

# Analyse de signaux FM affectés par un bruit multiplicatif et un bruit additif

Abdelaziz OULDALI et Messaoud BENIDIR

Université Paris sud  
Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supelec  
Plateau de Moulon  
91192 Gif-sur-Yvette, France.

## RÉSUMÉ

Dans ce travail nous nous intéressons à l'estimation de la phase polynomiale d'un signal affecté par un bruit multiplicatif et un bruit additif. Nous montrons que si la moyenne du bruit multiplicatif est non nulle, l'estimation de la phase est possible en utilisant la transformée de phase polynomiale (TPP). En revanche cette transformée se révèle inefficace dans le cas où la moyenne est nulle. Pour palier à cette difficulté nous introduisons une extension de la transformée polynomiale. Nous proposons une borne inférieure du nombre d'échantillons à utiliser pour assurer une bonne estimation de la phase. Nous calculons le biais et la variance de l'estimateur du coefficient du plus haut degré de la phase et de ceux de l'estimateur de la moyenne du bruit multiplicatif.

## ABSTRACT

In this paper, we study the problem of phase estimation of a polynomial phase signal affected by a multiplicative and an additive noise. We show that in the case of a non-zero mean multiplicative noise, the estimation of the phase is possible using the polynomial phase transform. However this transform is not able to estimate the phase in the case of a zero mean noise. To solve this problem, we introduce an extension of the polynomial phase transform. We propose a lower bound of the number of samples to be treated in order to ensure an accurate estimation of the phase. We derive the bias and the variance of both the estimator of the highest-order coefficient of the phase and the estimator of the mean of the multiplicative noise.

## 1 Introduction

Diverses applications en traitement du signal font intervenir des signaux non-stationnaires et les méthodes classiques d'analyse spectrale se révèlent inadaptées pour l'analyse de tels signaux. C'est pourquoi des distributions non-linéaires, fondées sur les statistiques d'ordre élevé, ont été introduites. Les signaux non-stationnaires se rencontrent, par exemple, dans le cas des radars à compression d'impulsions ou dans le cas de signaux en provenance d'une source mobile. L'étude d'un signal entaché d'effet doppler, sans hypothèses simplificatrices, se ramène à la détermination de la phase  $\phi(t)$  qui apparaît dans l'expression du signal reçu. Dans le cas où  $\phi(t)$  est une phase polynomiale, plusieurs méthodes ont été développées [1] [2] [4] [8]. Par ailleurs, dans certaines applications (sonar, radar) le modèle du bruit additif est insuffisant car les signaux sont parfois sujets à des perturbations d'amplitude [3] [5] [6] [10]. Dans [6] les cumulants d'ordre quatre ont été utilisés pour analyser des signaux sinusoïdaux modulés en amplitude par un bruit gaussien, réel et stationnaire. Dans [3] l'approche paramétrique a été utilisée pour estimer la fréquence d'une sinusoïde en présence de bruit multiplicatif. Une distribution dénommée le trispectre a été utilisée dans [5] pour analyser des signaux modulés linéairement en fréquence et affectés par des bruits multiplicatif et additif. L'approche cyclostationnaire a été utilisée dans [10] pour l'analyse des signaux à phase polynomiale (SPP) ayant des amplitudes aléatoires.

Dans ce papier, nous considérons que le modèle du signal

observé est :

$$y(n) = b(n)e^{j\phi(n)} + w(n), \quad n = 1, \dots, N_e \quad (1)$$

où  $b(n)$  est un bruit multiplicatif,  $w(n)$  un bruit additif et  $\phi(n)$  une phase polynomiale. Nous supposons que  $w(n)$  est blanc, circulaire, complexe, gaussien, centré, de variance  $\sigma_w^2$  et indépendant de  $b(n)$  et l'on pose :

$$\phi(n) = \sum_{i=0}^N a_i(n\Delta)^i \quad (2)$$

où  $\Delta$  est la période d'échantillonnage et  $N$  le degré de  $\phi$ .

