

# STRUCTURES D'EGALISATION CYCLIQUE EQMM

Gilles LATOUCHE, Didier PIREZ et Pierre VILA

Thomson-CSF Communications, TTC/TSI, BP 156, 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers Cedex, FRANCE.  
tel : (33) 01 46 13 30 87; Fax : (33) 01 46 13 25 55; E-mail : Gilles.Latouche@tcc.thomson.fr

**Résumé :** Les techniques classiques d'égalisation des signaux numériques modulés supposent que le signal utile reçu est perturbé par un bruit de nature stationnaire. Or, il s'avère souvent que les perturbations proviennent d'autres modulations numériques (brouillage lié à l'accès multiple dans un réseau ou brouilleurs de rythme symbole quelconque). Le bruit est alors polycyclostationnaire. Dans ce papier, nous développons de nouvelles structures d'égalisation suivant le critère EQMM utilisant cette propriété.

Après de brefs rappels sur la cyclostationnarité et le filtrage cyclique, les nouvelles structures d'égaliseurs linéaire et à décision dans la boucle sont présentées. Enfin, par simulations, leurs performances en TEB sont comparées à celles des structures classiques.

## I. Introduction

Les techniques classiques de filtrage et de démodulation supposent que les signaux reçus sont Stationnaires (S). Or, il s'avère que les signaux issus de modulations numériques sont PolyCycloStationnaires (PCS) : leur fonction de corrélation varie de façon périodique dans le temps [1].

On se propose ici d'utiliser cette propriété afin d'améliorer les techniques d'égalisation des signaux numériques. Dans les récepteurs sous-optimaux d'égalisation qui font l'objet de cet article, les contraintes fixées dans [2] sur le temps symbole et la fréquence porteuse des brouilleurs disparaissent. Les structures imposées sont optimisées suivant le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM).

Après de brefs rappels sur la cyclostationnarité et le filtrage optimal de signaux PCS, le cas de l'égaliseur à décision dans la boucle (DFE) est traité, l'égaliseur linéaire s'en déduisant facilement. Enfin des résultats de simulations en Taux d'Erreur Binaire (TEB) effectuées sur ces structures d'égaliseurs cycliques seront présentés et comparés aux performances obtenues avec des égaliseurs classiques.

## II. Rappels

### II.1. Cyclostationnarité

Les propriétés de cyclostationnarité des signaux ont été largement abordées [1]. On se contentera de rappeler qu'un signal  $z(t)$  est dit PCS si sa fonction de corrélation peut se décomposer en série de Fourier suivant :

$$\Gamma_{zz}(t, \tau) = E\left[z\left(t + \frac{\tau}{2}\right)z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \sum_{\{\alpha\}} \Gamma^{(\alpha)}(\tau)e^{j2\pi\alpha t} \quad (1)$$

**Abstract :** Usual equalization techniques assume that the signal of interest is jammed with stationary noise. However, this perturbation is often due to other modulated signals (adjacent or co-channel interferences in multiple access systems or any other interference with arbitrary baud rate). Such a noise is polycyclostationary. In this paper, new equalization structures under the MMSE (Minimum Mean Square Error) criterion are built using this property.

After a brief overview concerning cyclostationarity and cyclic filtering, new linear and decision feedback equalizers are presented. Finally, by simulations, their BER (Binary Error Ratio) performances are compared to those of the conventional structures.

ou si sa fonction de corrélation conjuguée  $\Gamma_{zz^*}(t, \tau)$  présente les mêmes propriétés.

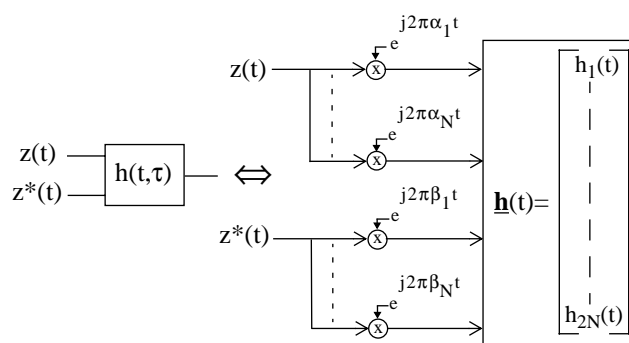
Dans (1),  $\{\alpha\}$  représente l'ensemble des fréquences cycliques. Celles-ci sont liées à la fréquence porteuse et au rythme de modulation.

