

Reconstruction non linéaire des processus gaussiens soumis à un jitter aléatoire

Niels D.Aakvaag et Bernard Lacaze

ENSEEIH/GAPSE, 2 Rue Camichel, B.P. 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France

Résumé

L'échantillonnage périodique des processus aléatoires est parfois perturbé par des imperfections du mécanisme de l'échantillonnage. Cet article considère le problème de la reconstruction de tels processus. Nous définissons une méthode non linéaire de reconstruction lorsque le processus de départ est gaussien. La méthode est basée sur l'application de l'algorithme de Viterbi. Nous montrons que, sous certaines conditions que nous spécifierons, elle possède des performances supérieures à la méthode linéaire optimale.

Abstract

The periodic sampling of stochastic processes is sometimes disturbed by imperfections in the sampling mechanism, usually known as sampling jitter. This paper addresses the problem of the reconstruction of such processes. We define a non linear reconstruction scheme for Gaussian processes based on the application of the Viterbi algorithm. It is shown that this scheme, under certain conditions, yields improved performances over the optimal linear method.

1 Introduction

L'échantillonnage périodique des processus aléatoires est souvent perturbé par un jitter aléatoire. Ce phénomène peut engendrer des modifications du processus tout à fait considérables, à la fois temporelles et spectrales. Il est donc souvent nécessaire de reconstruire le processus le mieux possible afin d'éviter des dégradations trop sévères. La reconstruction linéaire optimale d'un processus affecté par un jitter aléatoire a été formulée par Balakrishnan [1], chez qui le critère d'optimalité est de minimiser l'erreur en moyenne quadratique. Il est bien connu que, lorsque le processus est gaussien, l'estimateur optimal (en m.q.) est linéaire [2]. Néanmoins, il s'est avéré qu'un processus gaussien soumis à un jitter aléatoire perd, en général, son caractère gaussien [3]. Dans le cadre de l'échantillonnage d'un processus gaussien, nous pouvons donc espérer trouver des méthodes de reconstruction non linéaires possédant des performances supérieures à celle de Balakrishnan.

Cette contribution propose une méthode non linéaire de reconstruction des processus gaussiens échantillonnés avec un jitter aléatoire. Elle est basée sur l'application de l'algorithme de Viterbi et de l'interpolation par splines. Nous verrons que, sous certaines conditions, elle donne lieu à une erreur de reconstruction plus faible que la reconstruction linéaire.

2 Définitions

Soit $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ un processus gaussien, de moyenne nulle, continu en moyenne quadratique, de spectre $S_X(\omega)$, de fonction d'autocorrélation $K_X(\tau) =$

$\sigma_X^2 \rho(\tau)$ et de représentation spectrale $\Theta_X(\omega)$ vérifiant [4] :

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} d\Theta_X(\omega)$$

$$K_X(\tau) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega\tau} dS_X(\omega)$$

Dans l'exemple qui suit, nous prenons une densité spectrale de forme gaussienne :

$$\frac{dS_X(\omega)}{d\omega} = \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\sigma_S^2}\right)$$

Le signal échantillonné est donné par :

$$U_n = X(n - A_n)$$

où la suite A_n et le processus X sont indépendants. A_n est de moyenne nulle et stationnaire dans le sens où les deux fonctions caractéristiques, $\Psi(\omega)$ et $\Phi(p, \omega)$, définies par :

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= E\{e^{i\omega A_n}\} \\ \Phi(p, \omega) &= E\{e^{i\omega(A_n - A_{n+p})}\} \end{aligned}$$

sont indépendantes de n .

Par la suite, nous supposons que le jitter peut être modélisé par une chaîne de Markov à deux états. Afin de respecter l'ordre des échantillons, la chaîne peut prendre les valeurs $\{-\alpha, \alpha\}$ avec $\alpha < \frac{1}{2}$. La probabilité que la chaîne change d'état est notée p_0 .

3 Rappel du cas linéaire

Etant donné l'observation du signal échantillonné U_n , on cherche à estimer le signal échantillonné sans jitter, i.e.

si $A_n = 0$. Notons $\tilde{X}(n)$ cet estimateur. Le meilleur estimateur linéaire est la projection de $X(n)$ sur l'espace de Hilbert engendré par $U_n, H(U)$:

$$\tilde{X}(n) = \text{pr}_{H(U)} X(n)$$

La figure 1 ci-dessous donne une interprétation géométrique de cette projection.

