Restauration d'images par paquets d'ondelettes

Jérôme Kalifa (1), Stéphane Mallat (1) et Bernard Rougé (2)

(1) Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP), Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex, France

(2) Centre National d'Etudes Spatiales
18 Av. Edouard Belin, 31055 Toulouse, France

RÉSUMÉ

Les imperfections des capteurs de nombreux systèmes d'imagerie introduisent une dégradation que l'on modélise par une convolution avec un filtre passe-bas, à laquelle vient s'ajouter un bruit électronique. Nous proposons une technique de déconvolution par filtrage inverse régularisée par un seuillage des coefficients de paquets d'ondelettes. La base est déterminée de façon optimale suivant l'algorithme de Coifman et Wickerhauser, à l'aide d'un critère qui permet de discriminer au mieux le signal du bruit coloré. Cette technique surpasse de manière significative les estimateurs linéaires quand le nombre d'échantillons augmente. L'algorithme est rapide et fournit des résultats visuellement et métriquement satisfaisants.

ABSTRACT

In many imaging systems, the imperfections of cameras create a degradation that can be modeled as a low-pass convolution to which is added a noise due to the electronics of the captors. We introduce a deconvolution procedure by inverse filtering which is regularized with a wavepacket coefficients thresholding technique. The wavepacket basis is optimally chosen with Coifman and Wickerhauser's algorithm, using a criterion which discriminates the signal and the colored noise. This technique significantly outperforms linear estimators when the number of samples increases. The algorithm is fast and provides good metrical and perceptual results.

1 Introduction

Les imperfections des capteurs de différents systèmes d'imagerie introduisent une dégradation de l'image qui peut être modélisée par une convolution avec un filtre passe-bas $h(x, y)$ que l'on sait approximer. En outre, un bruit électronique $B(x, y)$ vient s'ajouter à l'image lissée. En pratique, le bruit $B(x, y)$ est souvent corrélé au signal, mais nous considérerons que ce bruit est blanc de variance σ^2 pour simplifier la présentation.

L'image mesurée $G(x, y)$ et l'image originale $f(x, y)$ vérifient alors la relation :

$$G(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + B(x, y). \tag{1}$$

On note $h_i(x, y)$ le filtre inverse dont la transformée de Fourier vérifie :

$$\widehat{h_i}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\widehat{h}(\omega_x, \omega_y)}.$$

Si lt'on cherche à retrouver f par un filtrage inverse avec $h_i(x, y)$:

$$L(x, y) = G(x, y) * h_i(x, y) = f(x, y) + B(x, y) * h_i(x, y). \tag{2}$$

Le bruit résultant

$$B_1 = B * h_i$$

est stationnaire et sa puissance spectrale vérifie

$$P_{B_1}(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sigma^2}{|\widehat{h}(\omega_x, \omega_y)|^2}. \tag{3}$$

Dans les fréquences élevées pour lesquelles $\widehat{h}(\omega_x, \omega_y)$ est faible, la puissance spectrale P_{B_1} explose numériquement, et il est alors nécessaire d'éliminer la majorité du bruit $B_1(x, y)$ avec une procédure de régularisation.

Le filtre de Wiener est optimal pour estimer des signaux $f(x, y)$ qui sont la réalisation dt'un processus Gaussien, ce qui nt'est pas le cas, entre autres, pour des images. Il est alors possible dt'obtenir de meilleurs résultats en utilisant des filtres non-linéaires. Donoho et Johnstone [DJ94] ont montré que des estimateurs par seuillage sont particulièrement efficaces dans des bases dt'ondelettes et de paquets dt'ondelettes. Nous proposons un algorithme de recherche d'une base optimale de paquets d'ondelettes qui permet de discriminer au mieux le bruit $B_1(x, y)$ du signal $f(x, y)$. Nous donnons un résultat asymptotique qui illustre l'amélioration apportée par cet algorithme vis-à-vis d'un estimateur linéaire optimal de Wiener. En outre, ces procédures de seuillage dans une base orthogonale sont plus rapides que les algorithmes classiques itératifs de déconvolution par optimisation sous contraintes [Kat91].

