Débruitage d'une image par représentation en bords multiéchelles : utilisation de l'information angle

Carré Philippe(1) **et Fernandez-Maloigne Christine**(2)

(1)Heudiasyc, UMR CNRS 6599, UTC
60200 Compiègne, France
E-mail : pcarre@hds.utc.fr

(2)SIC, UMR CNRS 6615
BP 179, 86960 Futuroscope, France

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article une méthode permettant de débruiter une image, dont on possède un petit nombre de réalisations, dégradée par un bruit blanc gaussien additif. Le filtrage proposé utilise la décomposition en maximums d'ondelettes. Son originalité réside dans l'utilisation de l'angle de la dérivé comme critère discriminant et non l'amplitude comme c'est le cas dans la majorité des algorithmes basés sur les maximums d'ondelettes. L'algorithme résultant est robuste. Il débruite une image sans estimation du niveau de bruit, tout en conservant les structures de l'image. Cet article présente les bases d'un nouveau paramètre discriminatoire peu étudié dans la littérature qui peut être utilisé dans d'autres types d'applications.

ABSTRACT

In this article, we present a denoising technique of an image, of which we have a few realisations, corrupted by an white additive Gaussian noise. The filtering uses the wavelet maxima decomposition. Its originality is the use of the derivative phase as a selective criterion and not the magnitude as in the litterature algorithm. Our algorithm is robust. It denoises an image, without estimation of the noise level, while preserving significant features of the image. This article presents the basis of a new discriminant parameter which can be used in other applications.

1 Gradient mono-échelle.

Dans cette partie, nous étudions le comportement d'un gradient mono-échelle, tel qu'il est utilisé depuis de nombreuses années dans le traitement d'image, appliqué sur une image dégradée par un bruit additif.

1.1 Préambule et approximations

Le gradient calcule la dérivé première d'une fonction $g(x, y)$ et s'approxime numériquement par une simple différence telle que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \approx \frac{g\left(x+h_1, y\right)-g\left(x-h_2, y\right)}{h_1+h_2} \tag{1}$$

avec $h_1 = h$ et $h_2 = 0$, ou avec $h_1 = h_2 = h$ par antisymétrie autour du point étudié . La dérivé $\frac{\partial g}{\partial y}$ se calcule de la même façon.

L'algorithme que nous proposons s'applique sur des images dégradées par un bruit additif, non-corrélé et suivant une distribution gaussienne, telles que :

$$g(x, y) = s(x, y) + \sigma b(x, y) \tag{2}$$

avec $g(x, y)$ mesures bruitées, $b(x, y)$ réalisation d'un bruit blanc gaussien au point (x, y) et $s(x, y)$ l'information que l'on cherche à estimer. Notons $m_x = \partial s/\partial x$ et $m_y = \partial s/\partial y$. m_x et m_y symbolisent l'information déterministe recherchée.

Le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix}$ suit une densité de probabilité gaussienne telle que :

$$\begin{pmatrix} \partial g/\partial x \\ \partial g/\partial y \end{pmatrix} \overset{i.i.d.}{\rightarrow} N\left(\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 1_{[h_{1\text{ ou }2}=0]} \\ 1_{[h_{1\text{ ou }2}=0]} & 2 \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

Nous utiliserons, lors du calcul du gradient, le filtre antisymétrique défini par $h_1 = h_2 = h$, qui permet d'obtenir une matrice de corrélation diagonale.

En effectuant un changement de base dans le repère polaire, nous définissons l'angle et la norme du gradient par $\rho = \sqrt{(\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2}$ et, $\theta = \arctan\left(\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial x}\right)$.

La majorité des méthodes qui utilisent le gradient comme opérateur de détection des bords s'appuie sur l'information norme [5], [4]. Toutefois cette valeur est très sensible au bruit et entraine l'apparition de points parasites ou la suppression de contours [3].

L'algorithme que nous proposons discrimine le bruit à partir de l'angle du gradient selon l'une ou l'autre des deux propositions suivantes :

1. Les angles des variations dues au bruit sont instables.
2. Les angles des variations du signal détériorées par le bruit sont stables.

Nous considérons qu'un angle θ est stable sur ses différentes réalisations en un point (x_0, y_0) si $\left|\theta^i(x_0, y_0) - \theta^j(x_0, y_0)\right| < \varepsilon$, $\varepsilon \in [0..\pi]$, pour $\forall i, j \in [1..N]$, avec N nombres de réalisations. ε est choisi suffisamment petit pour supprimer le bruit et suffisamment grand pour prendre en compte l'altération du signal.

1.2 Etude des propositions

Loi de dispersion de l'angle du gradient.