Par ailleurs, un signal est dit stationnaire (S) si  $\Gamma_{zz}(t, \tau) = \Gamma^{(0)}(\tau)$  et  $\Gamma_{zz^*}(t, \tau) = 0$ .

### II.2. Filtrage cyclique

La référence précédente traite le cas du filtrage de Wiener cyclique optimal. On rappelle ici ces notions.

De même que le filtre optimal pour des signaux S est réalisé par un filtre Linéaire Invariant dans le Temps (LIT), le filtrage optimal de signaux PCS est obtenu en utilisant des filtres Linéaires Variant dans le Temps (LVT) possédant les mêmes périodicités que celles présentes dans les fonctions de corrélation du signal à filtrer. On peut montrer que ce filtrage LVT est équivalent à un filtrage LIT réalisé sur le signal  $z(t)$  et sur ses versions, éventuellement conjuguées, et décalées en fréquence de toutes les fréquences cycliques (cf. figure 1).



Filtrage LVT.

Filtrage LIT.

figure 1 : Equivalence entre filtrage LVT et LIT

### III. Egaliseur DFE cyclique

#### III.1. Expression du signal reçu

Le signal reçu  $z(t)$  est composé d'un utile,  $x_0(t) = A_0 \sum_k a_{0,k} h_0(t-kT)$ , d'un bruit  $n(t)$  supposé stationnaire, dont les composantes sont décorrélées et de  $N$  signaux adjacents brouilleurs issus de modulations linéaires. Parmi ces derniers, on distinguera les  $N_1$  brouilleurs au même rythme symbole que l'utile (les autres communications dans le cas d'un réseau à accès multiple), des  $N_2$  brouilleurs ayant des rythmes symboles différents (brouilleur bande étroite ou bande large) qui feront partie du bruit  $b(t)$ .

Le signal reçu  $z(t)$  s'écrit alors :

$$z(t) = \sum_{n=0}^{N_1} A_n \sum_k a_{n,k} h_n(t-kT) e^{j2\pi f_n t + \phi_n} + b(t) \quad (2)$$

avec

$$b(t) = \sum_{n=0}^{N_2} B_n \sum_k b_{n,k} g_n(t-kT_n) e^{j2\pi f_n t + \phi_n} + n(t) \quad (3)$$

#### III.2. Structure

L'égaliseur DFE stationnaire a été développé par de nombreux auteurs. On se référera notamment à [3]. Le DFE cyclique a la structure de la figure 2.

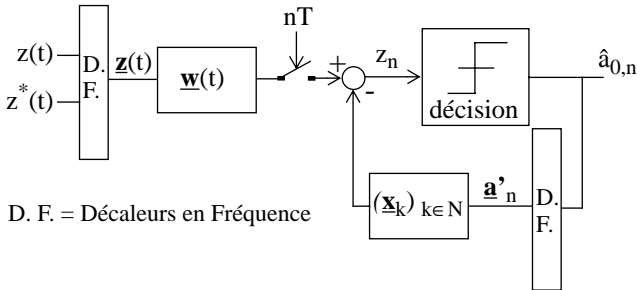


figure 2 : Structure du DFE cyclique

L'entrée du DFE est vectorielle. Chaque décalage en fréquence du signal reçu permet de créer une composante de  $\underline{z}(t)$  et est choisi de façon à faire apparaître une corrélation encore absente entre 2 des composantes du vecteur. Il apparaît ainsi dans  $\underline{z}(t)$  toutes les fréquences cycliques du signal reçu, à l'exception de celles liées au rythme d'échantillonnage qui sont redondantes car l'échantillonnage replie l'information qu'elles apportent sur la fréquence cyclique nulle. Apparaissent aussi éventuellement des signaux corrélés avec une des composantes créées.