Le problème considéré dans ce papier peut être décrit comme suit. Connaissant les observations  $\{y(n)\}_{n=1}^{N_e}$ , comment peut-on estimer les coefficients de la phase dans les deux situations suivantes :

**A1**  $b(n)$  est un bruit blanc, réel et de moyenne  $m_b$  non nulle.

**A2**  $b(n)$  est un bruit blanc, réel et centré.

Sous l'hypothèse **A1**, nous montrons que la transformée de phase polynomiale (TPP), introduite dans [8] [2], peut être directement utilisée pour estimer les coefficients de la phase. Nous donnons une condition sur le nombre minimal d'échantillons à traiter pour assurer une bonne estimation du coefficient du plus haut degré de la phase. En outre, nous déterminons le biais et la variance de l'estimateur du coefficient  $a_N$  et ceux de l'estimateur de la moyenne  $m_b$ . En revanche sous l'hypothèse **A2**, nous montrons que la TPP ne peut pas être utilisée telle quelle pour estimer la phase. Afin de palier à cette difficulté, nous proposons une

solution qui consiste en une modification du noyau de la TPP. Nous appelons le résultat de cette opération la transformée de phase polynomiale modifiée (TPPM). Nous donnons une borne inférieure sur le nombre d'échantillons à utiliser et nous calculons le biais et la variance de l'estimateur du coefficient  $a_N = a_2$  dans le cas d'un chirp.

## 2 Bruit multiplicatif non centré

La TPP d'ordre  $N$  d'un signal complexe  $z(n)$  est définie par [8] [2] :

$$\underline{\mathcal{P}}_N(z, \theta, \tau) \triangleq \sum_{n=1}^{N_e - (N-1)\tau} \prod_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_k \{z(n + (N-1-k)\tau)\}^{c_k} e^{-jn\Delta\theta} \quad (3)$$

où  $\mathcal{F}_k[\cdot]$  est l'opérateur identité si  $k$  est pair et l'opérateur complexe conjugué sinon et  $c_k \triangleq \binom{N-1}{k}$ . Dans toute la suite nous prendrons pour le paramètre de retard  $\tau$  la valeur  $\tau = N_e/N$ . Pour un SPP, d'amplitude unité,  $z(n) = e^{j\phi(n)}$ , nous avons [8] :

$$|\underline{\mathcal{P}}_N(e^{j\phi(n)}, \theta, \tau)| = \left| \frac{\sin[0.5(N_e/N)(\theta_0 - \theta)\Delta]}{\sin[0.5(\theta_0 - \theta)\Delta]} \right|. \quad (4)$$

où  $\theta_0 = N!a_N(\tau\Delta)^{N-1}$ . Comme conséquence immédiate de (4), nous avons la propriété importante suivante :

$$\arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{P}}_N(e^{j\phi(n)}, \theta, \tau)| = N!a_N(\tau\Delta)^{N-1}. \quad (5)$$

### 2.1 Analyse statistique de la TPP

Sous l'hypothèse **A1**, nous pouvons montrer que [7] :

$$E[\underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau)] = \left( \prod_{k=0}^{N-1} m_{c_k} \right) \underline{\mathcal{P}}_N(e^{j\phi(n)}, \theta, \tau) \quad (6)$$

où :  $m_p = E[b^p(n)]$ .

Le moment d'ordre 1 de la TPP dépend uniquement des moments du bruit multiplicatif  $b(n)$ , c'est à dire, en l'absence du bruit additif  $w(n)$ , le résultat (6) reste toujours valable. Comme conséquence immédiate de ce dernier résultat, nous obtenons :

$$\arg \max_{\theta} |E[\underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau)]| = N!a_N(\tau\Delta)^{N-1}. \quad (7)$$

Ce résultat montre que le coefficient du plus haut degré  $a_N$  peut être déterminé à partir de l'abscisse de la raie spectrale apparaissant dans  $|E[\underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau)]|$ . Les  $N$  autres coefficients peuvent ensuite être déterminés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \arg \max_{\theta} |E[\underline{\mathcal{P}}_k(y_k(n), \theta, \tau)]| &= k!a_k(\tau\Delta)^{k-1} \\ \arg \{E[y_0(n)]\} &= a_0. \end{aligned}$$

où  $y_k(n) = y(n)e^{-j\sum_{i=k+1}^N a_i(n\Delta)^i}$ .