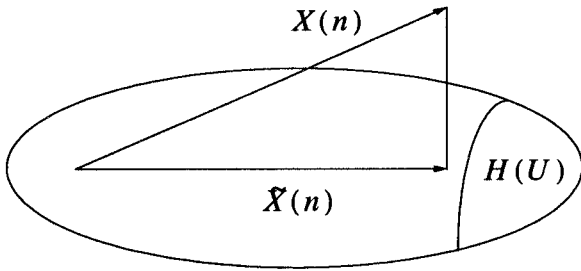


Figure 1, Projection orthogonale

La projection peut s'exprimer comme suit :

$$E \left\{ \left(X(n) - \tilde{X}(n) \right) U_m^* \right\} = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{X}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n} \Psi(\omega) \frac{dS_X}{dS_U}(\omega) d\Theta_U(\omega)$$

où $S_U(\omega)$ est le spectre de U_n et $\frac{dS_X}{dS_U}(\omega)$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $S_X(\omega)$ par rapport à $S_U(\omega)$. $\tilde{X}(n)$ est donc le résultat d'un filtrage linéaire de U_n par le filtre de réponse fréquentielle $\Psi(\omega) \frac{dS_X}{dS_U}(\omega)$. On démontre facilement que la variance de l'erreur de reconstruction est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - |\Psi(\omega)|^2 \frac{dS_X}{dS_U}(\omega) \right) dS_X(\omega)$$

4 Reconstruction non linéaire

Dans cette partie, nous allons tenter de reconstruire la suite $X(n)$ par une méthode non linéaire. La méthode est basée sur l'observation que la variable aléatoire $V_n = U_n - U_{n-1}$ suit une loi gaussienne conditionnée sur les deux variables aléatoires A_n et A_{n-1} . L'idée de base est d'estimer la suite $\{A_n\}$ et ensuite d'utiliser ces estimations pour effectuer une interpolation permettant un ré-échantillonnage du signal $X(t)$. Cette procédure comprend donc deux étapes différentes, l'estimation de la suite $\{A_n\}$, puis l'interpolation.

4.1 Estimation de $\{A_n\}$ par l'algorithme de Viterbi

La variable aléatoire $V_n = U_n - U_{n-1}$ suit une loi gaussienne centrée conditionnée sur A_n et A_{n-1} . Dans le cas

présent, où l'on considère une chaîne de Markov à deux états, trois cas se présentent :

$$H_0 : A_{n-1} = A_n \Rightarrow f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$H_1 : A_{n-1} = \alpha, A_n = -\alpha \Rightarrow f_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$H_2 : A_{n-1} = -\alpha, A_n = \alpha \Rightarrow f_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

où les σ_i^2 sont données par :

$$\sigma_0^2 = 2\sigma_X^2(1 - \rho(1))$$

$$\sigma_1^2 = 2\sigma_X^2(1 - \rho(1 + 2\alpha))$$

$$\sigma_2^2 = 2\sigma_X^2(1 - \rho(1 - 2\alpha))$$

avec $\rho(\tau) = K_X(\tau) / \sigma_X^2$. Lorsqu'on observe $V_n = v$, nous pouvons calculer les probabilités des différentes hypothèses, $P_i = P\{V_n \text{ de loi } f_i(v) | V_n = v\}$. Or, la probabilité que V_n suive une loi $f_i(v)$, étant donné $V_n = v$, est donnée par :

$$P_i = P\{V_n \text{ de loi } f_i(v) | V_n = v\}$$

$$= \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{P\{V_n \text{ de loi } f_i(v), V_n = v + dv\}}{P\{V_n = v + dv\}}$$

$$= \frac{q_i f_i(v)}{\sum_{j=1}^3 q_j f_j(v)}$$

où q_i est la probabilité que l'hypothèse H_i soit vraie. Nous cherchons donc à estimer la suite d'hypothèses pour tout n . Une façon de visualiser tout les séquences d'hypothèses possibles, est de construire un treillis à deux états, où les états correspondent aux valeurs de A_n et les transitions aux différentes hypothèses. Ce treillis est représenté par la figure 2.

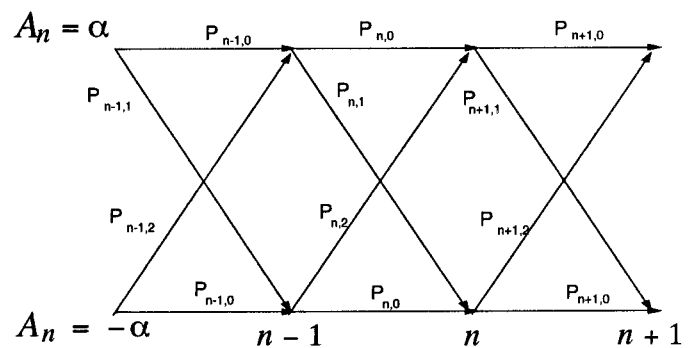


Figure 2, Treillis des hypothèses

Comme indiqué dans la figure, à chaque instant n on associe aux transitions les probabilités correspondantes. Notons par $P_{n,i}$ la probabilité que V_n suive une loi $f_i(v)$. Le problème peut maintenant être posé comme suit : étant