$\underline{z}(t)$  peut donc être généré par itération :

- la première composante de  $\underline{z}(t)$  est  $z(t)$ .
- Soit  $\underline{z}(t)$  de dimension  $n$ .

$$z_{n+1}(t) \in \underline{z}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists i \leq n, & \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_{z_i z_{n+1}}(t, \tau) dt \neq 0 \\ \forall i \leq n, \exists k \in N, & z_{n+1}(kT) \neq z_i(kT) \end{cases} \quad (4)$$

Après avoir décalé en fréquence le signal reçu ou son conjugué, on montre que le signal multidimensionnel à l'entrée du DFE peut s'écrire :

$$\underline{z}(t) = \sum_k H^T(t-kT) \underline{a}_k + \underline{b}(t) \quad (5)$$

$\underline{a}_k$  est appelé vecteur des symboles secondaires. Sa  $p^{\text{ième}}$  composante s'écrit  $a_{n,k} e^{j2\pi(f_n + \alpha_p)kT}$  ou  $a_{n,k}^* e^{j2\pi(-f_n + \beta_p)kT}$

La partie récursive élimine l'interférence intersymbole des symboles passés sur l'entrée multidimensionnelle. On construit donc son entrée vectorielle  $\underline{a}'_k$  à partir des symboles décidés décalés en fréquence. Les composantes de  $\underline{a}'_k$  sont ainsi celles de  $\underline{a}_k$  liées au signal utile  $x_0(t)$ .

#### III.3. Critère EQMM cyclique

Le critère EQMM de l'égaliseur DFE stationnaire  $\xi = E[|e_k|^2] = E[|z_k - a_k|^2]$  n'est plus utilisable car l'erreur n'est plus stationnaire, elle dépend du temps. Le critère devient donc un critère instantané et on montre que ce dernier équivaut au critère moyen suivant :

$$\xi = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[|e_k|^2] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[|z_k - a_{0,k}|^2] \quad (6)$$

En effet, le filtrage réalisé équivaut à un filtrage LVT, les erreurs sont donc indépendantes les unes des autres et, minimiser (6) revient à minimiser l'EQM à chaque instant.

#### III.4. Expression des filtres et EQMM

L'erreur instantanée s'écrit :

$$e_n = \underline{z}^T(t) \otimes \underline{w}(t) \Big|_{t=nT} - \sum_{q \in Z} (\hat{\underline{a}}'_{n-q})^T \underline{x}_q - \hat{a}_{0,n} \quad (7)$$

On suppose que toutes les décisions prises sont exactes soit  $\hat{a}_{0,n} = a_{0,n}$  et on introduit  $M$ , une matrice de masquage telle que  $\underline{a}'_k = M \underline{a}_k$ .

Minimiser (7) revient à minimiser :

$$R_\xi(f) = (\underline{\Phi}(f) - M^T \underline{X}(f) - \underline{c}_1)^T R_a (\underline{\Phi}(f) - M^T \underline{X}(f) - \underline{c}_1) + \frac{1}{T} \sum_n \underline{w}^H \left( f - \frac{n}{T} \right) R_b \left( f - \frac{n}{T} \right) \underline{w} \left( f - \frac{n}{T} \right) \quad (8)$$

avec

- $\underline{\Phi}(f) = \frac{1}{T} \sum_n H \left( f - \frac{n}{T} \right) \underline{w} \left( f - \frac{n}{T} \right)$ .

- $R_b(f) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \text{TF} \left( E \left[ \underline{b}^* \left( kT + \frac{\tau}{2} \right) \underline{b}^T \left( kT - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right)$ , la

matrice d'intercorrélation du bruit  $\underline{b}(t)$ .

- $R_a = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E[\underline{a}_{-n} \underline{a}_{-n}^T]$ , la matrice de corrélation des

symboles secondaires.