A partir de l'équation (3), nous savons que la densité conjointe de $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$ suit une loi conjointement Gausienne. En effectuant le changement de variable $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $m_\theta = \arctan(\frac{m_y}{m_x})$ et, $m_\rho = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ et en intégrant selon la norme, la fonction de densité de l'angle $f_\Theta(\theta)$ s'écrit finalement :

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\nabla} e^{-\frac{m_\rho^2}{2\sigma_\nabla^2}} + \frac{m_\rho}{\sigma_\nabla}\cos(\theta - m_\theta) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_\rho^2 \sin^2(\theta - m_\theta)}{2\sigma_\nabla^2}} \Phi\left(\frac{m_\rho\cos(\theta - m_\theta)}{\sigma_\nabla}\right) \quad (4)$$

avec Φ fonction erf.

Proposition 1.1* — *Les angles des variations dues au bruit sont instables.

La probabilité d'erreur de décision P_e pour le bruit est égale à la probabilité de classer la variation due au bruit comme angle stable.

Lorsque la variation est due au bruit, alors le rapport $m_\rho/\sigma_\nabla \approx 0$. On vérifie aisément que si m_ρ/σ_∇ tend vers 0, alors la densité $f_\Theta(\theta)$ tend vers une loi uniforme sur $[0..2\pi]$ telle que $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ (on retrouve ainsi le résultat illustré dans [7]). Il apparait donc que la probabilité d'erreur P_e tend très vite vers 0 quand le nombre d'acquisitions N augmente, et ceci quelque soit ε, pris bien sûr dans un intervalle raisonnable.

La table 1 présente les résultats de l'estimation de P_e par une méthode numérique pour N variant et $\varepsilon = \pi/2$. Même pour un faible nombre de réalisations, l'angle du bruit est détecté instable. Quand le nombre N de réalisations augmente, la probabilité d'erreur devient négligeable.

N	2	3	4	5	6	7
P_e	0,501	0,188	0,059	0,020	0.007	0.002

TAB. 1 — Estimation de la probabilité d'erreur de classification du bruit avec un nombre N de réalisations

Nous concluons que l'étude de l'angle des coefficients nous permet d'éliminer ceux dus au bruit.

Proposition 1.2* — *Les angles des variations du signal détériorées par le bruit sont stables.

En présence d'information, la probabilité d'erreur de décision est égale à la probabilité de classer la variation comme angle instable.

Si l'on étudie la fonction de densité $f_\Theta(\theta)$, on remarque que lorsque le rapport m_ρ/σ_∇ augmente, le premier terme $(1/2\pi\sigma_\nabla)\exp(-m_\rho^2/2\sigma_\nabla^2)$ tend vers 0. Le second terme tend lui aussi vers 0 si $\theta - m_\theta$ croit, c'est à dire si l'angle s'éloigne de sa moyenne. Donc, plus le rapport m_ρ/σ_∇ est important, plus la variance de l'angle est faible [3]. On en conclue que quand le rapport entre la norme "déterministe" m_ρ et le bruit est grand, l'angle du gradient est stable avec une probabilité proche de 1, et la proposition est donc vérifiée.

Afin de comparer la discrimination angulaire par rapport à un seuillage de la norme, pour un rapport signal sur bruit faible, nous approximons la problématique en considérant que toutes les réalisations sont comprises dans un cercle de rayon $3\sigma_\nabla$ et de centre $\left[\begin{array}{cc} \partial s/\partial x & \partial s/\partial y \end{array}\right]$ (ceci est vrai avec une probabilité de 99.8%). La probabilité d'erreur est négligeable :

- quand $m_\rho \in \left[\frac{3\sigma_\nabla}{\sin(\varepsilon/2)}, +\infty\right[$ pour la discrimination angulaire.
- quand $m_\rho \in [6\sigma_\nabla, +\infty[$ pour le seuillage de la norme en posant l'hypothèse forte que nous connaissons σ_∇.

Si $\varepsilon \geqslant \pi/3$, le seuillage angulaire a donc une probabilité d'erreur nulle pour des valeurs de m_ρ plus faible (donc un rapport signal sur bruit plus mauvais) que dans le cadre d'un seuillage sur l'amplitude. Or nous avons vu que pour un ε grand (comme $\varepsilon = \pi/2$), l'angle est un fort caractère discriminateur du bruit. Nous en concluons que l'information angle est plus pertinente. Les expérimentations numériques menés par Gregson suggèrent le même résultat [3].

La table 2 présente la probabilité d'erreur de détection P_e pour N et le rapport $r = m_\rho/\sigma_\nabla$ variant et $\varepsilon = \pi/2$. Il est évident que pour de très faibles valeurs de m_ρ, la probabilité d'erreur est importante. Toutefois, P_e diminue très vite quand le rapport augmente. La probabilité d'erreur est presque nulle pour des rapports où le volume correspondant à l'intersection entre les deux gausiennes (distribution du bruit et du signal) reste important, et où un seuillage sur l'amplitude entrainerait donc un fort taux d'erreur.

