

Méthode de variable complexe régularisée pour l'extrapolation de signaux

G. Poulalion⁽¹⁾, J.J. Bouquet⁽¹⁾, A.L. Charbonniaud⁽²⁾, R. Gay⁽²⁾

⁽¹⁾CEA/CESTA, DEV/SFUR, BP2, F 33114 Le Barp, France

e-mail : guy@goelette.tsi.u-bordeaux.fr

⁽²⁾Laboratoire de Mathématiques Pures, ERS 0127, 351 cours de la Libération, F 33042 Talence Cedex, France

e-mail : gayr@math.u-bordeaux.fr

RÉSUMÉ

Nous décrivons une méthode itérative utilisant la variable complexe pour l'extrapolation de signaux d'énergie finie à bande limitée. Cet algorithme est utilisé pour améliorer la résolution de la transformée de Fourier de signaux stationnaires par morceaux. Par la suite nous régularisons l'opérateur introduit et nous appliquons l'algorithme obtenu à des signaux issus de mesures de Surface Equivalente Radar (SER).

ABSTRACT

We describe an iterative method using complex variable for extrapolating finite energy band-limited signals. This algorithm is used to improve the Fourier transform resolution for locally stationary signals. Then, we regularize the operator and use the new scheme for Radar Cross Section (RCS) measurements.

1 Introduction

1.1 Notations

Dans la suite, nous aurons besoin de certains espaces de fonctions que voici. Soient δ , σ et τ trois réels strictement positifs. Nous travaillons dans l'espace de Hilbert des fonctions d'énergie finie $H = L^2(\mathbb{R})$ et plus particulièrement dans deux de ses sous-espaces fermés :

- $H_1 = L^2_{0,2\sigma}(\mathbb{R})$ des fonctions d'énergie finie dont la transformée de Fourier $F(g)$ est à support dans $[0, 2\sigma]$
- $H_2 = L^2([-\tau, \tau])$ des restrictions à $[-\tau, \tau]$

D'autre part, on désigne par Π_δ le demi-plan ouvert du plan complexe défini par $\Pi_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im}(\zeta) > -\delta\}$ et par H_δ^2 l'espace de Hardy des fonctions holomorphes définies dans Π_δ :

$$H_\delta^2 = \left\{ \psi : \Pi_\delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe : } \sup_{y > -\delta} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x + iy)|^2 dx < +\infty \right\} \quad (1)$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|\psi\|_{H_\delta^2}$ et le produit scalaire associé :

$$\|\psi\|_{H_\delta^2} = \left(\sup_{y > -\delta} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x + iy)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

1.2 Rappels

Nous rappelons rapidement deux méthodes apportant une réponse au problème d'extrapolation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } g|_{[-\tau, \tau]} \text{ pour } g \in H_1 \\ \text{donner un procédé d'approximation de } g \text{ sur } H \end{array} \right. \quad (3)$$

La première méthode est itérative et connue comme méthode de Papoulis ([1], [2], [3]). Elle fait intervenir les opérateurs suivants :

- $I_1 : H_1 \rightarrow H$ l'injection canonique dont l'opérateur adjoint est la projection
- $P_1 : H \rightarrow H_1$ définie, pour $\varphi \in H$, par $P_1(\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma(t-s)} \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} \varphi(s) ds$
- $I_2 : H_2 \rightarrow H$ l'injection canonique d'adjoint la projection
- $P_2 : H \rightarrow H_2$ définie, pour $\varphi \in H$, par $P_2(\varphi)(t) = 1_{[-\tau, \tau]}(t)\varphi(t)$

Cette méthode conduit à l'algorithme itératif convergeant dans H pour $g \in H$:

$$\begin{cases} g_{k+1} = g_1 + (Id_H - P_2)P_1(g_k) \\ g_1 = P_2I_1(g) \end{cases} \quad (4)$$

où les g_k sont les approximations successives de la fonction g .