- $\underline{c}_1^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ , un vecteur de masquage tel que

$$\underline{c}_1^T \underline{a}_{-n} = a_{0,n}$$

Par calcul des variations, on montre que le filtre "avant"  $\underline{w}(t)$  a pour expression fréquentielle :

$$\underline{\mathbf{W}}(f) = R_b^{-1}(f)H(f)R_a[Id + K(f)]^{-1}(M\underline{\mathbf{X}}(f) + \underline{\mathbf{c}}_1) \quad (9)$$

$$\text{avec } K(f) = \frac{1}{T} \sum_n H\left(f - \frac{n}{T}\right) R_b^{-1}\left(f - \frac{n}{T}\right) H^\dagger\left(f - \frac{n}{T}\right) R_a \quad (10)$$

Cette expression multidimensionnelle est analogue à celle de [3] dans le cas stationnaire : le filtre avant se décompose en un filtre adapté suivi d'un filtre au rythme symbole. La dernière partie du filtre fait en sorte de ne pas toucher à l'interférence des symboles passés puisque c'est la partie récursive qui en est chargée.

En réinjectant (9) dans (8), et en posant  $\underline{\mathbf{c}}_1' = M\underline{\mathbf{c}}_1$  on obtient la quantité à minimiser par rapport au filtre "arrière" :

$$\xi = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} [\underline{\mathbf{X}}(f) + \underline{\mathbf{c}}_1']^\dagger M R_a [Id + K(f)]^{-1} M^T [\underline{\mathbf{X}}(f) + \underline{\mathbf{c}}_1'] df \quad (11)$$

Par calcul des variations, le filtre "arrière" a pour expression :

$$\underline{\mathbf{X}}(f) = \sum_{q=1}^Q \underline{\mathbf{x}}_q e^{-j2\pi f q T} \quad \text{où} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 & \dots & \underline{\mathbf{x}}_q & \dots & \underline{\mathbf{x}}_Q \end{bmatrix}^T = T^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_q & \dots & A_Q \end{bmatrix}^T \underline{\mathbf{c}}_1'$$

avec  $T$ , une matrice de Toeplitz par bloc, d'élément générique  $(T)_{l,c} = A_{l-c}$  où chaque matrice  $A_q$  est donné par :

$$A_q = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} M R_a [Id + K(f)]^{-1} M^T e^{j2\pi f q T} df \quad (13)$$

Par (11) et (12), on montre enfin que l'EQM  $\xi$  vaut :

$$\xi = \underline{\mathbf{c}}_1' \left[ A_0 - \begin{bmatrix} A_{-1} & \dots & A_{-q} & \dots & A_{-Q} \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_q & \dots & A_Q \end{bmatrix}^T \right] \underline{\mathbf{c}}_1'$$

### III.5. Egaliseur linéaire cyclique

L'expression du filtre de l'égaliseur linéaire se déduit de celle du filtre "avant" du DFE, en posant  $\underline{\mathbf{X}}(f) = \underline{\mathbf{0}}$  ( $\underline{\mathbf{0}}$  désigne le vecteur nul) dans (9).

On trouve alors

$$\underline{\mathbf{W}}(f) = R_b^{-1}(f)H(f)R_a[Id + K(f)]^{-1} \underline{\mathbf{c}}_1 \quad (14)$$

L'EQM de l'égaliseur linéaire devient  $\xi = \underline{\mathbf{c}}_1' A_0 \underline{\mathbf{c}}_1$  soit :

$$\xi = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \underline{\mathbf{c}}_1^T R_a \left[ Id + \frac{1}{T} \sum_k H\left(f - \frac{k}{T}\right) R_b^{-1}\left(f - \frac{k}{T}\right) H^\dagger\left(f - \frac{k}{T}\right) R_a \right]^{-1} \underline{\mathbf{c}}_1 df$$

## IV. Exemples

### IV.1. Brouilleur au rythme de l'utile : $T_1 = T$

Le signal reçu  $z(t)$  est composé

- de l'utile  $s_0(t)$  : une modulation BPSK de période symbole  $T$ , dont la forme d'onde est un demi Nyquist.
- d'un brouilleur  $s_1(t)$  : une autre modulation BPSK de

période  $T_1=T$ , décalée en fréquence de  $f_1$  et telle que le rapport de puissance vaut  $S_0/S_1 = -20$  dB .

- d'un bruit blanc tel que  $E_b/N_0 = 10$  dB .

Une seconde entrée :  $z^*(t)e^{j4\pi f_1 t}$  permet d'utiliser la corrélation entre le brouilleur et son conjugué.