L'algorithme suivant résume le processus itératif décrit par l'ensemble des équations précédentes sur la base d'une seule réalisation de  $\{y(n)\}_{n=1}^{N_e}$ .

- 1) Initialisation  $m = N$  et  $y^{(m)}(n) = y(n)$ .
- 2) Choisir  $\tau_m = N_e/m$  et calculer  $\hat{a}_{m,P}$  par :

$$\hat{a}_{m,P} = \frac{1}{m!(\tau_m\Delta)^{m-1}} \arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{P}}_m(y^{(m)}(n), \theta, \tau_m)|.$$

- 3) Faire  $y^{(m-1)}(n) = y^{(m)}(n)e^{-j\hat{a}_{m,P}(n\Delta)^m}$  pour  $n = 1, \dots, N_e$ .
- 4) Faire  $m = m - 1$ . Si  $m \geq 1$  aller en 2).
- 5) L'estimateur  $\hat{a}_{0,P}$  est donné par :

$$\hat{a}_{0,P} = \arg \left\{ \sum_{n=1}^{N_e} y^{(0)}(n) \right\}. \quad (8)$$

Remarquons que cet algorithme est similaire à celui utilisé pour l'estimation d'un SPP à amplitude constante. La valeur estimée de  $a_0$  est donnée comme dans le cas de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Quant à la moyenne  $m_b$  du bruit multiplicatif  $b(n)$ , elle peut être estimée de la manière suivante :

$$\hat{m}_b = \frac{1}{N_e} \left| \sum_{n=1}^{N_e} y^{(0)}(n) \right|. \quad (9)$$

Sous l'hypothèse **A1** et avec le choix particulier de  $\tau$ , la variance de la TPP est donnée par [7] :

$$\text{var} \{ \underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau) \} = \frac{N_e}{N} \left( \prod_{k=0}^{N-1} m_{c_k}^2 \right) \mathcal{G}(\sigma_w^2, c_k) \quad (10)$$

où :

$$\mathcal{G}(\sigma_w^2, c_k) = \prod_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{c_k} \binom{c_k}{i} \frac{m_{2c_k-2i}}{m_{c_k}^2} i! \sigma_w^{2i} \right] - 1. \quad (11)$$

La variance de la TPP ne dépend pas des coefficients de la phase, elle dépend du degré  $N$ , du nombre  $N_e$  d'échantillons, des moments du bruit multiplicatif  $b(n)$  et de la variance  $\sigma_w^2$  du bruit additif  $w(n)$ . La présence de  $b(n)$  et  $w(n)$  limitera les performances de l'estimation du coefficient du plus haut degré. Dans la pratique on se place souvent dans les conditions suivantes [8] :

$$\begin{aligned} \left( \prod_{k=0}^{N-1} m_{c_k}^2 \right) |\underline{\mathcal{P}}_N(e^{j\phi(n)}, N!a_N(\tau\Delta)^{N-1}, \tau)|^2 \\ \geq 25 \text{ var} \{ \underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Un simple calcul conduit à la condition suivante :

$$N_e \geq 25 N \mathcal{G}(\sigma_w^2, c_k) \quad (13)$$

qui donne le nombre minimal d'échantillons à utiliser, pour assurer une bonne estimation de  $a_N$ , pour des valeurs données du degré  $N$ , de la variance  $\sigma_w^2$  et des moments de  $b(n)$ .

### 2.2 Analyse statistique de $\hat{a}_{N,P}$

Le but de cette partie est de trouver la moyenne et la variance de l'estimateur :

$$\hat{a}_{N,P} = \frac{1}{N!(\tau\Delta)^{N-1}} \arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{P}}_N(y, \theta, \tau)|$$

en fonction des moments du bruit  $b(n)$ , de la variance  $\sigma_w^2$  du bruit  $w(n)$  et du nombre  $N_e$  d'échantillons. La méthode utilise l'analyse en perturbation au premier ordre exposée dans [9], valable lorsque  $N_e$  tend vers l'infini. Ainsi nous pouvons montrer [7] que  $E[\hat{a}_{N,P}] \approx a_N$  et que la variance de l'estimateur est donnée par :

$$E[(\hat{a}_{N,P} - a_N)^2] \approx \frac{6N^{2N+1}}{(N!)^2 N_e^{2N+1} \Delta^{2N}} \mathcal{H}(\sigma_w^2, c_k) \quad (14)$$

où :  $\mathcal{H}(\sigma_w^2, c_k) =$

$$\frac{1}{m_b^{2N}} \left\{ \prod_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=0}^{c_k} \binom{c_k}{i}^2 m_{2c_k-2i} i! \sigma_w^{2i} \right] \prod_{k=0}^{N-1} m_{2c_k} \right\}. \quad (15)$$