2 Estimation par seuillage

Un estimateur non linéaire de $f(x, y)$ est construit en décomposant l'image $L(x, y)$ de taille $\sqrt{N} * \sqrt{N}$ sur une base orthogonale $\{\phi_n\}_{n=0..N-1}$ et en sélectionnant un sous-ensemble des coefficients de la décomposition pour approximer $f(x, y)$.

Donoho et Johnstone [DJ94] ont montré qut'un estimateur min-max optimal pouvait être obtenu par seuillage dans des bases dt'ondelettes et de paquets dt'ondelettes en présence dt'un bruit blanc. Cet estimateur a ensuite été généralisé aux bruits stationnaires [JS94] en adaptant la valeur des seuils T_n en fonction du niveau de la transformée en ondelettes.

Chaque coefficient $\langle L, \phi_n \rangle$ de la décomposition de $L(x, y)$ dans la base $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie :

$$\langle L, \phi_n \rangle = \langle f, \phi_n \rangle + \langle B_1, \phi_n \rangle. \tag{4}$$

Le produit scalaire $\langle B_1, \phi_n \rangle$ est une variable aléatoire dont la variance vérifie :

$$\sigma_n^2 = E\{|\langle B_1, \phi_n \rangle|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2\frac{|\widehat{\phi}_n(\omega_x, \omega_y)|^2}{|\widehat{h}(\omega_x, \omega_y)|^2}d\omega_x\, d\omega_y. \tag{5}$$

Lt'estimateur F de f est alors obtenu en seuillant chaque coefficient $\langle L, \phi_n \rangle$ avec un seuil T_n qui dépend de σ_n

$$F = \sum_n S_n(\langle L, \phi_n \rangle)\tilde{\phi}_n, \tag{6}$$

où S_n est l'opérateur de seuillage

$$S_n(x) = \left| \begin{array}{l} x \ si\ |x| \geqslant T_n \\ 0\ sinon \end{array} \right. \tag{7}$$

Le seuil T_n est proportionnel à σ_n :

$$T_n = \sigma_n * \lambda(N) \tag{8}$$

où λ est une fonction croissante.

3 Choix de la meilleure base

Dans le cas d'école où $f(x, y)$ est connu, on peut montrer que lt'erreur quadratique moyenne $E\{\|f - F\|^2\}$ que lt'on obtient par seuillage des coefficients $\{\langle L, \phi_n \rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est minimale pour $T_n = \sigma_n$, et vaut :

$$E\{\|f - F\|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1}\min(|\langle f, \phi_n \rangle|^2, \sigma_n^2) \tag{9}$$

L'efficacité d'un algorithme de seuillage des coefficients dépend alors de la capacité de la base à discriminer lt'énergie du signal de celle du bruit : la base doit concentrer lt'énergie du signal sur un petit nombre de vecteurs et lt'énergie du bruit sur des vecteurs différents.

Une image étant généralement considérée comme un signal régulier par morceaux, une base dt'ondelettes permet de bien approximer f sur peu de vecteurs. Néanmoins, dans une base discrète dt'ondelettes, la moitié des coefficients sont à lt'échelle fine et lt'énergie de leur transformée de Fourier est concentrée sur les hautes fréquences : Toute cette première échelle est alors contaminée par lt'explosion numérique du bruit.