Les composantes de (5) s'écrivent alors :

$$\underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z^*(t)e^{j4\pi f_1 t} \end{bmatrix}$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_0(t) & 0 \\ h_1(t-t_1)e^{j2\pi f_1 t + j\phi_1} & 0 \\ 0 & h_0(t)e^{j4\pi f_1 t} \\ 0 & h_1(t-t_1)e^{j2\pi f_1 t - j\phi_1} \end{bmatrix}$$

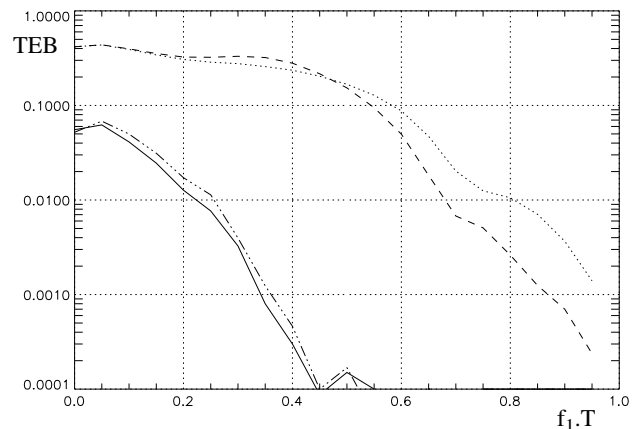
$$\underline{\mathbf{a}}_k = \begin{bmatrix} A a_k \\ B b_k e^{j2\pi f_1 k T} \\ A a_k e^{j4\pi f_1 k T} \\ B b_k e^{j2\pi f_1 k T} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{bmatrix} n(t) \\ n^*(t)e^{j4\pi f_1 t} \end{bmatrix}$$

Le brouilleur étant au rythme symbole de l'utile, la corrélation créée par la seconde entrée se retrouve dans la matrice de corrélation des symboles secondaires qui devient

$$\text{Si } 2f_1 T \in Z \quad R_a = \begin{bmatrix} A^2 & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & B^2 \\ A^2 & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & B^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sinon, i.e. dans le cas général, } R_a = \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & B^2 \\ 0 & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 & B^2 \end{bmatrix}$$

Les performances en TEB obtenues sont présentées sur la figure 3.



--- LINEAIRE STATIONNAIRE    - - - D.F.E. STATIONNAIRE  
- - - LINEAIRE CYCLIQUE    ——— D.F.E. CYCLIQUE

figure 3 : Performances comparées.  $T_1=T$

On constate un gain en bande important de l'ordre de 60%, ce qui prouve l'intérêt de ces structures. Si le brouilleur est de puissance moindre, l'amélioration des performances l'est également mais le cas simulé est typique d'un pire cas servant à dimensionner un système FDMA.

**IV.2. Brouilleur bande large :  $T_1 < T$**

Le signal reçu  $z(t)$  est identique à celui de l'exemple 1 mais le brouilleur a un rythme symbole  $T_1$  différent de l'utile. On choisit le vecteur des entrées :

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z^*(t)e^{j4\pi f_1 t} \\ z(t)e^{-j2\pi \frac{t}{T_1}} \\ z(t)e^{j2\pi \frac{t}{T_1}} \\ z(t)e \end{bmatrix} \quad (15)$$

Le brouilleur fait dans ce cas partie de la matrice de bruit.

Dans cet exemple, le brouilleur est à bande large. On a choisi  $T_1=0,377T$ .

Les performances en TEB obtenues sont présentées sur la figure 4.