### 2.3 Analyse statistique de $\hat{m}_b$

Lorsque le bruit  $b(n)$  est gaussien, l'estimateur de la moyenne  $m_b$  est asymptotiquement efficace, c'est à dire qu'il atteint la borne de Cramer et Rao, calculée dans les mêmes conditions. En effet, nous avons :

$$\hat{m}_b e^{j\hat{a}_0} = \frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} y^{(0)}(n). \quad (16)$$

En admettant qu'asymptotiquement  $\sum_{m=1}^N (\hat{a}_{m,P} - a_m)(n\Delta)^m \ll 1$  nous pouvons écrire [7] :

$$\begin{aligned} \log[\hat{m}_b] + j\hat{a}_0 &\approx \log[m_b] + ja_0 + \frac{1}{m_b N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \xi(n) \\ + \frac{1}{m_b N_e} \sum_{n=1}^{N_e} e^{-j\phi(n)} w(n) - j \frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \sum_{m=1}^N \delta a_m (n\Delta)^m \end{aligned} \quad (17)$$

où :  $\xi(n) = b(n) - m_b$  et  $\delta a_m = \hat{a}_{m,P} - a_m$ .

Ainsi nous obtenons :

$$\hat{m}_b - m_b \approx \frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \xi(n) + \frac{1}{N_e} \Re \left\{ \sum_{n=1}^{N_e} e^{-j\phi(n)} w(n) \right\}. \quad (18)$$

De ce résultat, en utilisant les propriétés statistiques de  $b(n)$  et de  $w(n)$ , nous pouvons montrer [7] que  $E[\hat{m}_b] \approx m_b$  et que la variance de l'estimateur est donnée par :

$$E[(\hat{m}_b - m_b)^2] \approx \frac{\sigma_w^2 + 2\sigma_b^2}{2N_e} \triangleq \text{CRB}\{\hat{m}_b\}. \quad (19)$$

## 3 Bruit multiplicatif centré

Nous nous proposons maintenant de traiter le cas d'un bruit multiplicatif centré. Sous cette hypothèse, nous avons [7] :

$$E[\mathcal{P}_N(y, \theta, \tau)] = 0. \quad (20)$$

Ce résultat montre que la TPP ne peut pas être utilisée telle quelle pour l'estimation de la phase.

### 3.1 La TPP modifiée

Afin de résoudre le problème exposé précédemment, nous proposons dans ce papier d'élever au carré le noyau de la TPP. Une telle opération a pour objectif de laisser les puissances paires et de faire disparaître les puissances impaires, respectivement synonymes de moments pairs et impairs. Nous obtenons une transformée appelée la TPP-modifiée (TPPM) et notée  $\underline{\mathcal{M}}_N(z, \theta, \tau)$ , soit :

$$\underline{\mathcal{M}}_N(z, \theta, \tau) \triangleq \sum_{n=1}^{N_e/N} \prod_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_k \{ z(n + (N-1-k)\tau) \}^{2c_k} e^{-jn\Delta\theta}. \quad (21)$$

L'évaluation de la TPPM d'un signal  $z(n)$  revient à l'évaluation de la TPP du carré du même signal. Les exemples suivants illustrent la définition de la TPPM :

$$\underline{\mathcal{M}}_1(z, \theta, \tau) = \sum_{n=1}^{N_e} z^2(n) e^{-jn\Delta\theta} \quad (22)$$

$$\underline{\mathcal{M}}_2(z, \theta, \tau) = \sum_{n=1}^{N_e/2} z^2(n + \tau) (z^*(n))^2 e^{-jn\Delta\theta}. \quad (23)$$

