Egalisation aveugle au second ordre : le cas de signaux à bande limitée

Ph. Ciblat [1,*], **Ph. Loubaton**[1] **et P. Larzabal**[2]

[1] Equipe Système de Communication, Université de Marne-la-Vallée
2, rue de la Butte Verte 93166 Noisy-le-Grand, France
[2] LESIR, Ecole Normale Supérieure de Cachan
61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan, France

RÉSUMÉ

Il est bien connu que les algorithmes classiques d'égalisation aveugle au second ordre basés sur le suréchantillonnage du signal reçu ont des performances médiocres dans le cas où le signal modulé a une bande passante réduite. Dans la première partie, nous nous attachons à analyser les causes de ces mauvaises performances dans le cadre de la méthode sous-espace introduite par Moulines et al. Dans la seconde, nous montrons que les méthodes dites de "covariance matching" permettent d'améliorer considérablement les résultats.

ABSTRACT

Most of the second order based fractionnally sampled blind equalizers are known to perform poorly in the context of band limited signals. In the first part of this paper, we analyse this fact in the case of the subspace method introduced by Moulines et al. In the second part, we show that the "covariance matching" approach allow to considerably improve the statistical performance.

1 Introduction

On suppose qu'une suite de symboles $\{v_n\}_{n\in Z}$, centrée, i.i.d., circulaire, gaussienne, de variance 1 pour simplifier, est émise par le biais d'une modulation linéaire. Du fait d'éventuels multi-trajets, le signal à temps continu $\{\tilde{y}(t)\}$ reçu au niveau du récepteur[1] s'écrit sous la forme :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n\in Z} v_n \tilde{h}(t-nT)$$

T représente la période symbole et $\{\tilde{h}(t)\}$ une fonction inconnue, résultant de l'effet conjugué du filtre de mise en forme et des multi-trajets, et que l'on supposera à support limité et causale (ce qui n'induit aucune restriction). Dans ces conditions, le signal à temps discret $\{\tilde{y}(nT)\}$ est la sortie du filtre FIR (inconnu) de réponse impulsionnelle $\{\tilde{h}(kT)\}$ excité par la suite des symboles. Pour reconstituer les symboles émis, il est nécessaire d'identifier ce filtre afin de pouvoir compenser son effet. Il est bien connu que ce problème nécessite l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur à 2, et que les performances des techniques correspondantes sont, semblent-ils, insuffisantes dans le contexte de la plupart des applications liées aux communications numériques.

Récemment, Tong et al [1] ont proposé d'utiliser la cyclostationnarité du signal $\{\tilde{y}(t)\}$ pour résoudre de façon plus satisfaisante le problème de l'égalisation aveugle. Pour ceci, le signal $\{\tilde{y}(t)\}$ est suréchantillonné, disons d'un facteur 2 pour simplifier les notations. En posant $y(n) = \tilde{y}(n\frac{T}{2})$ et $h_k = \tilde{h}(k\frac{T}{2})$, il apparait que

$$y(n) = \sum_{k=0}^{P} h_k u_{n-k} = [h(z)]u(n)$$

où u_n est la suite définie par $u_{2n} = v_n$ et $u_{2n+1} = 0$ et où $h(z) = \sum_{k=0}^{P} h_k z^{-k}$. La suite $\{u_n\}_{n\in Z}$ et donc le signal $\{y(n)\}$ sont cyclostationnaires de fréquences cycliques 0 et $\frac{1}{2}$, et les cyclospectres correspondants de y sont égaux à $S_y^0(e^{2i\pi f}) = |h(e^{2i\pi f})|^2$ et $S_y^{\frac{1}{2}}(e^{2i\pi f}) = h(e^{2i\pi f})h^*(e^{2i\pi(f-\frac{1}{2})})$, où $h(z) = \sum_{k=0}^{P} h_k z^{-k}$.

Le point important est que, sous réserve que les polynômes $h(z)$ et $h(-z)$ n'ont pas de zéro commun, alors la donnée de S_y^0 et de $S_y^{\frac{1}{2}}$ permet de reconstituer $h(z)$ de façon unique. En d'autre terme, $h(z)$ est identifiable à partir des statistiques cycliques du second ordre des observations, et divers algorithmes performants basés sur cette idée ont été proposés depuis Tong et al [1]. Il a cependant été observé que leurs performances sont d'autant plus décevantes que la bande passante du signal $\{\tilde{y}(t)\}$ est réduite. En effet, le filtre de mise en forme utilisé pour générer le signal modulé est choisi de telle sorte que la bande passante utilisée soit réduite, tout en maintenant l'interférence intersymbole correspondante dans des proportions raisonnables.