N	2	3	4	5	6	7
r=1	0.311	0.539	0.711	0.807	0.887	0.927
r=2	0.061	0.146	0.228	0.294	0.367	0.453
r=3	0.006	0.013	0.019	0.030	0.043	0.059
r=4	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002
r=5	0	0	0	0	0	0

TAB. 2 — Estimation de la probabilité d'erreur de détection du signal utile pour un nombre N de réalisations et de rapport signal sur bruit r variant.

A partir de ces différentes constations, nous concluons que l'angle est un paramètre discriminateur efficace dans le cas d'un gradient d'une image bruitée.

2 Gradient multiéchelles.

2.1 Rappel.

Nous rappelons brièvement la décomposition introduite par Mallat [6].

On introduit deux fonctions d'ondelettes $\psi^1(x, y)$ et $\psi^2(x, y)$ comme les dérivées premières partielles de la fonction d'échelle $\phi(x, y)$. De la linéarité de la convolution et de la dérivation, il est facile de vérifier que la transformée en ondelettes de l'image à l'échelle s est équivalente au gradient du vecteur $g(x, y)$ lissé par la fonction $\phi_s(x, y)$. La transformée en ondelettes discrète est caractérisée par deux filtres d'analyse H et G, ainsi qu'un groupe de filtres de synthèse Q, P et L qui vérifient la condition de reconstruction parfaite donnée dans [8].

L'implantation numérique de la décomposition et de la reconstruction s'effectue par l'intermédiaire d'un banc de filtre octave bande non-décimé [6].

Nous définissons dans le repère polaire la norme ρ_j et l'angle θ_j du gradient multiéchelle à l'échelle j. En reprenant le formalisme de Canny [1], les bords sont les points maximums locaux de la norme ρ_j dans la direction θ_j. Zhong défini ainsi, dans sa thèse, une nouvelle décomposition appelée représentation en maximums d'ondelettes [8]. Mallat et Zhong ont proposé un algorithme itératif de reconstruction à partir des maximums [6].

2.2 Extension de la dispersion angulaire au multiéchelles.

La dispersion angulaire établie par l'équation 4 suppose l'application du gradient sur une image dégradée par un bruit blanc Gaussien. D'après Mallat [5], si $b(x, y)$ est un bruit blanc Gaussien alors $W_s b(x, y)$ est lui aussi un bruit blanc Gaussien. Le gradient multiéchelles repose sur une transformée en ondelettes, il vérifie donc aussi cette propriété. C'est à dire que pour une échelle j donnée, la loi de densité de l'angle du gradient multiéchelles $f_{\Theta j}\left(\theta_j\right)$ suit le modèle établi par l'équation 4. Nous pouvons alors généraliser tous les résultats établis pour une échelle au gradient multiéchelles.

2.3 Définition de nouveaux filtres.

Le filtre dérivateur $G(w)$ proposé par Mallat introduit une corrélation entre $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$. Nous le modifions donc, afin d'utiliser le modèle établi par l'équation 1, avec $h_2 = h_1 = h$, qui permet d'avoir les deux dérivés partielles indépendantes.

Soit $G'(w)$ ce filtre dérivateur antisymétrique autour du point étudié. Il est tel que :

$$G'(w) = i\ \sin(w)$$

Il correspond à l'interpolation du filtre de Mallat suivi d'un retardateur. Afin de définir une décomposition en ondelettes à reconstruction parfaite, les autres filtres sont modifiés de la même façon.

Toutefois $G'(w)$ correspond au second niveau du banc de filtres (au retardateur près) tel qu'il est proposé par Mallat. Si la fonction $g(x, y)$ respecte le théorème d'échantillonage de Shannon, la décimation d'un point sur deux, avant filtrage, de décimer un point sur deux sans réduction de la bande de fréquence du signal, provoque un repliement de spectre entrainant l'apparition de maximums parasites à toutes les échelles. Nous devons donc, avant de décomposer le signal, appliquer un filtrage passe-bas, afin de réduire de deux la bande de fréquence.

Mais ce filtrage doit être inversible, c'est pourquoi nous définissons une projection notée Q_0 de type passe-haut créant l'espace complémentaire à celui généré par le préfiltrage passe-bas.

2.4 Opérateurs de projection Q_0 et Q_0^{-1}.

Nous proposons deux méthodes pour la projection Q_0. La première consite simplement à filtrer l'image par le passe-haut $G(w)$ défini par Mallat. La corrélation résultant de ce filtrage réduit le pouvoir discriminateur de l'angle du gradient sur le bruit. Toutefois, les erreurs de classification issues de cette corrélation sont transparentes sur l'image résultat, car la probabilité d'erreur, dans le cas de dérivés corrélées, reste acceptable, et l'échelle ainsi analysée correspond aux détails très haute-fréquence.