$\underline{\mathcal{M}}_1(z, \theta, \tau)$  est la transformée de Fourier discrète du carré du signal  $z(n)$ .  $\underline{\mathcal{M}}_2(z, \theta, \tau)$  est la fonction ambiguïté du carré du signal  $z(n)$ . En étendant les propriétés de la TPP à la TPPM, nous pouvons établir :

$$\arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{M}}_N(b_0 e^{j\phi(n)}, \theta, \tau)| = 2N! a_N (\tau \Delta)^{N-1}. \quad (24)$$

### 3.2 Analyse statistique de la TPPM

Sous l'hypothèse **A2**, nous pouvons montrer que [7] :

$$E[\underline{\mathcal{M}}_N(y, \theta, \tau)] = \left( \prod_{k=0}^{N-1} m_{2c_k} \right) \underline{\mathcal{M}}_N(e^{j\phi(n)}, \theta, \tau). \quad (25)$$

Contrairement au résultat (20), qui met en évidence l'impossibilité d'utiliser la TPP, sous l'hypothèse **A2**, le résultat (25) montre que le moment d'ordre 1 de la TPPM dépend uniquement des moments pairs du bruit multiplicatif  $b(n)$ , c'est à dire en l'absence du bruit additif  $w(n)$ , le résultat (25) reste toujours valable. La propriété suivante est une conséquence immédiate de (25) :

$$\arg \max_{\theta} |E[\underline{\mathcal{M}}_N(y, \theta, \tau)]| = 2N! a_N (\tau \Delta)^{N-1}. \quad (26)$$

Le coefficient  $a_N$  peut être trouvé à partir de l'abscisse de la raie spectrale apparaissant dans  $|E[\underline{\mathcal{M}}_N(y, \theta, \tau)]|$ . Les  $N$  autres coefficients peuvent être déterminés en utilisant les mêmes principes développés précédemment dans le cas de la TPP. L'algorithme suivant résume la méthode d'estimation des coefficients de la phase en utilisant la TPPM.

- 1) Initialisation  $m = N$  et  $y^{(m)}(n) = y(n)$ .
- 2) Choisir  $\tau_m = N_e/m$  et calculer  $\hat{a}_{m,M}$  par :

$$\hat{a}_{m,M} = \frac{1}{2m!(\tau_m \Delta)^{m-1}} \arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{M}}_m(y^{(m)}(n), \theta, \tau_m)|.$$

- 3) Faire  $y^{(m-1)}(n) = y^{(m)}(n) e^{-j\hat{a}_{m,M}(n\Delta)^m}$  pour  $n = 1, \dots, N_e$ .
- 4) Faire  $m = m - 1$ . Si  $m \geq 1$  aller en 2).
- 5) L'estimateur  $\hat{a}_{0,M}$  est donné par :

$$\hat{a}_{0,M} = \frac{1}{2} \arg \left\{ \sum_{n=1}^{N_e} [y^{(0)}(n)]^2 \right\}. \quad (27)$$

Sous l'hypothèse **A2** et avec le choix particulier de  $\tau$ , la variance de la TPPM est donnée par [7] :

$$\text{var} \{ \underline{\mathcal{M}}_N(y, \theta, \tau) \} = \frac{N_e}{N} \left( \prod_{k=0}^{N-1} m_{2c_k}^2 \right) \mathcal{G}(\sigma_w^2, 2c_k). \quad (28)$$

De la même manière que la TPP, nous aboutissons à la condition suivante :

$$N_e \geq 25 N \mathcal{G}(\sigma_w^2, 2c_k) \quad (29)$$

qui donne le nombre minimal d'échantillons à traiter pour assurer une bonne estimation de  $a_N$ , pour des valeurs données du degré  $N$ , de la variance  $\sigma_w^2$  et des moments pairs de  $b(n)$ . Dans le cas d'un SPP à amplitude constante les conditions (13) et (29) montrent que le nombre d'échantillons nécessaire pour la TPPM est supérieur à celui intervenant dans la TPP [7]. Cependant rappelons que la TPP est inefficace sous l'hypothèse **A2**.