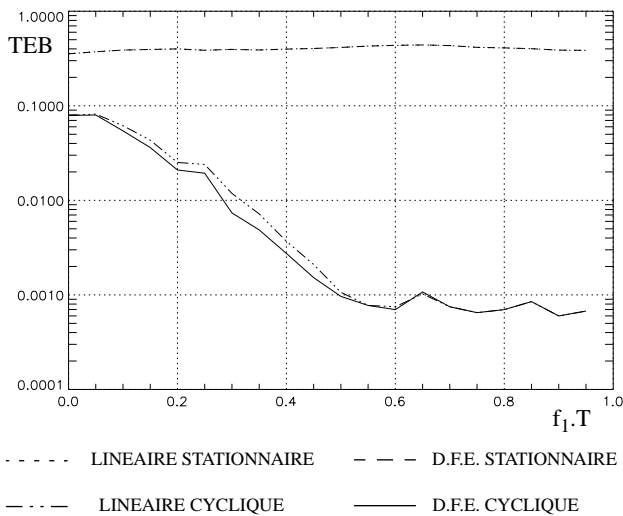


figure 4: Performances comparées.  $T_1 < T$

On constate que les structures présentées permettent de démoduler le signal utile, ce qui n'est pas possible avec les structures stationnaires où il faudrait un écart entre porteuse tel que  $f_1 T > 2$  pour avoir des résultats corrects.

**IV.3. Brouilleur bande étroite :  $T_1 > T$**

Dans cet exemple, le signal et les entrées sont identiques à ceux de l'exemple 2.  $\underline{z}(t)$  est donc donné par (15).

Seul le temps symbole du brouilleur diffère. On a cette fois choisi un brouilleur de bande étroite ( $T_1= 4,123T$ ) par rapport à l'utile.

Les performances obtenues en TEB sont présentées sur la figure 5.

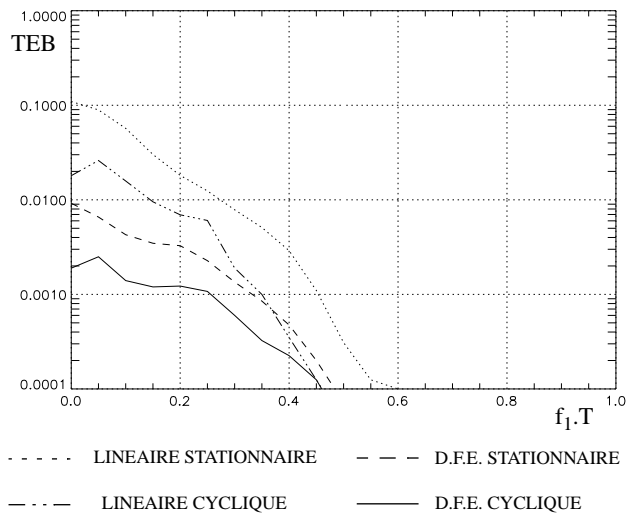


figure 5: Performances comparées.  $T_1 > T$

Cet exemple permet de constater l'intérêt des structures DFE par rapport aux structures linéaires. Le brouilleur de l'exemple 2 était à bande large et son élimination ne génère que peu d'interférence. Le canal étant idéal, la boucle de rétroaction n'a alors que peu d'influence. En revanche, pour un brouilleur bande étroite, on a intérêt à éliminer l'interférence intersymbole, ici créée par le filtre "avant" dont la réponse impulsionnelle s'étale d'autant plus que la bande du brouilleur est étroite. C'est ce que fait le filtre "arrière".

**V. Conclusion**

Les structures des égaliseurs cycliques linéaire et DFE pour le critère EQMM ont été explicitées. Les simulations effectuées ont montré l'intérêt que peut présenter ces structures lorsque le signal utile est brouillé par des signaux issus de modulations linéaires de rythme symbole quelconque ou identique à celui de l'utile. On pense notamment à l'utilisation d'égaliseurs cycliques sur des réseaux AMRF pour lesquels on pourra réduire la bande totale du réseau ou accroître le nombre de communications pour une occupation spectrale donnée. Le gain en TEB lié à l'utilisation des structures proposées est d'autant plus important que le signal reçu présentera des corrélations spectrales importantes. Ce paramètre sera donc à prendre en compte lors du choix des modulations.

**Références**

[1] **W.A. Gardner**, "Cyclic Wiener Filtering : Theory and Method", IEEE Trans. on Comm., vol 41, n°1, pp 151-163, Jan 1993.  
 [2] **B.R. Petersen**, "Equalization in Cyclostationarity Interference", Ph.D. Dissertation, Carlton University, Ottawa, Canada, 1991.  
 [3] **C.A. Belfiore, J.H. Park Jr**, "Decision Feedback Equalization", Proc. of the IEEE, vol 67, n°8, pp 1143-1156, Août 1979.