Il convient de choisir une base dont les vecteurs ont un support plus étroit dans les hautes fréquences. Les bases de paquets dt'ondelettes permettent dt'ajuster la concentration fréquentielle des vecteurs [Rou94] : on dispose dt'un dictionnaire $\{\mathcal{B}^{\gamma}\}_{\gamma}$ de bases orthogonales, et la meilleure base $\mathcal{B}^{\gamma_1} = \{\phi_n^{\gamma_1}\}_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ est celle qui permet de discriminer au mieux le signal f du bruit B_1. On cherche alors la base $\mathcal{B}^{\gamma_1}$ qui permet de minimiser le critère défini en (9). Ce critére est additif et vérifie donc les propriétés nécessaires à la mise en oeuvre de l'algorithme de recherche de meilleure base de Coifman et Wickerhauser [CW92] afin de déterminer $\mathcal{B}^{\gamma_1}$.

Dans les basse fréquences, l'énergie P_{B_1} du bruit est faible et presque constante, et les vecteurs sélectionnés sont les ondelettes, qui corrèlent efficacement les singularités du signal. La profondeur de la décomposition dans les basses fréquences dépend principalement de la nature du signal f. L'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ correspondant à l'échelle la plus fine de la transformée en ondelettes est décomposé en sous-intervalles de plus en plus fins au fur et à mesure que l'on s'approche de la fréquence maximale π. Le bruit de très haute énergie est alors concentré sur le petit nombre de coefficients de paquets d'ondelettes de plus hautes fréquences. Ces coefficients sont mis à zéro par la procédure de seuillage. La profondeur de la décomposition dans les hautes fréquences dépend principalement de la vitesse de décroissance de $\widehat{h}$.

4 Comparaison avec un filtrage linéaire

Le filtre de Wiener est optimal parmi les estimateurs linéaires du signal f. La base de Karhunen-Loëve utilisée pour la déconvolution est la base de Fourier $\{c_n\}_{n=0..N-1}$ et l'erreur quadratique moyenne obtenue vaut alors, pour un signal de taille N :

$$E\{|f - F_W|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{E\{|\langle f, c_n \rangle|^2\} * \frac{\sigma^2}{\widehat{h}(n)}^2}{E\{|\langle f, c_n \rangle|^2\} + \frac{\sigma^2}{\widehat{h}(n)^2}}. \tag{10}$$

On fait varier le nombre d'échantillons N en gardant le même signal f (i.e $\forall n = 0..N-1\ f_N(n) = f(\frac{n}{N})$). Ce modèle correspond au comportement physique d'un système d'imagerie pour lequel on augmente la résolution. On suppose que le filtre $\widehat{h}$ possède un unique zéro à la fréquence de Nyquist, au voisinage de laquelle la décroissance de $\widehat{h}$ est polynômiale d'ordre p, et on suppose que le rapport signal/bruit reste constant pour tout N. On montre que l'erreur quadratique moyenne obtenue avec un filtrage de Wiener reste constante quelle que soit la nature du signal f.

Supposons, de plus, que f est un signal régulier par morceaux. On peut alors montrer que l'erreur quadratique moyenne obtenue par notre procédure de déconvolution décroit en $O(\frac{1}{N^{\frac{1}{2p+1}}})$. Les images étant considérées comme des signaux réguliers par morceaux, ce résultat permet de faire apparaître la supériorité asymptotique d'un algorithme de déconvolution par estimation non-linéaire vis-à-vis d'un estimateur linéaire.

5 Mise en oeuvre de l'algorithme

5.1 Invariance par translation

Un signal débruité par seuillage des coefficients d'une transformée en ondelettes ou paquets d'ondelettes orthogonales laisse apparaître des oscillations au voisinage des singularités, dûes au non-alignement des vecteurs de la base et des structures du signal. Coifman et Donoho ont montré [CD95] que ces artefacts sont atténués si l'on débruite le signal sur toute une famille de bases translatées. L'utilisation d'une décomposition invariante par translation au sein de l'algorithme de déconvolution permet d'obtenir un gain significatif de performances. Le rapport signal/bruit obtenu avec l'image restaurée de la figure 3 est de 37.7 en utilisant une transformée invariante par translations alors qu'il est de 35.4 en utilisant une transformée en ondelettes orthogonales sans translater le signal.

