

# Filtrage adaptatif non-linéaire utilisant une entrée cyclostationnaire

Jean-Pierre Costa, Philippe Rostaing et Thierry Pitarque

Laboratoire I3S, CNRS-UNSA, 250 Av Albert EINSTEIN

Sophia Antipolis, 06560 Valbonne FRANCE

costa@alto.unice.fr

## RÉSUMÉ

Cet article compare différents signaux de référence pour un filtrage adaptatif de Volterra à temps discret pour une application spécifique : le brouilleur. L'originalité de cette étude est d'utiliser une référence cyclostationnaire pour exciter le moins possible les modes du système inconnu étudié. Cette nouvelle approche permet d'obtenir un modèle de Volterra minimal car tous les termes non excités sont alors rejetés.

## ABSTRACT

This paper studies input signals for a discrete-time nonlinear Volterra adaptive filtering for a specific application : the jammer. The originality consists in using a cyclostationary reference to excite as less as possible the modes of an unknown nonlinear system. This new approach leads to a minimal Volterra model, because all non exciting terms of the model are rejected.

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications l'utilisation de modèles linéaires ne permet pas de décrire entièrement la dynamique des systèmes physiques [1]. Les modèles non-linéaires peuvent combler certaines limitations des modèles linéaires. Dans le but d'identifier les paramètres d'un modèle non-linéaire caractérisant un système inconnu, le signal d'entrée doit être suffisamment riche. De plus le choix du signal d'entrée joue un rôle sur la qualité d'estimation des paramètres obtenus par l'identification expérimentale. Cet article compare différents signaux de référence pour un filtrage adaptatif (Least Mean Square (LMS)) de Volterra à temps discret pour une application spécifique : le brouilleur (cf Fig. 1).

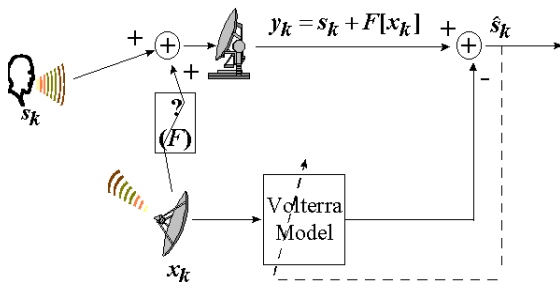


FIG. 1 — Schéma descriptif du brouilleur

Les contraintes de cette application sont les suivantes :

- On souhaite émettre un signal perturbateur (connu)  $x_k$  et en même temps estimer un signal utile (inconnu)  $s_k$ .
- Le signal de référence  $x_k$  doit être un signal large bande. En effet, il doit pouvoir masquer le signal utile car  $s_k$  peut varier en fréquence au cours du temps.
- Le système inconnu  $F$  est supposé non-linéaire (contrainte physique).

## 2 Modèle de Volterra

Le modèle de Volterra à temps discret d'ordre  $N$ ,  $M$  (degré de non-linéarité  $N$  et de mémoire  $M$ ), est défini par

$$y_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^{M-1} h_i(j_1, \dots, j_n) x_{k-j_1} \cdots x_{k-j_n} \quad (1)$$

où  $y_k$  est la séquence de sortie observée associée à la séquence d'entrée  $x_k$  et  $h_i(j_1, \dots, j_n)$  correspond au noyau d'ordre  $n$ . Le nombre  $p$  de termes de l'équation (1) est de

$$p = \frac{(N+M)!}{N!M!} - 1 \quad (2)$$

Si  $N$  et/ou  $M$  sont grands, le nombre  $p$  augmente rapidement [5]. Si on observe le système à l'instant  $k$  et durant une période  $L$ , le vecteur d'observation s'écrit alors,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{X}_k \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_k \quad (3)$$

où  $\boldsymbol{\eta}_k$  est une séquence de bruit,  $\mathbf{X}_k$  est une matrice des données d'entrée de dimension  $L \times p$ . Elle est définie par  $\mathbf{X}_k \triangleq [\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k+L-1}]^t$  avec

$$\mathbf{x}_k \triangleq [x_{k-j_1} \ x_{k-j_1} x_{k-j_2} \ \cdots \ x_{k-j_1} x_{k-j_2} \cdots x_{k-j_N}]^t \quad (4)$$

pour  $j_1, j_2, \dots, j_N = 0 \dots M - 1$ .