En pratique, il est fréquent que la transformée de Fourier du filtre de mise en forme soit numériquement nulle hors d'un intervalle $[-\frac{\beta}{T}, \frac{\beta}{T}]$, où β est un facteur positif compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Il est alors simple de constater que la transformée de Fourier de la fonction $\tilde{h}(t)$ a le même support, et qu'en conséquence, le filtre FIR $h(z)$ est tel que :

*titulaire d'une bourse DRET-CNRS

[1] en fait, son enveloppe complexe

$$h(e^{2i\pi f}) \approx 0 \;\; si \;\; f \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{\beta}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}\right[\quad (1)$$

Dans la suite, nous allons poser $\mathcal{I}_1 = [-\frac{1}{2}, -\frac{\beta}{2}] \cup [\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}[$, $\mathcal{I}_2^+ = [\frac{1-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$, $\mathcal{I}_2^- = [-\frac{\beta}{2}, -\frac{1-\beta}{2}]$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2^+ \cup \mathcal{I}_2^-$ et $\mathcal{I}_3 = [-\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2}]$.

Dans la première partie de cette communication, nous analysons clairement les conséquences de cet état de fait en nous focalisant sur les performances de la méthode sous-espace introduite par Moulines et al [2]. Une fois les conséquences analysées, nous évaluons le potentiel des statistiques du second ordre dans le cas bande limitée en évaluant la covariance asymptotique de la méthode dite de "covariance matching'" pondérée optimalement. Nous montrons que des améliorations considérables peuvent être obtenues.

2 La Méthode sous-espace

Commençons par rappeler les fondements de la méthode sous-espace. Pour ceci, par raison de simplicité, nous allons supposer que le degré P du filtre $h(z)$ est impair, et nous posons $P = 2M + 1$. A partir du signal cyclostationnaire $y(n)$, on peut construire par "empilement" le signal vectoriel de dimension 2, $Y(n) = [y(2n+1)\ y(2n)]^T$. Il est simple de constater que Y est stationnaire, et que $Y(n) = [H(z)]v_n$, où $H(z)$ est le filtre 1 entrée / 2 sorties dont les deux composantes sont les parties impaires et paires de $h(z)$, i.e.,

$$H_1(z^2) = \frac{h(z) - h(-z)}{2z^{-1}} \quad H_2(z^2) = \frac{h(z) + h(-z)}{2} \quad (2)$$

Soient $N \geqslant M$ et $Y_N(n) = [Y^T(n) \dots Y^T(n-N)]^T$. Alors $Y_N(n)$ s'écrit sous la forme $Y_N(n) = \mathcal{T}_N(h) V_{M+N}(n)$, où $V_{M+N}(n)$ est défini de manière analogue à $Y_N(n)$, et où $\mathcal{T}_N(h)$ est la matrice $2(N+1) \times (N+M+1)$, dite de Sylvester, définie par :

$$\mathcal{T}_N(h) = \begin{pmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_M & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & H_0 & H_1 & \dots & H_M & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & H_0 & H_1 & \dots & H_M \end{pmatrix}$$

Puisque $N \geqslant M$, cette matrice est rectangulaire, et le vecteur $Y_N(n)$ appartient pour tout n à son espace image. L'idée de la méthode sous-espace consiste à remarquer que $H(z)$ peut-être identifié de façon unique à partir de $\text{Im}(\mathcal{T}_N(h))$, ou de façon équivalente, à partir du noyau de la matrice de covariance $R_N(h) = \mathcal{T}_N(h)\mathcal{T}_N^*(h)$ de $Y_N(n)$ si ses composantes sont premières entre elles, (ou de façon équivalente si $h(z)$ et $h(-z)$ sont premiers entre eux), condition que nous supposons vérifiée à partir de maintenant. Plus précisement, soient Π_N le projecteur orthogonal sur le noyau de $R_N(h)$ et $F(z)$ un polynôme 2×1 de degré M, alors

$$\Pi_N \mathcal{T}_N(F) = 0 \iff F(z) = \alpha H(z)$$

avec α un scalaire constant.

