

# Trajectographie passive sonar par estimation particulière à maximum de vraisemblance

André MONIN, Gérard SALUT, Vincent TEULIÈRE

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes.  
Centre National de la Recherche Scientifique.  
7, avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse Cedex 4 France  
monin@laas.fr, salut@laas.fr, teuliere@laas.fr

**Résumé** – Cet article introduit la technique particulière à redistributions locales adaptatives, pour la résolution des problèmes d'estimation à maximum de vraisemblance. La performance de la technique est illustrée sur le problème de trajectographie passive SONAR

**Abstract** – This paper introduces the particle method with local adapted redistributions, for the solution of maximum likelihood estimation problems. The performance of this technique is illustrated by the SONAR target motion analysis problem.

## 1 Introduction.

La trajectographie passive SONAR consiste à estimer les éléments cinématiques d'une cible (distance, vitesse et cap) à partir de mesures bruitées de ses émissions acoustiques. Le problème le plus classique est celui de la trajectographie à partir de la mesure seule de l'azimut de la cible ([1],[3],[4],[6]). Le porteur doit alors effectuer des manoeuvres afin d'assurer l'observabilité. L'adjonction des variations Doppler au vecteur de mesure assure l'observabilité du problème même lorsque le porteur reste immobile. Deux approches sont utilisables pour traiter ce problème : le filtrage à minimum de variance ([5] et ses références) et l'estimation à maximum de vraisemblance ([2],[12]). Ces deux approches sont usuellement mises en oeuvre par approximations locales (filtre de Kalman étendu, algorithme de type Newton) et posent généralement des problèmes d'initialisation et de comportement global. Nous introduisons ici l'outil de résolution global qu'est la technique particulière déjà abordée avec succès [7] au sens du filtrage à minimum de variance et brevetée par ailleurs [9]. Cette technique s'avère ici supérieure en performance et en robustesse, au sens du maximum de vraisemblance, lorsqu'on l'assortit de redistributions probabilistes adaptées à la métrique de la vraisemblance. Elle se compare également favorablement aux approximations locales précitées, bien que l'application ne pose pas de difficultés multimodales.

## 2 Modélisation.

### 2.1 Modèle polaire modifié

Le modèle choisi est le modèle polaire modifié [1]. En effet, cette modélisation a largement prouvé son efficacité dans

les approches de type Kalman étendu. Contrairement aux filtres exprimés dans la base cartésienne, le filtre exprimé dans la base polaire modifié ne présente pas de problèmes de stabilité et l'estimation est asymptotiquement non biaisée. Dans l'approche particulière, le repère choisi influe aussi sur la qualité de l'estimation. La modélisation polaire modifiée permet de mieux répartir l'information sur chacune des variables d'état et donc de réduire significativement le nombre de particules nécessaire à une bonne estimation soit du temps de calcul. De plus, l'algorithme utilise une métrique locale pour ses redistributions qui s'avère définie par un calcul de type Kalman étendu. Le choix du modèle polaire modifié s'avère bénéficiaire à ce titre également.

Soit un observateur ( $O$ ) immobile et un mobile cible ( $C$ ) observé dans le plan (voir figure 1 décrivant une trajectoire rectiligne uniforme.

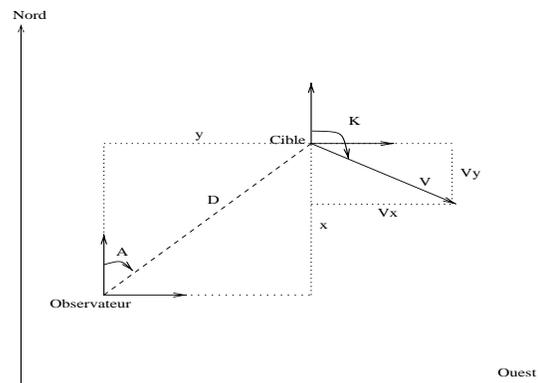


FIG. 1: Localisation de la cible

Le vecteur d'état du modèle polaire modifié est consti-

tué des quatre composantes suivantes :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}(t) \\ \dot{D}(t)/D(t) \\ A(t) \\ 1/D(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Le modèle polaire modifié se déduit du modèle cartésien  $(x, y, V_x, V_y)$ . Il est possible d'exprimer l'état  $X(t)$  en fonction de l'état initial  $X(0)$  par :