Si  $\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k$  est de rang plein, alors l'estimé  $\hat{\theta}$  des paramètres du modèle, par les moindres carrés est donné par la relation

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k)^{-1} \mathbf{X}_k^t \mathbf{y}_k \quad (5)$$

L'équation 5 est directement liée au nombre de conditionnement de  $\mathbf{X}_k$  : en effet

$$\text{cond } \mathbf{X}_k = \left[ \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k)}{\lambda_{\min}(\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k)} \right]^{1/2} \quad (6)$$

où  $\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$  sont respectivement, la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice  $\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k$ . Il est donc important que cette matrice ( $\mathbf{X}_k^t \mathbf{X}_k$ ) soit bien conditionnée.

### 3 Condition d'excitation persistante (PE)

Une solution envisageable pourrait être d'identifier correctement le système inconnu et ensuite de filtrer le signal observé. Dans [2], le système inconnu est identifié par un modèle de Volterra étendu utilisant une référence RMS (Random Multilevel Sequence). La séquence i.i.d (indépendante et identiquement distribuée) RMS doit contenir  $q > N$  valeurs distinctes pour qu'elle soit PE,  $N$  étant le degré de non-linéarité du modèle de Volterra étendu à mémoire finie  $M$ . La définition PE (cf déf. 3.1), assure que tous les modes de la non-linéarité sont excités.

**Définition 3.1** — la séquence stationnaire  $x_k$  est dite PE d'ordre  $(N, M)$  si la matrice d'autocorrélation du modèle

$$R_{\mathbf{X}} \triangleq E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^t] \quad (7)$$

existe et est non singulière.

Cependant, le nombre important de termes de ce modèle rend difficilement exploitable cette méthode. En effet, lorsque  $N$  est grand, la matrice  $R_{\mathbf{X}}$  est mal conditionnée et l'entrée ne stimule pas de façon égale les modes du système.

On propose une approche opposée à celle décrite précédemment. Elle est opposée dans le sens où l'on ne cherche pas à identifier le système inconnu quelle que soit la séquence d'entrée, mais à identifier le système pour une référence bien spécifique. En effet,  $x_k$  devra exciter le moins possible les modes de la non-linéarité du système inconnu  $F$  permettant d'avoir un modèle de Volterra minimal (le nombre de termes du modèle est minimal). On pourra alors estimer  $s_k$  à partir du signal observé  $y_k$ .

Le choix d'une séquence i.i.d binaire, comme signal de référence, prenant les valeurs  $\pm 1$  équiprobablement est un exemple de séquence répondant à une excitation de peu de modes du système non-linéaire. Cependant on montrera, par le calcul théorique de  $R_{\mathbf{X}}$ , que le signal BPSK (Binary Phase Shift Keying) avec des paramètres judicieusement choisis ( $R$  nb d'échantillons bloqués et  $f_0$  fréquence réduite de la porteuse) est une référence mieux adaptée, car elle excite moins de modes que la séquence binaire, présentant ainsi une

erreur d'estimation moins importante. De plus cette séquence est large bande et respecte ainsi la contrainte imposée par le brouilleur.

## 4 Sélection du signal de référence

### 4.1 Présentation du signal BPSK

Le signal BPSK est un signal cyclostationnaire (voir [3] pour ses propriétés). Si l'on échantillonne ce signal à un multiple entier  $R$  de la période de blocage  $T_c$  du BPSK continu (i.e.  $F_e = R/T_c$ ), on obtient la séquence  $x_k$  suivante

$$x_k = b_k z_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$b_k = \sum_{m=0}^{\infty} a_m p(k + mR) \quad (9)$$

$$z_k = A \cos(\omega_0 k) \quad (10)$$

où  $R$  correspond au nombre d'échantillons bloqués,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  la pulsation réduite de la porteuse,  $a_m$  une séquence équiprobable i.i.d. prenant les valeurs  $\pm 1$  et  $p(k)$  un pulse tel que

$$p(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \dots, R - 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (11)$$

La largeur de bande du signal est inversement proportionnelle à  $R$  (pour  $R = 1$  le signal est blanc). On note que pour  $f_0 = 0$  et  $R = 1$  on obtient une séquence i.i.d. binaire équirépartie.