En d'autres termes, si à un polynôme $F(z) = \sum_{k=0}^{M} F_k z^{-k}$ on associe le polynôme scalaire $f(z) = F_2(z^2) + z^{-1} F_1(z^2)$ et le vecteur $\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_{2M+1})^T$ de ses coefficients, alors la forme quadratique $\mathbf{f} \to Trace(\mathcal{T}_N^*(\mathbf{f})\Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f})) = \mathbf{f}^* Q \mathbf{f}$ possède un noyau de dimension 1 engendré par le vecteur $\mathbf{h}$ associé à $h(z)$, avec $Q = \mathcal{P} D_\Pi^* D_\Pi \mathcal{P}$ où $\mathcal{P} = I_{M+1} \otimes J_2$, où $\otimes$ représente le produit de Kronecker, où J_2 est la matrice 2×2 d'inversion $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et où D_Π est une matrice $2(N+1)(M+N+1) \times 2(M+1)$

$$D_\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{0,N} & 0 & \dots & 0 \\ \Pi_{1,N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \Pi_{N,N} & & & \Pi_{0,N} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Pi_{N,N} \end{pmatrix}$$

et $\Pi_N = [\Pi_{0,N}, \dots, \Pi_{N,N}]$ avec les $\Pi_{k,N}$ des blocs de taille $2(N+1) \times 2$. En pratique $R_N(h)$, Π_N et Q sont évaluées à partir des données et on estime le vecteur associé à $H(z)$ par le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de l'estimée $\hat{Q}$ de Q.

Les développements qui suivent justifient que dans le cas bande limitée qui nous intéresse, la matrice Q est en fait très mal conditionnée, i.e., son noyau numérique est de dimension plus grande que 1. Il en résulte évidemment que l'estimation de $H(z)$ fournie par la méthode sous-espace est de très mauvaise qualité. Tout repose sur le fait que, compte tenu de (1), l'appartenance d'un vecteur ligne $\mathbf{g} = [g_0, \dots, g_{2N+1}]$ au noyau de $R_N(h)$ implique que le filtre scalaire $g(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{2N+1} g_k e^{-2i\pi kf}$ vérifie $g(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_3$. Pour justifier ceci, écrivons $R_N(h)$ comme suit :

$$R_N(h) = \int_0^1 D_N(e^{2i\pi f}) D_N^*(e^{2i\pi f}) \otimes H(e^{2i\pi f}) H^*(e^{2i\pi f}) df$$

avec $D_N(e^{2i\pi f}) = [1, e^{-2i\pi f}, \dots, e^{-2i\pi Nf}]^T$. En écrivant $H(e^{2i\pi f})$ en fonction de $h(e^{2i\pi f/2})$ et de $h(e^{2i\pi(f+1)/2})$, on obtient que

$$R_N(h) = \int_0^{1/2} (K_{2N+1}(e^{2i\pi f}) - K_{2N+1}(e^{2i\pi(f+1/2)})(^*) df$$

où on a posé $K_{2N+1}(e^{2i\pi f}) = D_{2N+1}(e^{2i\pi f}) h(e^{2i\pi f})$ et où $(*)$ signifie le transconjugué de la quantité qui précède. En prenant en compte que $h(e^{2i\pi f})$ est à peu près nul sur $\mathcal{I}_1$, cette expression se réduit approximativement à la somme de 2 intégrales de fonctions positives sur $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$. On obtient alors que $\mathbf{g} R_N(h) \mathbf{g}^*$ est la somme de deux termes positifs devant s'annuler tous deux. Or, la contribution de l'intégrale sur $\mathcal{I}_3$ s'écrit

$$\int_{\mathcal{I}_3} |g(e^{2i\pi f})|^2 |h(e^{2i\pi f})|^2 df \approx 0$$

et sa nullité approximative implique bien que $g(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_3$.

De ce résultat, on peut déduire une expression approchée de Q qui permet d'arriver rapidement à la conclusion finale. Pour ceci, on pose $\pi_N(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{2N+1} \pi_{k,N} e^{-2i\pi kf}$ où les $\pi_{k,N}$ sont les colonnes élémentaires de Π_N. D'après ce qui précède, $\pi_N(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_3$. Par ailleurs, la forme quadratique Q possède aussi une représentation intégrale comparable à celle de $\mathcal{R}_N(h)$, et qui, compte tenu du fait que $\pi_N(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_3$, se met sous la forme :

$$Q = \int_{\mathcal{I}_1} \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f})\mathcal{Q}_1^*(e^{2i\pi f})df + \int_{\mathcal{I}_2^+} \mathcal{Q}_2(e^{2i\pi f})\mathcal{Q}_2^*(e^{2i\pi f})df$$

$$\mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f}) = \overline{D_{2M+1}(e^{2i\pi f})}\pi_N^*(e^{-2i\pi f})$$
$$\mathcal{Q}_2(e^{2i\pi f}) = \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f}) - \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi(f+1/2)})$$

.