5.2 Résumé de l'algorithme

L'algorithme de restauration s'articule alors ainsi :

1. Etape préliminaire : Calcul de la base de paquets d'ondelettes $\mathcal{B}^{\gamma_1}$ permettant d'obtenir une discrimination signal/bruit optimale. Ce calcul est effectué une fois pour toutes et n'intervient plus ensuite dans l'algorithme de restauration.
2. Convolution de l'image dégradée G avec le filtre inverse h^{-1}.
3. Transformée en paquets d'ondelettes de l'image $L = G * h^{-1}$ obtenue.
4. Seuillage adaptatif des coefficients $\{\langle L, \phi_n \rangle\}_{n=0..N-1}$ de la transformée en paquets d'ondelettes de L.
5. Reconstruction de l'image restaurée F à partir de la transformée en paquets d'ondelettes seuillée.

Les étapes 3 à 5 sont répétées après translation de l'image L, et l'image restaurée F est la moyenne des images obtenues après chaque translation. Il convient de noter qu'une transformée en ondelettes orthogonale invariante par translation est équivalente à une transformée sur une frame d'ondelettes dyadiques non sous-échantillonée. La transformée est alors calculée en utilisant l'algorithme “à trous”.

La transformée en paquets d'ondelettes et son inverse utilisent un algorithme rapide de bancs de filtres de complexité $\mathcal{O}(N)$ pour une image de taille $\sqrt{N} * \sqrt{N}$.

6 Résultats numériques et conclusion

Les figures 1, 2 et 3 montrent respectivement l'image de référence, l'image dégradée et l'image restaurée par la procédure de déconvolution. Les images sont sur 256 niveaux de gris. La dégradation de l'image est simulée en utilisant un modèle de filtre passe-bas h et de bruit additif B gaussien, tel que $\sigma^2 \approx 3$, correspondant aux caractéristiques des capteurs CCD d'un satellite d'observation terrestre. Le rapport signal/bruit de l'image dégradée est de 28.4, et le rapport signal/bruit de l'image restaurée est de 37.7. Visuellement, outre les contours de l'image, les zones texturées permettent de juger de la qualité de la reconstruction. On note que les oscillations de niveaux de gris sont bien restituées. Cet algorithme fournit des résultats satisfaisants d'un point de vue perceptuel, ce qui est particulièrement important pour la photo-interprétation.

Les prochaines améliorations de la procédure de restauration devront prendre en compte les propriétés géométriques de l'image [KMFR96]. Nous étudions par exemple l'utilisation de représentations par contours multiéchelles, qui nous permettent de mieux isoler les structures cohérentes de l'image.

Références

[CD95] R.R. Coifman and D.L. Donoho. Translation-invariant de-noising. Technical Report 475, Stanford University, May 1995.

[CW92] R.R. Coifman and M.V. Wickerhauser. Entropy-based algorithms for best-basis selection. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38 :713–718, 1992.

[DJ94] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3) :425–455, 1994.

[JS94] Iain M. Johnstone and Bernard W. Silverman. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. Technical report, Stanford University, Dec. 1994.

[Kat91] A.K. Katsaggelos(Ed.). *Digital Image Restoration*. Springer-Verlag, 1991.

[KMFR96] J. Kalifa, S. Mallat, F. Falzon, and B. Rougé. High resolution satellite image restoration with frames. In *SPIE Conference on Wavelets Applications in Signal and Image Processing IV*, Denver, Colorado, 1996.

[Rou94] B. Rougé. Space-scale-frequency Representation and Fixed Chosen Noise Restoration (Image). In *IEEE Time-Frequency and Time-Scale analysis*, 1994.

FIG. 1 — Image de référence.

FIG. 3 — Image restaurée par seuillage des coefficients de paquets d’ondelettes.

FIG. 2 — Image dégradée en simulant une acquisition par les capteurs CCD d’un satellite.