### 4.2 Sélection des termes du modèle de Volterra

La sélection des termes du modèle de Volterra se détermine par le calcul de  $R_{\mathbf{X}}$ . Il faut pour cela définir  $R_{\mathbf{X}}$  dans le cas d'une séquence cyclostationnaire, celle-ci correspond alors à l'autocorrélation du modèle pour une séquence asymptotiquement stationnaire (cf [4]).

**Définition 4.1** — la séquence cyclostationnaire  $x_k$  est dite PE d'ordre  $(N, M)$  si la matrice d'autocorrélation du modèle

$$R_{\mathbf{X}} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{T-1} E[X_{l+k} X_{l+k}^t] \quad (12)$$

existe et est non singulière.

Tous les éléments de la matrice  $R_{\mathbf{X}}$  sont de la forme

$$R_{n_x}(\mathbf{k}) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{\infty} E[x(l+k_1) \dots x(l+k_n)] \quad (13)$$

Les séquences  $b_k$  et  $z_k$  sont indépendantes, on a

$$R_{n_x}(\mathbf{k}) = R_{n_b}(\mathbf{k}) R_{n_z}(\mathbf{k}) \quad (14)$$

Pour le calcul de  $R_{n_b}(\mathbf{k})$ , on se restreint au cas  $R = 1$  (cf (9)), la séquence  $b_k$  est alors i.i.d. et la connaissance des moments suffit à ce calcul. On obtient

$$E[b_k^p] = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (15)$$

Il reste à calculer  $R_{nz}(\mathbf{k})$ . Comme  $z_k$  est déterministe, on a

$$R_{nz}(\mathbf{k}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{T-1} \prod_{i=1}^n z_{l+k_i} \quad (16)$$

Cette limite se ramène à l'expression générale suivante

$$R_{nz}(\mathbf{k}) = \left(\frac{A}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{\boldsymbol{\omega} \in P_k} \exp(j\omega_0 \boldsymbol{\omega}^t \mathbf{k}) \eta_{(n-2k)\omega_0} \quad (17)$$

où l'on définit l'ensemble  $\Omega \triangleq \{\boldsymbol{\omega}/\boldsymbol{\omega}^t = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n], a_i = \pm 1\}$  et  $P_k \subset \Omega$  tel que  $P_k \triangleq \{\boldsymbol{\omega} : \text{le vecteur } \boldsymbol{\omega} \text{ possède } k \text{ composantes égales à } -1\}$ . Le cardinal de  $P_k$  est le nombre de combinaisons de  $k$  éléments dans un ensemble de  $n$  éléments (i.e.  $\text{card}(P_k) = C_n^k$ ). Dans (17), la fonction  $\eta$  est définie par

$$\eta_\xi \triangleq \begin{cases} 1 & \text{pour } \xi = 0 \text{ mod } 2\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18)$$

En utilisant (14,15 et 17), on calcule  $R_X$  pour la séquence BPSK  $x_k$  avec  $N$  et  $M$  fixé. Le rang de cette matrice permet de déterminer le vecteur  $X'_k$  ne comprenant que les  $p'$  termes de  $X_k$  associés aux valeurs propres non nulles.  $R_{X'}$  est alors de rang plein. On sélectionne alors ces  $p'$  termes.

## 5 Filtrage adaptatif non-linéaire

Afin de valider cette étude théorique, on l'applique à présent dans le cadre du filtrage adaptatif non-linéaire de signaux simulant un brouilleur. Pour cela on compare les performances de différents signaux de référence blancs  $x_k$  : bruit blanc gaussien (WGN white Gaussian noise), une référence RMS à trois, quatre ou cinq niveaux, une référence binaire et la référence BPSK de porteuse  $f_0 = 0.25$ . Pour cela on utilise l'erreur quadratique moyenne  $E_r$  définie par

$$E_r = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (s_k - \hat{s}_k)^2$$