donnés N échantillons du processus, on cherche le chemin dans le treillis qui maximise la probabilité :

$$\begin{aligned} \max(P_{global}) &= \max \prod_{n=1}^N P_{n,i} \\ &= -\min \sum_{n=1}^N \ln P_{n,i} \end{aligned} \quad (1)$$

où le calcul du minimum se fait sur tous les chemins possibles. Cette minimisation correspond à l'estimation maximum *a posteriori* de P_{global} , c'est-à-dire à la suite d'hypothèses la plus probable sachant la suite $\{V_n\}$. On voit sans mal de l'équation (1) que si l'on associe aux transitions le logarithme des probabilités, alors la maximisation revient à trouver le chemin le plus court du treillis. Ceci est un problème classique de communication, et peut être effectué par l'algorithme du Viterbi [5]. Si l'on suppose connues la première et la dernière valeur du jitter, A_1 et A_N , il y a une correspondance unique entre la séquence des hypothèses et les A_n .

4.2 Interpolation pour obtenir une estimation de $X(t)$

Lorsque l'on possède une estimation de la suite $\{A_n\}$, $\{\tilde{A}_n\}$, nous pouvons utiliser ces valeurs afin d'effectuer une interpolation permettant un ré-échantillonnage de $X(t)$. Plusieurs algorithmes existent dans la littérature, dont un des plus utilisés est l'interpolation par des splines [6]. L'idée de base de l'interpolation par splines est d'approximer le processus $X(t)$ par une suite de polynômes de degré M :

$$\tilde{X}(t) = f_n(t) \quad t \in (t_n, t_{n+1})$$

où les instants t_n sont donné par :

$$t_n = n - \tilde{A}_n$$

Afin de rendre $\tilde{X}(t)$ la plus régulière possible, on exige la continuité de ses $M - 1$ premières dérivées. Sous cette contrainte, et si de plus on affecte des valeurs aux dérivées aux deux extrémités, les $N - 1$ fonctions sont définies de manière unique. Le cas le plus utilisé dans des applications pratiques est $M = 3$. Les avantages de choisir un ordre si faible sont premièrement que cela réduit la complexité de l'implantation et, deuxièmement, que $f(t)$ oscille peu. En fait, lorsque $M = 3$, on démontre que :

$$\int_{t_1}^{t_N} X''^2(t) dt \geq \int_{t_1}^{t_N} \tilde{X}''^2(t) dt$$

où $X''(t)$ et $\tilde{X}''(t)$ sont les deuxièmes dérivées de $X(t)$ et $\tilde{X}(t)$ respectivement. Cette relation exprime le fait que la fonction interpolée n'oscille pas plus que la fonction de départ.

5 Exemples de simulation

Avant de présenter les résultats de la reconstruction, deux remarques semblent pertinentes. Premièrement, dans

cette reconstruction par l'algorithme de Viterbi, on ne demande pas plus d'information que dans le cas linéaire. Ceci veut dire que toute amélioration que l'on obtient par cette méthode est le résultat de l'utilisation de la nature non gaussienne du signal échantillonné. En second lieu, nous avons considéré un cas simple où les calculs des différentes lois se faisaient d'une manière simple. Néanmoins, rien n'empêche la généralisation de la méthode pour un processus de Markov comprenant plus d'états.

Nous allons étudier les performances de notre méthode dans deux cas particuliers, qui diffèrent par la largeur du spectre de processus du départ. Ainsi on définit le "spectre étalé" et le "spectre étroit" par $\sigma_S^2 = \frac{1}{9}$ et $\sigma_S^2 = \frac{1}{25}$ respectivement.

Puisque la reconstruction comprend deux étapes différentes, il est intéressant de suivre le comportement de la méthode après chacune de ces opérations. Premièrement, nous allons étudier la performance de l'estimateur de la suite $\{A_n\}$. Deuxièmement, ces résultats seront utilisés pour ré-échantillonner le processus $X(t)$. Les deux figures ci-dessous donnent la probabilité de mauvaise estimation de A_n en fonction de α pour des valeurs différentes de p_0 .