La méthode introduite par Aizenberg ([4]) n'est pas itérative et ne tient pas compte de l'aspect bande limitée des signaux. Elle s'appuie sur le contrôle de l'approximation dans H de la suite des extrapolées des valeurs $g(x_1), \dots, g(x_n)$ où $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points de $[-\tau, \tau]$ et $g \in H_1$. Pour N points donnés, on construit la formule d'extrapolation explicite, pour $z \in \mathbb{C}$, suivante :

$$\tilde{g}_N(z) = \sum_{1 \leq k \leq N} g(x_k) \frac{2i\delta}{z - x_k + 2i\delta} \prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{(z - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)}{(z - x_j + 2i\delta)(x_k - x_j)} \quad (5)$$

Cette méthode est clairement numériquement instable (petits dénominateurs). Nous l'avons modifiée en utilisant une base de fonctions de H_2 plutôt que les points de $[-\tau, \tau]$ et en utilisant la "transformation de Cauchy modifiée" $C_{2\delta} : H_2 \rightarrow H_\delta^2$:

$$C_{2\delta}(\varphi)(z) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\varphi(t)}{z - t + 2i\delta} dt \quad (6)$$

2 Nouvelle méthode itérative

La méthode présentée ici est fondée sur le fait que l'algorithme (4) peut être défini dans le cadre des espaces de Hardy H_δ^2 .

2.1 Réécriture de l'algorithme de Papoulis

On introduit l'opérateur $\beta = P_2 \circ I_1$ et son adjoint $\beta^* = P_1 \circ I_2$. On utilise alors l'opérateur auto-adjoint, compact et injectif $\beta^*\beta$ pour construire $B_0 : H_1 \rightarrow H_1$ comme suit :

$$\begin{cases} B_0(\varphi) = \varphi + \beta^*\beta(g - \varphi) \\ \varphi \in H_1 \\ g \in H_1 \text{ donnée par } P_2(g) = g|_{[-\tau, \tau]} \end{cases} \quad (7)$$

On introduit alors le schéma itératif équivalent au schéma (4) :

$$\begin{cases} g_{k+1} = B_0(g_k) \\ g_0 = P_1 P_2(g) \end{cases} \quad (8)$$

La convergence de ce schéma résulte des calculs de Papoulis ([1]) utilisant le système singulier de β .

2.2 Schéma itératif à paramètre

On s'inspire de la construction de B_0 et des propriétés de $C_{2\delta}$ pour relier les deux méthodes ([5], [6]). On introduit tout d'abord les fonctions suivantes :

- $\Pi : H_\delta^2 \rightarrow H$ opérateur de restriction : $\psi \mapsto \Pi(\psi) = \psi|_{\mathbb{R}}$
- $i_\sigma^\delta : H_1 \rightarrow H_\delta^2$ injection canonique dont l'adjoint est le projecteur Π_σ^δ
- $R_\tau : H_\delta^2 \rightarrow H_2$ opérateur de restriction qui est relié à l'adjoint de $C_{2\delta}$ par $C_{2\delta}^* = 2i\pi R_\tau$

On peut maintenant définir un opérateur, sur le modèle de β , noté $\alpha_\sigma^\delta : H_1 \rightarrow H_2$ comme $\alpha_\sigma^\delta = R_\tau \circ i_\sigma^\delta$ et dont l'adjoint est $(\alpha_\sigma^\delta)^* = \Pi_\sigma^\delta \circ R_\tau^* = -\frac{1}{2i\pi} \Pi_\sigma^\delta \circ C_{2\delta}$. On montre que les deux opérateurs auto-adjoints $\beta^*\beta$ et $(\alpha_\sigma^\delta)^* \alpha_\sigma^\delta$ peuvent être reliés par l'égalité :

$$\begin{cases} (\alpha_\sigma^\delta)^* \alpha_\sigma^\delta(\varphi)(z) = \beta^*\beta(\varphi)(z + 2i\delta) \\ z \in \mathbb{C}, \varphi \in H_1 \end{cases} \quad (9)$$

Finalement, on pose $B_\delta(\varphi) = \varphi + (\alpha_\sigma^\delta)^* \alpha_\sigma^\delta(g - \varphi)$, $\varphi \in H_1$ et $g \in H_1$ donnée par $g|_{[-\tau, \tau]}$ et on lui associe le schéma itératif :

$$\begin{cases} g_{k+1} = B_\delta(g_k) \\ g_0(\cdot) = P_1 P_2(g)(\cdot + 2i\delta) \end{cases} \quad (10)$$

Remarque : Le paramètre δ , issu de la méthode de Aizenberg, permet de stabiliser et d'accélérer la convergence du schéma itératif.