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(0)}{(tx_1(0))^2 + (1 + tx_2(0))^2} \\ \frac{tx_1^2(0) + (1 + tx_2(0))^2}{(tx_1(0))^2 + (1 + tx_2(0))^2} \\ x_3(t_0) + \arctan \frac{tx_1(0)}{1 + tx_2(0)} \\ \frac{x_4(0)}{\sqrt{(tx_1(0))^2 + (1 + tx_2(0))^2}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Une cinquième composante doit être rajoutée à l'état, c'est la pulsation propre acoustique de la cible  $y_5(t) = y_5(0) = F_0$ .

## 2.2 Vecteur d'observation

Le vecteur d'observation est constitué de l'azimut et de la fréquence perçue sous effet Doppler. Il s'exprime donc dans la base polaire modifiée par :

$$Y(t) = \begin{cases} y_A(t) = x_3(t) + v_A(t) \\ y_f(t) = x_5(t) \left(1 - \frac{x_2(t)}{cx_4(t)}\right) + v_f(t) \end{cases} \quad (3)$$

où  $c$  est la célérité du son dans l'eau supposée constante,  $v_A$  et  $v_f$  sont deux bruits gaussiens indépendants, de moyenne nulle et de variances respectives  $R_A$  et  $R_f$ .

## 3 Estimation particulière à maximum de vraisemblance.

### 3.1 Principe de la technique

Considérons le problème d'estimation paramétrique à maximum de vraisemblance non linéaire où la dynamique du système est décrite par :

$$\begin{cases} x_t = \Phi(x_0, t) \\ y_t = h(x_t) + v_t \end{cases} \quad (4)$$

où  $x$  est le vecteur d'état,  $y$  l'observation et  $v$  le bruit d'observation additif Gaussien de variance  $R$ . L'estimateur maximise la vraisemblance de  $x_0$  conditionnellement aux observations  $Y_0^T = \{y_k\}_{k=0, \dots, T}$

$$\hat{x}_0 = \max_{x_0} \log p_{x|Y}(x_0|Y_0^T) = \max_{x_0} V_T(x_0) \quad (5)$$

où

$$V_T(x_0) = \sum_{k=0}^T (y_k - h(x_k))^T R^{-1} (y_k - h(x_k)) \quad (6)$$

L'approche particulière (originellement esquissée dans [8]) consiste à approcher la mesure de probabilité conditionnelle  $p_{x|Y}(x_0|Y_0^T)$  par une somme finie et pondérée de mesures de Dirac (voir [10] et ses références) :

$$P_{x|Y}(x_0|Y_0^T) \approx \sum_{i=1}^N \rho_i \delta_{x_0^i} \quad (7)$$

où  $\delta_{x_0^i}$  est la mesure de Dirac de support  $x_0^i$  et  $\rho_i$  le poids de la particule  $x_0^i$

$$\rho_i = \exp V_T^i / \sum_{k=1}^N \exp V_T^k \quad (8)$$

où  $V_t^k$  est la vraisemblance de la particule  $k$  conditionnelle aux mesures sur l'intervalle temporel  $[0, T]$  définie en (6).

L'application simple de cette approche bayésienne entraîne que le poids des particules dégénère avec le temps. Le poids des particules éloignées de la condition initiale à estimer devient très faible. Ces particules contribuent faiblement à la construction de l'estimateur : la loi des grands nombres est sous-utilisée. Pour un horizon de temps important tous le poids du support particulaire se concentre sur une seule particule. La densité de probabilité conditionnelle n'est alors plus représentée que par une seule particule. Pour pallier cette difficulté, la méthode employée en filtrage particulaire consiste à redistribuer les particules évanescences selon la densité de probabilité conditionnelle acquise dans tout le domaine. Chacune des positions  $x_0^i$  du support reçoit un nombre de particules proportionnel à son poids  $\rho_i$ . Cette procédure de régularisation a pour effet de regrouper les particules dans les zones les plus probables de la densité de probabilité conditionnelle.