L'analyse du conditionnement de cette matrice peut être effectuée en introduisant les suites sphéroïdales aplaties de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, i.e., les vecteurs propres $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1,2M+2}$ de la matrice :

$$\int_{\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \overline{D_{2M+1}(e^{2i\pi f})} D_{2M+1}^T(e^{2i\pi f})df$$

Il est bien connu que cette matrice est mal conditionnée. Aux $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1,s}$ correspondant aux plus petites valeurs propres, on associe des filtres FIR $k_j(z)$ qui vérifient $k_j(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Compte tenu de la forme de Q, il est clair que $\mathbf{k}_j^* Q \mathbf{k}_j \approx 0$ pour $j = 1, s$. En d'autre terme, le noyau "numérique" de Q contient, outre le vecteur $\mathbf{h}$, les vecteurs $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1,s}$. Ceci provient spécifiquement du fait que, puisque $\pi_N(e^{2i\pi f}) \approx 0$ sur $\mathcal{I}_3$, alors la représentation intégrale de Q ne fait apparaitre qu'une intégrale portant sur $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Par conséquent, on peut rajouter à $h(e^{2i\pi f})$ n'importe quel polynôme provenant d'une combinaison linéaire des plus petites suites sphéroidales $\{\mathbf{k}_j\}_{j=1,s}$ sans pour autant modifier sensiblement la valeur de la forme quadratique associée à Q. La méthode sous-espace ne donne donc que fort peu d'indications sur les valeurs prises par $h(e^{2i\pi f})$ pour $f \in \mathcal{I}_3$. A titre d'exemple, on présente sur le tableau 1 quelques simulations obtenues dans le cas d'un filtre de mise en forme en cosinus surélevé de *roll-off* $\rho = 0.2$, de bande $\beta = 0.58$ avec $N = 8$. Il est à noter que les valeurs propres de la matrice Q forment deux catégories bien distinctes, i.e., celles qui sont proches de zéro et celles qui en sont très éloignées.

dim Ker(Q)	s
6	5
$k_j^* Q k_j$ avec $j = 1, \ldots, s$	$\inf\{k_l^* Q k_l,\ l > s\}$
0.1 ; 0.06 ; 0.08 ; 0.09 ; 0.04	1.11

TAB. 1 — Lien entre les s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ et le noyau de Q.

Ce phénomène peut être analysé en terme de performances statistiques asymptotiques de l'estimateur du filtre $h(e^{2i\pi f})$, dans le cas où les observations sont bruitées par un bruit blanc, gaussien, centré et de variance σ^2. Soit C_{ssm} la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du filtre $\mathbf{h}$, définie comme suit,

$$\sqrt{K}(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) \overset{Loi}{\rightarrow} \mathcal{N}(0, C_{ssm})\ quand\ K \rightarrow \infty$$

où K est le nombre d'observations. D'après [5] la matrice C_{ssm} s'écrit de la manière suivante :

$$C_{ssm,W} = (\mathcal{P} D_\Pi^* D_\Pi \mathcal{P})^\# \mathcal{P} D_\Pi^* \Sigma_1 D_\Pi \mathcal{P} (\mathcal{P} D_\Pi^* D_\Pi \mathcal{P})^\#$$

avec

$$\Sigma_1 = \overline{\mathcal{T}_N^{-L}(h)} \otimes \Pi_N \Sigma_2 \mathcal{T}_N^{-L}(h)^T \otimes \Pi_N,$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \lim_{K\to\infty} KE((vec(\hat{R}_N - R_N)(vec(\hat{R}_N - R_N)^*) \\ &= \int_0^1 \overline{D_N(e^{2i\pi f})} D_N^T(e^{2i\pi f}) \otimes S^T(e^{2i\pi f}) \otimes \\ &\quad D_N(e^{2i\pi f}) D_N^*(e^{2i\pi f}) \otimes S(e^{2i\pi f}) df\end{aligned}$$

$S(e^{2i\pi f}) = H(e^{2i\pi f})H^*(e^{2i\pi f}) + \sigma^2 Id_2$, $\mathcal{T}_N^{-L}(h)$ l'inverse à gauche de $\mathcal{T}_N(h)$ et $X^\#$ la pseudo-inverse de X.