Le système non-linéaire simulé est un modèle NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs). Le modèle NARMAX est une représentation naturelle d'une large classe de systèmes réels [5]. On considère l'exemple suivant où la sortie du système inconnu est donnée par l'équation

$$z_k = F(x_k) = 0.5x_k + 0.6x_{k-3}^2 - 0.8x_{k-1}z_{k-1} - 0.2x_{k-2}^3$$

Le signal utile  $s_k$  est un signal sinusoïdal de fréquence normalisée  $f_s = 0.1$ . L'observation  $y_k = z_k + s_k$ . Le rapport signal à bruit est fixé à  $-15$  dB. Dans un premier temps, on fixe l'ordre du modèle de Volterra à  $N = 2$  et  $M = 4$ , soit  $p = 14$  termes (Eq.2).

Pour une dynamique d'entrée identique pour tous les signaux de référence, on considère deux stratégies d'identification différentes :

- La première méthode généralement utilisée consiste à exciter le plus possible le système inconnu par une référence judicieusement choisie. Pour cette configuration on utilisera les séquences WGN et RMS.

- Par opposition la seconde méthode consiste à exciter le moins possible le système inconnu. On utilisera les séquences binaire et BPSK comme références à l'entrée du système inconnu.

Les simulations ont été réalisées sur 6000 échantillons, mais le calcul de l'erreur d'estimation porte sur les 1000 derniers échantillons, s'affranchissant ainsi de la zone de convergence des coefficients. Ces résultats sont reportés sur le tableau 1 ainsi que sur la figure 2.

Le calcul théorique de  $R_X$  pour un Volterra d'ordre(2,4) a permis de rejeter 3 termes pour la référence binaire et 6 termes pour la référence BPSK et aucun terme pour les références WGN et RMS.

	WGN	RMS	Binary	BPSK
$\lambda_{max}$	5.925	3.021	1.041	0.513
$\lambda_{min}$	0.926	2.007	0.955	0.4812
Conditionnement	2.529	3.021	1.044	1.033
Er	5.463	0.450	1.343	3.24e-4
Nb de termes $p'$	14	14	11	8

TAB. 1 — Simulation 1

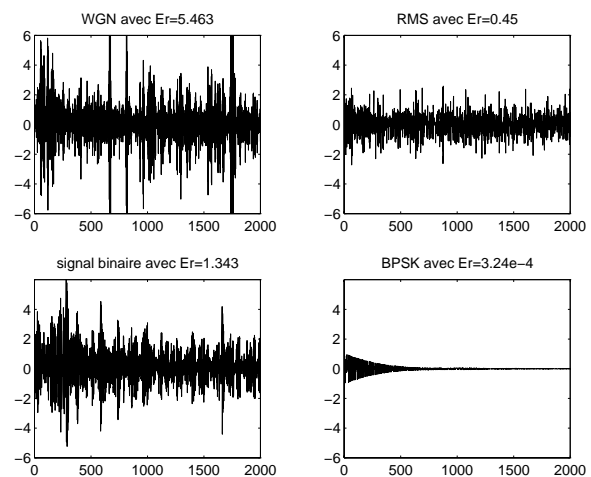


FIG. 2 — Erreur d'estimation

La référence WGN ne donne pas de bons résultats au regard de l'erreur d'estimation. En effet le degré de la non-linéarité du modèle  $N$  est inférieur au degré du modèle NARMAX ; de plus il y a un terme croisé  $x_{k-1}z_{k-1}$  qui ne peut pas être modélisé par un seul terme du modèle de Volterra.

Les deux références WGN et RMS, bien qu'elles aient des valeurs propres différentes, possèdent un conditionnement très proche. Les références RMS et binaire ont une erreur d'estimation du même ordre. En revanche la référence BPSK avec uniquement 8 termes permet d'obtenir une forte diminution de l'erreur d'estimation.

Donc la stratégie de faible excitation du système inconnu, donne des résultats satisfaisants. Il reste à la comparer avec l'approche traditionnelle d'identification.

Dans une seconde simulation, on fait varier l'ordre ( $N, M$ ) de modèle de Volterra pour les références WGN et RMS. On favorise ainsi l'identification du système inconnu pour des séquences PE d'ordre( $N, M$ ).