### 3.2 Redistribution diffuse adaptative

Dans la convergence asymptotique de l'estimation paramétrique, il n'existe pas de perturbations dynamiques. Au cours des redistributions successives, la particule la plus vraisemblable attire toutes les autres particules. L'ensemble du support finit par se concentrer sur la position la plus proche et l'estimation qui en découle hérite du biais initial. La figure 2 illustre ce problème pour un mobile en mouvement de rotation uniforme observé en cartésien.

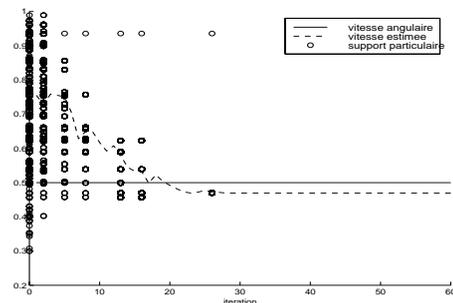


FIG. 2: Estimation paramétrique - redistribution classique

Il faudrait donc une distribution du support  $\{x_0^i\}_{i=1, \dots, N}$  infiniment dense pour déterminer le maximum de la den-

sité de probabilité conditionnelle  $p_{x|Y}(x_0|Y_0^T)$  avec exactitude. Le nombre de particules étant nécessairement limité, ce ne peut pas être le cas. La méthode de redistribution diffuse adaptative consiste à redistribuer les particules non pas sur une seule et même position mais dans un voisinage autour d'une position donnée. La métrique de ce voisinage est obtenue naturellement à partir de la matrice d'information de Fisher  $\mathcal{F}(x_0^i)$ . L'inverse de  $\mathcal{F}(x_0^i)$  se propage selon les mêmes équations que la matrice de covariance d'un lisseur de Kalman local autour de la trajectoire nominale [11] de chaque particule (la linéarité est conséquence de la localisation dans un voisinage). Soit une particule  $x_i$  dont la dynamique est décrite par le système (4). Les équations de prédiction et de filtrage donnent :

$$P_{t|t-1}^i = F_{t-1}^i P_{t-1|t-1}^i F_{t-1}^{iT} \quad (9)$$

$$K_t^i = P_{t|t-1}^i H_t^{iT} [H_t^i P_{t|t-1}^i H_t^{iT} + R]^{-1} \quad (10)$$

$$P_{t|t}^i = (I - K_t^i H_t^i) P_{t|t-1}^i \quad (11)$$

où

$$F_t^i = \left. \frac{\partial \Phi(x_t)}{\partial x(t)} \right|_{x_i^i} \quad \text{et} \quad H_t^i = \left. \frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_i^i} \quad (12)$$

La covariance de la tâche de redistribution sur la position initiale  $P_{0|t}^i = \mathcal{F}^{-1}(x_0^i)$  est obtenue par l'équation de lissage :

$$P_{t-1}^i = F_t^{i-1} P_t^i F_t^{iT} \quad (13)$$

initialisée par  $P_t^i = P_{t|t}^i$ .

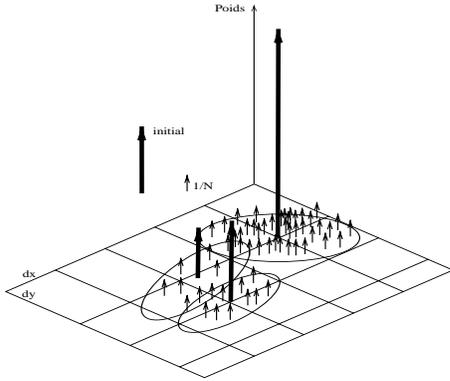


FIG. 3: Principe de redistribution

Le principe de redistribution est illustré par la figure 3. Autour de chacune des positions est redistribué un nombre de particules filles unitaires proportionnel au poids acquis par la particule mère. L'algorithme d'estimation particulaire se résume donc à :

#### 1. Initialisation

- Tirage du support  $\{x_0^i\}_{i=1,\dots,N}$  selon la loi a priori  $p(x_0)$ .
- Initialisation de la fenêtre temporelle  $k = 0$

#### 2. Calcul de la vraisemblance

$$V_k^i = V_{k-1}^i - (y_k - h(x_k^i))^T R^{-1} (y_k - h(x_k^i))$$

#### 3. Calcul des poids

$$\rho_i = \exp V_k^i / \sum_{j=1}^N \exp V_k^j$$

#### 4. Calcul de l'estimée $\hat{x}_0 = \sum_{i=1}^N \rho_i \delta_{x_0^i}$

#### 5. Évolution du support

$$- x_{k+1}^i = f(x_k^i)$$

$$- k = k + 1$$

#### 6. Test de redistribution si le nombre de particules de poids inférieur à $\frac{1}{10N}$ est supérieur à $\frac{N}{10}$ aller en 7, sinon retour en 2.