Pour évaluer les performances asymptotiques de la méthode sous-espace dans le cas bande-limitée, nous avons calculé le conditionnement de la matrice de covariance asymptotique. Les simulations du tableau 2, obtenu avec le même filtre que pour le tableau 1 et un Rapport Signal à Bruit de $60dB$, montrent que la matrice C_{ssm} est très mal conditionnée.

$max_{x\neq 0} \frac{\lVert C_{ssm}x \rVert^2}{\lVert x \rVert^2}$	$min_{x\neq 0} \frac{\lVert C_{ssm}x \rVert^2}{\lVert x \rVert^2}$
61.6	-104.3

TAB. 2 — Valeurs singulières maximale et minimale de C_{ssm}, en dB

De plus, le tableau 3 montre, en accord avec nos résultats précédents, que le filtre $\mathbf{h}$ est identifiable au sous-espace des s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ près, et que la covariance de la projection du vecteur $\mathbf{h}$ associé à $h(e^{2i\pi f})$ sur l'espace des s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, est catastrophique.

$k_j^* C_{ssm} k_j$ avec $j = 1, \ldots, 5$
61.2 ; 57.3 ; 57.1 ; 46.5 ; 40.4

TAB. 3 — Valeurs prises par la forme quadratique C_{ssm} aux s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, en dB

De plus il est bien connu qu'il est possible de pondérer optimalement la méthode sous-espace afin d'améliorer les performances asymptotiques. En pratique, il a été déjà observé ([5]) que ceci n'est susceptible que de fournir des améliorations négligeables dans la plupart des cas. Nous avons pu confirmer ce diagnostic dans le cas particulier des signaux à bande limitée en évaluant la matrice de covariance correspondante donnée par

$$C_{ssm,opt} = (\mathcal{P} D_\Pi^* \Sigma_1^\# D_\Pi \mathcal{P})^\#$$

Donc la méthode sous-espace, dans le cas bande limitée, est défaillante, car aucune information spectrale sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$ n'est utilisée.

3 Covariance Matching

Il convient à présent de savoir si l'on peut obtenir des performances plus satisfaisantes en utilisant des techniques du second ordre différentes. Pour répondre à cette question, il est naturel d'étudier la covariance asymptotique de l'estimateur qui exploite au mieux les statistiques du second ordre des observations, i.e. les entrées de la matrice $\hat{R}_N = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} Y_N(k)Y_N^*(k)$. Ainsi que cela est bien connu, cet estimateur est donné par

$$\hat{\mathbf{h}} = arg\ min_{\mathbf{f}} \left(vec(\hat{R}_N - R_N(\mathbf{f}))\right) W \left(vec(\hat{R}_N - R_N(\mathbf{f}))\right)^*$$

où $R_N(\mathbf{f}) = \mathcal{T}_N(\mathbf{f})\mathcal{T}_N^*(\mathbf{f}) + \sigma^2 Id_{2(N+1)}$, et où W est la pseudo-inverse de la matrice Σ_4 définie plus bas ([6]), et où vec est l'opérateur transformant une matrice en un vecteur colonne . La matrice de covariance asymptotique est alors donnée par

$$C_{cm,W_{opt}} = Z(G^*\Sigma_4^\# G)^\# Z^*$$

En notant $\Re\mathbf{f}$ et $\Im\mathbf{f}$ respectivement les parties réelles et imaginaires du vecteur $\mathbf{f}$, G et Σ_4 sont les matrices définies par

$$G = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial vecR_N(\mathbf{f})}{\partial \Re\mathbf{f}} & \frac{\partial vecR_N(\mathbf{f})}{\partial \Im\mathbf{f}} \\ \frac{\overline{\partial vecR_N(\mathbf{f})}}{\partial \Re\mathbf{f}} & \frac{\overline{\partial vecR_N(\mathbf{f})}}{\partial \Im\mathbf{f}} \end{array}\right)_{\mathbf{f}=\mathbf{h}} \quad (3)$$

$$\Sigma_4 = \left(\begin{array}{cc} \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \overline{\Sigma_3} & \overline{\Sigma_2} \end{array}\right)$$