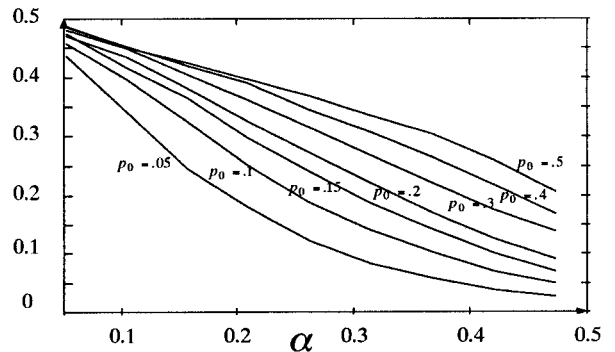


Figure 3, Probabilité de mauvaise détection de A_n , spectre étalé

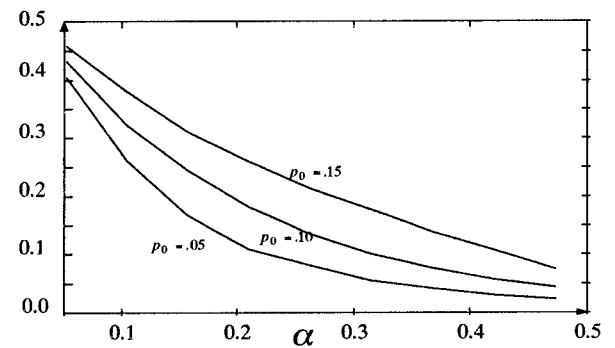


Figure 4, Probabilité de mauvaise détection de A_n , spectre étroit

Nous observons tout d'abord que la probabilité de prendre la mauvaise décision diminue lorsque α augmente. Cette observation est conforme à l'intuition dans la mesure

où de faibles valeurs du jitter entraînent des faibles variations des lois $f_i(v)$. De plus, et pour la même raison, on remarque que la probabilité de prendre la mauvaise décision diminue lorsque p_0 diminue.

Afin de pouvoir comparer les performances de la nouvelle méthode avec celle de Balakrishnan, on définit son gain par le rapport des variances de l'erreur de reconstruction des deux méthodes. Notons par σ_B^2 et σ_V^2 les variances respectives de l'erreur de reconstruction par la méthode de Balakrishnan et par notre méthode. Alors le gain s'écrit :

$$G = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_V^2}$$

où $G > 1$ implique que la nouvelle méthode possède une performance supérieure à celle de Balakrishnan. Les deux figures 5 et 6 donnent les résultats de simulation du gain en fonction de α pour chacun des deux spectres considérés précédemment.

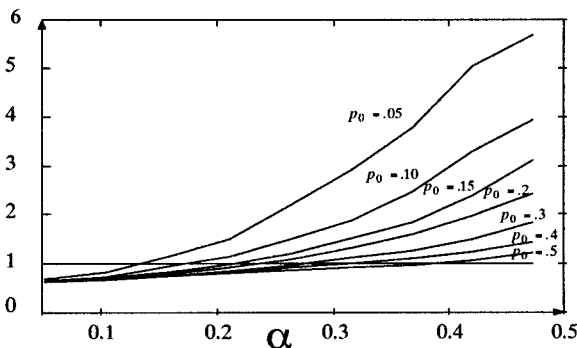


Figure 5, Gain de reconstruction, spectre étalé

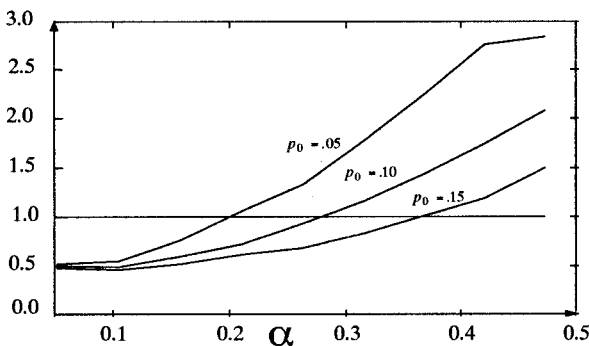


Figure 6, Gain de reconstruction, spectre étroit

On voit sans mal que, pour certaines valeurs de α, σ_S^2, p_0 , le nouvel algorithme obtient des résultats nettement supérieurs à ceux de Balakrishnan.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode non linéaire de reconstruction des processus gaussiens échantillonnés avec un jitter aléatoire. Elle est basée sur l'estimation de la suite du jitter par l'algorithme de Viterbi

suivie par un ré-échantillonnage du processus de départ par moyen des splines d'ordre trois. On a démontré que, sous certaines conditions, cet estimateur donne lieu à une erreur de reconstruction plus faible que l'estimateur linéaire optimal.

Références

- [1] A.V.Balakrishnan, "On the problem of time jitter in sampling", *IRE Transactions on information theory*, 1962
- [2] H.L.Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*, New York: Wiley, 1968
- [3] N.D.Aakvaag, "Contribution à l'étude des changements d'horloge aléatoires", *Thèse de doctorat de l'INPT - 19 Septembre 1996, N° d'ordre 1190*
- [4] J.L.Doob, *Stochastic processes*, Wiley 1953
- [5] A.J.Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and asymptotically optimum decoding algorithm", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-13, pp 260-269, April 1967
- [6] E.Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley, New York, fourth edition, 1979