2.3 Régularisation

Les opérateurs B_0 et B_δ rentrent dans le cadre de la méthode de régularisation décrite par De Frise et De Mol ([7]). En introduisant un paramètre λ , cette régularisation permet un meilleur contrôle de la convergence et une meilleure prise en compte d'un bruit additif. On construit un nouveau schéma ($\delta \geq 0$) itératif régularisé :

$$\begin{cases} g_{k+1}(t) = g_k + \lambda \beta^*\beta(g - g_k)(t + 2i\delta) \\ g_0(t) = P_1 P_2(g)(t + 2i\delta) \end{cases} \quad (11)$$

sachant que $\beta^*\beta(\varphi)(t) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-i\sigma(t-s)} \frac{\sin \sigma(t-s)}{\pi(t-s)} \varphi(s) ds$

3 Application numérique

3.1 Application sur un signal synthétique

Nous avons validé ce nouveau schéma sur le signal temporel, réel construit par Gerschberg [3]. Il est défini de la manière suivante :

$$g(t) = 125 \frac{\sin(t/32)}{t/32} \cos(3.5t/32) \quad (12)$$

Ce signal représente la transformée de Fourier inverse de :

$$G(\xi) = 2000\pi \left[\chi_{[-\frac{4.5}{32}, -\frac{2.5}{32}]}(\xi) + \chi_{[\frac{2.5}{32}, \frac{4.5}{32}]}(\xi) \right] \quad (13)$$

où χ_E désigne l'indicatrice de E .

Nous considérons 29 échantillons centrés de ce signal bruité par un bruit blanc gaussien dont la variance est calculée pour que le rapport signal à bruit soit de 0 dB.

La figure 1 représente le signal initial bruité et le signal prolongé par notre schéma. On note l'effet de lissage du schéma itératif.

La figure 2 représente la transformée de Fourier du signal initial, du signal prolongé et du signal théorique non bruité. On remarque la bonne séparation des deux contributeurs après prolongement.

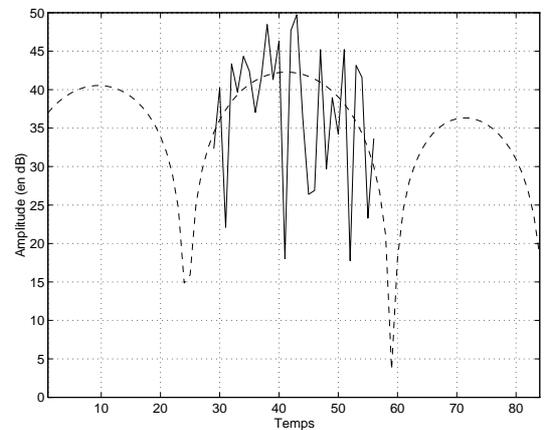


FIG. 1 — Signal original (-) et signal prolongé (- -)

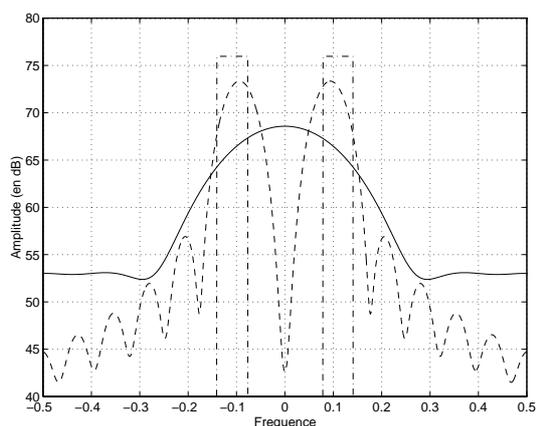


FIG. 2 — Transformée de Fourier du signal original (-), prolongé (- -) et théorique (· ·)

3.2 Application sur un signal issu de mesures de SER

Nous illustrons l'efficacité de notre algorithme sur un signal réel. Ce problème a pour but la localisation des points brillants d'une cible. On peut montrer que l'amplitude de l'écho radar d'une cible illuminée par une onde plane à la fréquence f , peut être modélisée par :

$$C(f) = \sum_{i=1}^p a_k \exp(-2i\pi \frac{2f}{c} x_k) \quad (14)$$

où p est le nombre de points brillants de la cible, a_k et x_k sont respectivement l'amplitude et la position de la projection sur l'axe de visée du radar du $k^{\text{ème}}$ point brillant. Ce modèle est valable uniquement sur des zones fréquentielles restreintes. Une analyse par transformée de Fourier sur ces zones ne permet pas d'obtenir le pouvoir de discrimination spatiale nécessaire. On se propose donc d'appliquer notre méthode.

Le signal étudié correspond à l'écho radar d'une maquette de missile simplifié. La bande fréquentielle d'étude est le segment [8.2, 9.2] GHz. Cette largeur de bande permet d'obtenir une résolution spatiale de 15 cm par transformée de Fourier. On dispose de 25 points de mesure sur l'intervalle d'étude.