$$Z = [Id_{2(M+1)}\ iId_{2(M+1)}]$$

en notant $\frac{\partial\Phi(\mathbf{f})}{\partial\mathbf{f}}$ la matrice dont chaque colonne est la dérivée partielle de Φ par rapport à une composante du vecteur $\mathbf{f}$, ce qui donne que $\frac{\partial vecR_N(\mathbf{f})}{\partial\Re\mathbf{f}} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ et $\frac{\partial vecR_N(\mathbf{f})}{\partial\Im\mathbf{f}} = i(\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1)$ avec

$$\mathcal{D}_1 = \int_0^1 D_M^*(e^{2i\pi f}) \otimes \overline{D_N(e^{2i\pi f})} \otimes Id_2 \otimes D_N(e^{2i\pi f}) \otimes H(e^{2i\pi f})df$$

$$\mathcal{D}_2 = \int_0^1 D_M^T(e^{2i\pi f}) \otimes \overline{D_N(e^{2i\pi f}) \otimes H(e^{2i\pi f})} \otimes D_N(e^{2i\pi f}) \otimes Id_2 df$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \lim_{K\to\infty} KE((vec(\hat{R}_N - R_N))(vec(\hat{R}_N - R_N))^T) \\ &= \int_0^1 D_N(e^{2i\pi f})D_N^*(e^{2i\pi f}) \otimes S^*(e^{2i\pi f}) \oslash \\ &\quad D_N(e^{2i\pi f})D_N^*(e^{2i\pi f}) \otimes S(e^{2i\pi f})df \end{aligned}$$

où $\oslash$ est un produit de matrice, défini de la manière suivante : Soient deux matrices A et B carré de taille n, alors $C = A \oslash B$, qui est de taille n^2 s'écrit $C_{p+nq,p'+nq'} = A_{p,q'}B_{p'q}$.

Sur le tableau 4, nous donnons le résultat de simulations faites dans le même cadre que celui des tableaux 1 et 2.

$max_{x\neq 0} \frac{\|\|C_{cm,W_{opt}}x\|\|^2}{\|\|x\|\|^2}$	$min_{x\neq 0} \frac{\|\|C_{cm,W_{opt}}x\|\|^2}{\|\|x\|\|^2}$
-38	-60

TAB. 4 — Valeurs singulières maximale et minimale de $C_{cm,W_{opt}}$, en dB

En comparant les résultats du tableau 2, avec ceux du tableau précédent, il est clair que le problème d'identification du filtre à bande limitée a été reconditionné, puisque la différence entre les valeurs propres extrêmes n'est plus que d'environ $20dB$.

4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons montré que, dans le cas bande-limitée, les performances des algorithmes type sous-espace étaient mauvaises. La raison en est que ces types d'algorithmes, du fait du caractère bande limitée des signaux, n'utilise aucune information fréquentielle sur un certain intervalle que nous notons $\mathcal{I}_3$. Cette perte d'information n'est pas fatale, puisque l'on peut obtenir des améliorations considérables en utilisant un estimateur déduit de la technique dite du covariance matching. Cependant, ce type de méthodes débouche sur la résolution d'un problème de minimisation délicat, et l'on se trouve confronté avec des problèmes assez similaires à ceux que l'on rencontre dans le contexte des algorithmes de maximisation de la vraisemblance. Il reste donc à mettre en évidence des techniques d'estimation performantes, mais donnant lieu à des algorithmes plus commodes à utiliser.

Références

[1] L. Tong, G. Xu et T. Kailath : *A new approach to blind identification and equalization of multipath channels* Procedings of the $25th$ Asilomar Conference, Pacific Grove, CA, pp. 856-860, 1991.

[2] E. Moulines, P. Duhamel, J.F. Cardoso, S. Mayrargue : *Subspace method for the blind equalization of multichannel FIR filters* IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 43, pp. 516-526, Février 1995.

[3] D. Slepian : *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainly* The Bell System Technical Journal, vol. 57, N^o 5, Mai-Juin 1978.

[4] A.J. van der Veen : *Resolution limits of blind multi-user multichannel identification schemes : the band limited case* Procedings of ICASSP, Atlanta, Mai 1996.

[5] K. Abed-Meraim, J.F. Cardoso, A.Y. Gorokhov, Ph. Loubaton, E. Moulines : *On Subspace Methods for Blind Identification of Single-Input Multiple-Output FIR Systems* IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, pp. 1-14, Janvier 1997.

[6] A.Y. Gorokhov : *Séparation autodidacte des mélanges convolutifs : méthodes du second ordre*, Thèse soutenue à l'ENST en Mai 1997.