelle. Les lois marginales temporelles (resp. fréquentielles) sont satisfaites pour la classe des signaux séparables en temps (resp. fréquence). L'énergie est conservée de manière triviale dans ce cas.

5 Exemple

Le signal utilisé est constitué de deux composantes, un chirp à loi de modulation de fréquence sinusoidale et une gaussienne centrée autour de l'origine. Dans la DWV de ce signal (fig. 2), la composante gaussienne est masquée par les interférences. Le résultat obtenu avec la DWVL (fig. 3) est meilleur que celui obtenu avec la méthode du noyau optimal [1] (fig. 4). Notamment, la réduction des interférences est plus efficace et les autotermes sont bien conservés (pas d'interruption ni de linéarisation des composantes comme cela peut s'observer avec la méthode de noyau optimal).

6 Conclusion

La DTF présentée permet une réduction efficace des interférences. Elle a été appliquée avec succès à l'analyse TF de signaux vibratoires [5]. Une version rapide de l'algorithme a été développée; elle est disponible sur : <http://cran.u-nancy.fr/>. Les poursuites envisagées à ce travail sont d'une part, l'utilisation de filtres gaussiens plutôt que rectangulaires et d'autre part, l'extension de cette approche aux lissages locaux orientés.

Références

- [1] Baraniuk (R. G.) et Jones (D. L.). – A signal-dependent time-frequency representation : optimal kernel design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, n° 4, Avril 1993, pp. 1589–1602.
- [2] Czerwinski (R. N.) et Jones (D. L.). – Adaptive cone-kernel time-frequency analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 7, Juillet 1995, pp. 1715–1719.
- [3] Flandrin (P.). – *Temps-fréquence*. – Hermès, Paris, 1993.
- [4] Jones (D. L.) et Baraniuk (R. G.). – An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, n° 10, Octobre 1995, pp. 2361–2371.
- [5] Oehlmann (H.). – *Analyse temps-fréquence de signaux vibratoires de boîtes de vitesses*. – Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 15 Juillet 1996.

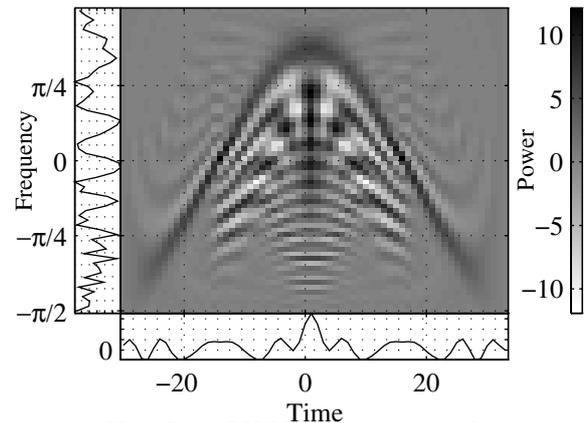


FIG. 2 — DWV du signal exemple.

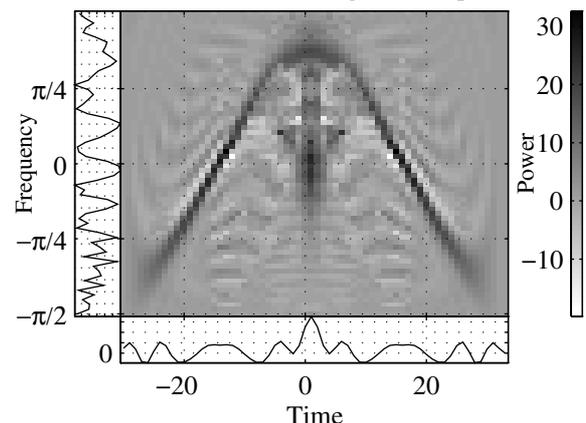


FIG. 3 — DWVL du signal exemple.

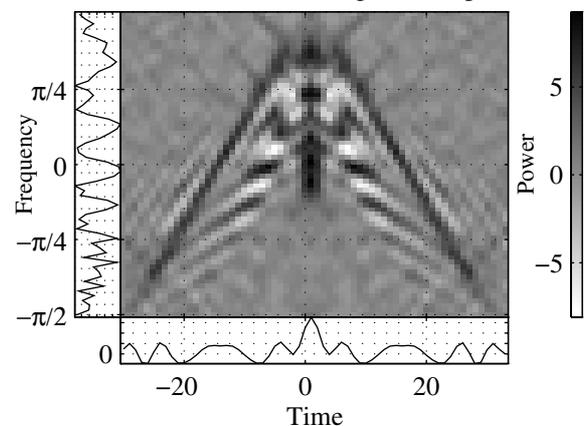


FIG. 4 — DTF à noyau optimal du signal exemple.