#### 7. Redistribution

- Calcul du nombre  $n_i$  de particules à redistribuer autour de chaque position  $x_0^i$  soit la partie entière de  $N \rho_i$ .
- Calcul pour chacune des positions retenues (de poids supérieur à  $\frac{1}{2N}$ ) de  $P_{0|k}^i$ .
- Redistribution de  $n_i$  particules autour de la position  $x_0^i$  par tirage selon  $\mathcal{N}(x_0^i, P_{0|k}^i)$
- Réinitialisation de la fenêtre  $k = 0$
- Réinitialisation des vraisemblances  $V_k^i = 0$

#### 8. Retour en 2.

### 3.3 Lisseur de Kalman conditionnel

Lorsque une des composantes de l'état est observée linéairement conditionnellement aux autres composantes de l'état (c'est le cas de la fréquence propre du mobile  $F_0$ ), il est possible d'utiliser un estimateur exact sur cette composante conditionnellement aux autres. Le système étudié est donc de la forme :

$$\begin{cases} x_t = \Phi(x_0, t) \\ \sigma_t = G \sigma_{t-1} + \omega_t \\ y_t = h(x_t) \sigma_t + v_t \end{cases} \quad (14)$$

où  $\Phi$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires,  $G$  une fonction linéaire,  $\omega_t$  et  $v_t$  deux bruits gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variance respectives  $Q_t$  et  $R_t$ . Il suffit donc de remarquer que conditionnellement à  $x$ , la partie dynamique/observation de  $\sigma$  est linéaire,  $\sigma$  est donc estimable de manière optimale par un lisseur de Kalman. Les équations du lisseur sont classiques. L'expression de la vraisemblance devient :

$$V_T^i(x_0) = \sum_{t=0}^T (y_t - h(x_t^i))^T (h(x_t^i) P_{t|t-1}^i h(x_t^i)^T R)^{-1} (y_t - h(x_t^i)) \quad (15)$$

où  $P_{t|t-1}^i$  est la covariance de l'erreur de prédiction.

L'estimée  $\hat{\sigma}$  est donnée par :

$$\hat{\sigma}_{0|t} = \sum_{i=1}^N \rho_i \hat{\sigma}_{0|t}^i \quad (16)$$

Cette méthode permet d'économiser un nombre significatif de particules. La fréquence propre du mobile est estimée par cette méthode.

## 4 Application simulée

Les seules informations initiales sont les mesures de l'azimut et de la fréquence. Aucune autre information n'est disponible sur le cap, la vitesse et la distance. L'azimut et la fréquence sont donc distribués uniformément autour de leurs mesures initiales. La vitesse maximale est fixée à 30 noeuds, cette valeur respecte la réalité physique des divers navires existants. La distance est supposée comprise entre 0.5 et 128km.

A des fins comparatives, nous avons testé l'algorithme sur la trajectoire définie dans l'article [5]. La position initiale est  $(x(0) = 20km, y(0) = -1.8km)$ , la vitesse initiale est  $(V_x(0) = 0, V_y(0) = 9m/s)$ , les écarts types de mesures pour l'azimut et la fréquence sont respectivement de 1.0 degré et de 0.5 Hertz et la fréquence propre émise est de 300 Hertz. L'ellipsoïde de confiance (99%) déduite de la borne de Cramer Rao ainsi que le résultat de l'estimation particulière pour 50 trajectoires de bruits différentes sont représentés sur la figure 4. pour trois instants différents (5, 10 et 15mn). L'erreur d'estimation moyenne ( $\sigma_R/R$ ) passe au dessous du seuil de 10% au bout de 9mn pour atteindre 5% en fin de simulation. La figure 4 représente une trajectoire typique d'estimation.