La figure 3 représente la transformée de Fourier du signal initial, la figure 4 la transformée de Fourier du signal extrapolé et les résultats obtenus en utilisant l'algorithme ESPRIT [8] couplé avec l'estimateur d'ordre AIC [9]. On note que la méthode proposée permet de séparer deux points brillants de l'ailette arrière (due à des discontinuités de géométrie) ainsi qu'une onde rampante. L'algorithme ESPRIT ne peut, quant à lui, que dissocier deux points sur l'arrière de la maquette.

4 Conclusion

L'introduction du paramètre δ dans le schéma itératif donne des résultats comparables à ceux du schéma de Papoulis en apportant une plus grande souplesse dans l'estimation *a priori* du paramètre σ (borne de la transformée de Fourier du signal). Le paramètre λ , quant à lui, permet une meilleure prise en compte du bruit. Cette nouvelle méthode apporte, en outre,

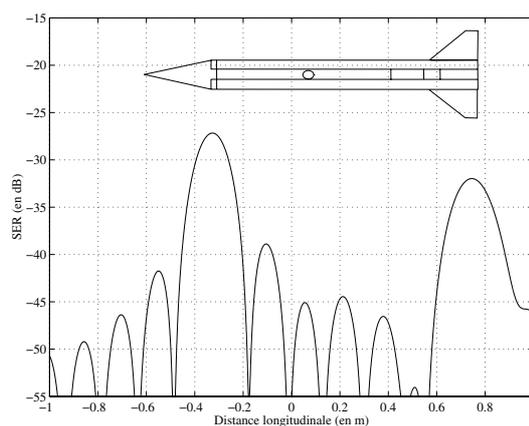


FIG. 3 — Transformée de Fourier du signal original

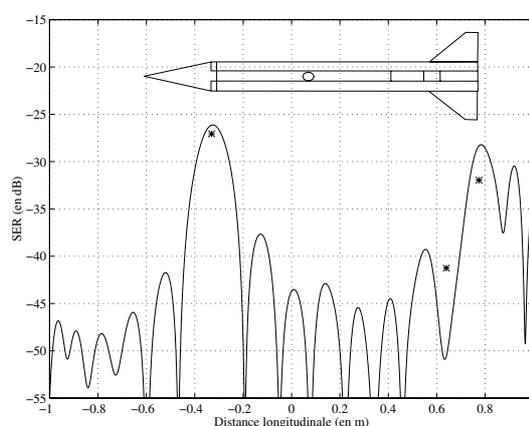


FIG. 4 — Transformée de Fourier du signal extrapolé (-) et résultats obtenus par l'algorithme ESPRIT (*)

une alternative aux méthodes basées sur la décomposition en sous-espaces dans les cas où le temps d'observation (la largeur de la bande fréquentielle dans le cas de signaux de SER) et le nombre de points du signal sont réduits.

Références

- [1] A. PAPOULIS, A New Algorithm in Spectral Analysis and Band-limited Extrapolation, IEEE CAS 22, pp. 735-742, 1975
- [2] D. SLEPIAN and H.O. POLLACK, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I. Bell System Tech. J. 40(1961) 43-63, II ibid 40 (1961) 65-84, III ibid 41 (1962) 1295-1336
- [3] R.W. GERSCHBERG, Super-resolution through error energy reduction, Optica Acta 21, pp. 709-720, 1974
- [4] L. AIZENBERG, Carleman's Formulas in Complex Analysis. Theory and Applications, MIA vol. 244, Kluwer acad. publ., 1993
- [5] A.L. CHARBONNIAUD, Extrapolation de signaux d'énergie finie à bande limitée. Application à la SER, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1996

- [6] A.L. CHARBONNIAUD, J.F. CROUZET, R. GAY, Sur l'extrapolation de signaux d'énergie finie à bande limitée, Rendiconti dell' Instituto di Matematica dell' Università di Trieste, à paraître
- [7] M. DEFRISE and C. DE MOL, A note on stopping rules for iterative regularization methods and filtered SVD, Inverse Problem : An Interdisciplinary Study (Academic Press, New-York, 1987) 261
- [8] R. ROY and T. KAILATH, ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, vol. 37, pp. 286-299, 1989
- [9] M. WAX and T. KAILATH, Detection of signals by information theoretic criteria, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, vol. 33, pp. 387-392, 1985