### 3.3 Analyse statistique de $\hat{a}_{2,M}$ pour un chirp

Le but de cette partie est de trouver la moyenne et la variance de l'estimateur :

$$\hat{a}_{2,M} = \frac{1}{4\tau\Delta} \arg \max_{\theta} |\underline{\mathcal{M}}_2(y, \theta, \tau)|$$

en fonction des moments du bruit  $b(n)$ , de la variance  $\sigma_w^2$  du bruit  $w(n)$  et du nombre  $N_e$  d'échantillons. De la même manière que précédemment, nous pouvons montrer que [7]  $E[\hat{a}_{2,M}] \approx a_2$  et que la variance de l'estimateur est donnée par :

$$E[(\hat{a}_{2,M} - a_2)^2] \approx \frac{96}{N_e^5 \Delta^4} \left( \frac{m_4}{\sigma_b^4} + 2 \frac{\sigma_w^2}{\sigma_b^2} + \frac{\sigma_w^4}{\sigma_b^4} \right) \left( \frac{\sigma_w^2}{\sigma_b^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_w^4}{\sigma_b^4} \right). \quad (30)$$

## 4 Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation de la phase d'un SPP affecté par un bruit multiplicatif et un bruit additif. Nous avons montré, dans le cas d'un bruit multiplicatif non centré, qu'il est possible d'utiliser directement la TPP pour estimer la phase. Nous avons trouvé le nombre minimal d'échantillons à traiter pour assurer une bonne estimation de la phase et calculé le biais et la variance de l'estimateur du coefficient  $a_N$ . Nous avons aussi montré que l'estimateur de la moyenne est asymptotiquement efficace. Dans le cas où le bruit multiplicatif est centré, l'utilisation de la TPP dans sa forme initiale ne permet pas d'estimer la phase. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé une modification du noyau de la TPP. Cela nous a conduit à une transformée modifiée qui permet l'estimation de la phase. Nous avons ensuite établi une borne inférieure du nombre d'échantillons à traiter pour assurer une bonne estimation de la phase ainsi que le biais et la variance de l'estimateur de  $a_2$  dans le cas d'un chirp. Enfin, tous les résultats obtenus pour la TPP, sont valables pour la fonction ambiguïté généralisée introduite dans [1] [2].

## Références

- [1] M. Benidir and A.Ouldali, "Generalized time-frequency distributions", in *Proc. of EUSIPCO* (Trieste, Italy), Vol. 4, pp. 1547-1550, Sep. 1996.
- [2] M. Benidir and A.Ouldali, "Polynomial phase signal analysis based on the polynomial derivatives decompositions", soumis à *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997.

- [3] O.Besson and F.Castanie, "On estimating the frequency of a sinusoid in autoregressive multiplicative noise", *Signal processing*, Vol. 30, No. 1, pp. 65-83, Jan. 1993.
- [4] B. Boashash and P. J. O'Shea, "Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher spectra", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 1, pp. 216-220, Jan. 1994.
- [5] B. Boashash and B.Ristich, "Analysis of FM signals affected by gaussian AM using the Reduced Wigner-Ville Trispectrum", in *Proc. of ICASSP-93* (Mineapolis, Minnesota USA), pp. 408-411, Apr. 1993.
- [6] R.Dwyer, "Fourth-order spectra of gaussian amplitude-modulated sinusoids", *JASA*, pp. 919-926, Aug. 1991.
- [7] A. Ouldali and M. Benidir, "Analysis of polynomial phase signals affected by multiplicative noise and additive noise", rapport interne.
- [8] S. Peleg and B. Porat, "Estimation and classification of polynomial phase signals", *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 37, No. 2, pp. 422-430, Mar. 1991.
- [9] S. Peleg and B. Porat, "Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations", *IEEE Trans. Aerospace-Electronic Systems*, Vol. 27, No. 4, pp. 607-615, Jul. 1991.
- [10] S.Shamsunder, G.Giannakis and B.Friedlander, "Estimating random amplitude polynomial phase signals : A cyclostationary approach", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.43, No.2, pp.492-505, Feb. 1995.
- [11] A.Swami, "Multiplicative noise models : Parameter estimation using cumulants", *Signal processing*, Vol. 36, pp. 355-373, Apr. 1994.