Cependant, cette première solution n'est pas toujours satisfaisante sur le plan théorique. La deuxième méthode consiste à extrapoler les maximums de la première échelle à partir des échelles suivantes en fonction de l'indice de régularité de Lipschitz de chaque singularité. Cette méthode s'inspire des travaux de Chang [2].

Afin de calculer le coefficient de régularité de Lipschitz, les maximums correspondant à la même singularité sont associés à travers les échelles. Cette méthode permet ainsi d'extrapoler les valeurs de la première échelle de la décomposition d'une façon plus esthétique, mais nécessite un algorithme plus complexe.

Pour ces deux méthodes, nous définissons l'opération inverse Q_0^{-1} par un filtrage des deux plans d'ondelettes avec les filtres proposés par Mallat $\overline{G}(w_x)L(w_y)$ et $\overline{G}(w_y)L(w_x)$.

2.5 Algorithme Angle_ITE.

A partir de l'une des deux méthodes d'estimation de la première échelle d'ondelettes et des filtres proposés dans la section 2.3, nous avons défini une décomposition en gradient multiéchelle inversible pour laquelle la caractéristique angle du gradient permet de discriminer le bruit de l'information. De cette décomposition, nous concevons un algorithme que nous appelerons Angle_ITE, qui permet de débruiter une image à partir des N réalisations.

Concrètement, l'algorithme Angle_ITE sélectionne, sur le gradient multiéchelle de l'image, les maximums qui ont un angle stable sur ses différentes réalisations et supprime les autres qui résultent du bruit.

Une fois la discrimination des maxima effectuée, il nous faut reconstruire la phase et l'amplitude des maxima "sélectionnés" qui ont été dégradées par le bruit. Les différentes réalisations de θ^i sont non-corrélées et possèdent une même moyenne $E(\theta^i)$, alors $E(\theta^i) = E(\overline{x})$, avec $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\theta^i$[7]. Il existe la même relation pour la norme ρ_i. Donc, afin d'approximer ces valeurs, nous faisons une simple moyenne sur la séquence. Enfin nous reconstruisons l'image débruitée avec l'algorithme de Mallat-Zhong [6].

3 Résultats et conclusion.

Nous appliquons l'algorithme Angle_ITE sur une séquence de 5 réalisations d'une image de femme (Léna) bruitée par un bruit gaussien,,avec une erreur quadratique moyenne (RMS) égale à 24. La mesure RMS est définie comme l'écart type de l'erreur entre l'image originale et l'image dégradée. Une des images bruitées de la séquence est représentée sur la figure 1. La figure 2 montre le résultat de l'algorithme Angle_ITE utilisé sur 5 échelles de décompositions. On constate sur cette seconde figure que les points parasites, initialement présents dans les images bruitées, ont disparu et que l'image reconstruite est plus nette (donc plus exploitable). Le bruit est donc correctement supprimé et les structures initiales sont conservées.

Afin de corroborer les constatations visuelles, nous calculons la valeur RMS de l'image reconstruite de la figure 2. Cette erreur est égale à 7,38, ce qui est nettement inférieur à l'erreur initiale des images bruitées égale à 24 confirmant ainsi l'efficacité de l'algorithme Angle_ITE. Des réductions similaires de la variance de l'image d'erreur sont obtenues pour d'autres séquences ayant un rapport signal sur bruit plus faible ou plus fort.

Cette simulation montre la pertinence de la caractéristique angle du gradient associée à une décomposition multiéchelles dans le débruitage d'images. L'évolution logique de l'algorithme est de l'adapter aux cas d'une seule réalisation de l'image bruitée. Des résultats préliminaires semblent satisfaisants et prometteurs.

Références

[1] J. CANNY. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on PAMI*, (8) :679–698, 1986.

[2] S. CHANG. *Image Interpolation Using Wavelet-Based Edge Enhancement and Texture Analysis*. PhD thesis, Berkeley University, May 1995.

[3] P. GREGSON. Using angular dispersion of gradient direction for detecting edge ribbons. *IEEE Transactions on PAMI*, 15(7) :682–695, 1993.

[4] J. LU. *Signal Recovery and Noise Reduction with Wavelets*. PhD thesis, Dartmouth College, June 1993.

[5] S. MALLAT and W. HWANG. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. Information Theory*, (2) :617–643, 1992.

[6] S. MALLAT and S. ZHONG. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. on PAMI*, 14(7) :710–732, July 1992.

[7] A. PAPOULIS. *Probability, random variables, and stochstic process*. Mc Graw-Hill Book, 1984.

[8] S. ZHONG. *Edge Representation from Wavelet Transform Maxima*. PhD thesis, New York University, September 1990.

FIG. 1 — *Image bruitée (SNR = 6.9 dB)*

FIG. 2 — *Résultat de l'algorithme Angle_ITE sur une séquence de 5 images*