Le tableau 2 montre l'erreur d'estimation ( $E_r$ ) pour les références WGN et RMS en fonction de l'ordre du modèle de Volterra. La figure 3 montre l'erreur d'estimation pour un modèle de Volterra d'ordre (3,5). Ces résultats sont à comparer avec les résultats obtenus avec la référence BPSK (figure 2).

$N, M$	$p$	$E_r$	
		WGN	RMS
3,4	34	4.44	0.40
3,5	55	3.90	0.19
3,6	83	3.63	0.17
4,4	69	3.08	0.14
4,5	125	2.59	0.12
4,6	209	2.20	0.07

TAB. 2 — Simulation 2

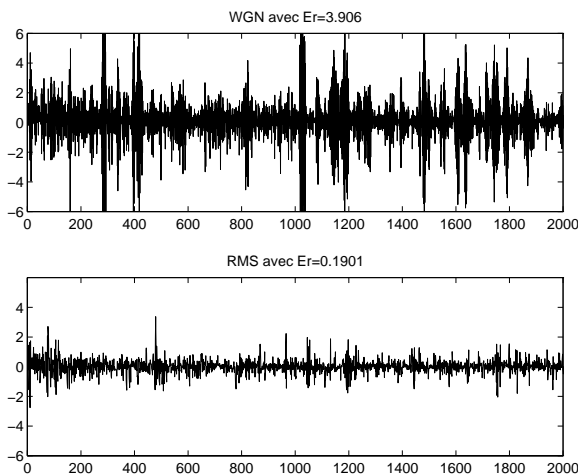


FIG. 3 — Erreur d'estimation pour  $N = 3$  et  $M = 5$

On montre ici que lorsque  $N$  et/ou  $M$  augmentent, l'erreur d'estimation diminue. Le modèle d'identification tend vers une "bonne" approximation du système inconnu, lorsque  $M$  tend vers  $\infty$ .

Lorsqu'on compare ces résultats avec ceux obtenus pour la référence BPSK, on s'aperçoit que malgré un nombre de coefficients nettement inférieur ( $p = 8 \ll 209$ ), l'erreur d'estimation reste la plus faible.

Enfin le signal BPSK a permis de mettre en évidence l'importance du signal d'excitation du système. On a montré que la référence choisie donne une erreur d'estimation très satisfaisante, pour un nombre de termes minimal du modèle de Volterra.

## 6 Conclusion

Cette étude porte sur le choix de la séquence d'excitation du système inconnu représentant la structure d'un brouilleur et du milieu ambiant. L'originalité de notre approche est de sélectionner une référence excitant le moins possible ce système inconnu. Afin de déterminer les caractéristiques d'excitation persistante de cette référence on a étendu le calcul de  $R_x$  au cas asymptotiquement stationnaire. Ce calcul permet de pré-sélectionner les termes du modèle de Volterra pour le filtrage adaptatif.

Les simulations effectuées avec les signaux WGN, RMS, séquence Binaire et BPSK, ont permis de choisir le signal BPSK comme signal de référence excitant le moins le système inconnu(NARMAX), par la mesure de l'erreur quadratique moyenne. Le modèle de Volterra obtenu est minimal et valable seulement pour cette référence.

Il nous reste à valider cette étude en situation réelle, notamment sur des signaux de communication.

## Références

- [1] J. C. Stapleton, S. C. Bass, "Adaptive Noise Cancellation for a Class of Nonlinear, Dynamic Reference Channels" IEEE trans. on circuits and systems, 32(2) :143-150, february 1985.
- [2] R. D. Nowak, B. D. Van Veen, "Random and Pseudorandom Inputs for Volterra Filter Identification" IEEE trans. on Signal Processing, 42(8) :2124-2135, august 1994.
- [3] P. Rostaing, E. Thierry, T. Pitarque, "Performance Analysis of a Statistical Test for Presence of Cyclostationarity in a Noisy Observation" International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP'96, 1212-1215, Mai 1996, Atlanta, USA.
- [4] W. A. Gardner, "Introduction to Random Processes with Application to Signals & Systems" McGraw-Hill, 1986.
- [5] S. Chen, S. A. Billings "Representations of nonlinear systems : the NARMAX model" INT. J. Control, 49(3) :1013-1032, 1989.