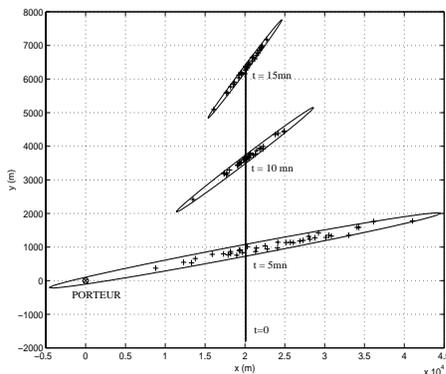


FIG. 4: Estimation de la trajectoire de la cible.

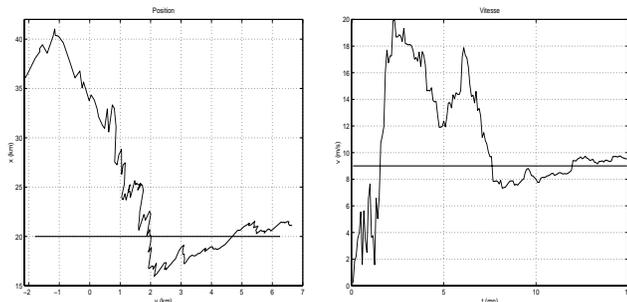


FIG. 5: Trajectoire d'un estimateur.

## 5 Conclusion

La nouvelle technique de redistribution diffuse adaptative a permis d'obtenir d'excellent résultats sur le problème de trajectographie SONAR où la cible est supposée en

mouvement rectiligne uniforme. Il est clair que ces résultats sont adaptables au problème filtrage avec bruits de dynamique. Ainsi, il est possible d'appliquer cette technique particulière pour estimer la trajectoire d'un navire cible effectuant des manoeuvres.

## Références

- [1] AIDALA and HAMMEL. « Utilisation of modified polar coordinates for bearing only-tracking ». *IEE Transactions on automatic controls*, 28(3):283-293, 1983.
- [2] JAUFRET and BAR-SHALOM. « Track formation with bearing and frequency measurements in clutter ». *IEEE Transactions on aerospace and electronics systems*, 26(6):999-1010, Novembre 1990.
- [3] KRONHAM. « Bearing-only target motion analysis based on a multihypothesis Kalman filter and adaptive ownship motion control ». *IEE Proceedings on Radar Sonar and Navigation*, 145(4):247-252, 08 1998.
- [4] NARDONE, LINDGREN, and GONG. « Fundamental properties and performance of conventional bearing-only target Target Motion Analysis ». *IEEE Transactions on Automatic control*, pages 775,787, Sept 1984.
- [5] PASSERIEUX, PILLON, BLANC-BENON, and JAUFRET. « Target motion analysis with bearings and frequencies measurements ». In *Proceedings of the 22nd Asilomar Conference*, Pacific Grove, CA, Nov 1988.
- [6] PEACH. « Bearing-only tracking using a set of range-parametrised extended Kalman filters ». *IEE Proceedings on Control theory Applications*, 142(1):73-80, 01 1995.
- [7] RIGAL. « Filtrage non-linéaire, résolution particulière et applications au traitement du signal ». PhD thesis, Thèse de l'Université Paul Sabatier - LAAS/CNRS, 1993.
- [8] G. SALUT. « Le thème non-linéaire en automatique et traitement du signal ». Journées nationales du GdR traitement du signal et images du CNRS, septembre 1989.
- [9] G. SALUT. « Procédé et système pour l'estimation optimale non-linéaire des processus dynamiques en temps réel ». Brevet n INPI 94/07274, Europe extension n 95 95256.5-2206 USA n 8/750.313, juin 1994.
- [10] G. SALUT. « Développement et applications du filtrage particulière ». Ecole des techniques avancées en Signal-Image-Parole de Grenoble Signal et non linéaire, août-septembre 1998.
- [11] James H. TAYLOR. « The Cramér-Rao estimation error lower bound computation for deterministic nonlinear systems ». *IEEE Transactions on automatic control*, AC-24(2):343,345, avril 1979.
- [12] De VLIEGER and Gmelig MEYLIIG. « Maximum likelihood estimation for long-range target tracking using passive sonar measurements ». *IEEE Transactions on signal processing*, 40(5):1216-1225, Mai 1992.