

Estimation de signaux chirp à amplitude variant dans le temps

François VINCENT, Olivier BESSON

ENSICA, Département Avionique et Systèmes
1 Place Émile Blouin, 31056 Toulouse
vincent,besson@ensica.fr

Résumé – Nous traitons dans cet article de l’estimation de signaux chirp dont l’amplitude, déterministe, varie dans le temps. Nous proposons une alternative à l’estimateur du Maximum de Vraisemblance qui est plus simple d’un point de vue calculatoire. Pour ceci, nous utilisons le Principe d’Invariance Étendu qui permet de scinder le problème de minimisation et de découpler l’estimation des paramètres de phase de celle des paramètres d’amplitude. Dans un premier temps, en utilisant un modèle moins détaillé pour le signal, on estime de manière simple les paramètres de phase. Les paramètres d’amplitude sont ensuite estimés par une technique des moindres carrés. La procédure permet d’obtenir des estimateurs asymptotiquement efficaces. Des simulations numériques viennent valider l’étude théorique.

Abstract – We consider the problem of estimating the parameters of chirp signals with deterministic time-varying amplitude. A method which is computationally simpler than the Maximum Likelihood estimator is proposed. It invokes the extended invariance principle to split the minimization problem and to decouple estimation of the phase parameters from that of the amplitude parameters. In a first step, using a less detailed model for the signal, a simple scheme for estimating the phase parameters is presented. Then, amplitude parameters are obtained from least-squares minimization techniques. The overall procedure provides asymptotically efficient estimates. Numerical simulations attest to the validity of the theoretical analysis.

1 Position du problème

Dans cet article, nous considérons l’estimation des paramètres du modèle suivant

$$x(t) = \alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha) e^{i\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)} + n(t) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

dans lequel $\alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha)$ est l’amplitude *réelle déterministe* du signal, dépendant d’un vecteur paramètre $\boldsymbol{\eta}_\alpha$. $\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)$ désigne la phase du signal et $n(t)$ est un bruit additif. Ce type de signal se rencontre dans le domaine du radar. Nous considérons, par exemple, le cas où l’on souhaite compter le nombre de débris spatiaux en orbite basse traversant le lobe d’antenne d’un radar pointé dans une direction fixe (“Beam Park” mode) [8]. Lorsque l’objet traverse le lobe d’antenne, et après compression d’impulsion, le signal reçu pourra être modélisé sous la forme de l’expression (1). Le terme de phase $\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)$, que l’on approxime généralement par une fonction polynomiale du temps, porte des informations sur la vitesse et l’accélération de l’objet [5]. Le terme $\alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha)$, de modulation de lobe d’antenne, contient les informations sur la position et la vitesse angulaire de l’objet en site et en gisement. D’autres applications et travaux concernant le modèle (1) peuvent être trouvés, par exemple, dans les articles [2] et [9] et les références incluses. Sous l’hypothèse d’un bruit additif blanc circulaire Gaussien, l’estimateur du Maximum de Vraisemblance (ML) du vecteur paramètre $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_\alpha^T \boldsymbol{\eta}_\phi^T]^T$ est donné par [4]

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{t=0}^{N-1} \left| x(t) - \alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha) e^{i\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)} \right|^2 \quad (2)$$

On doit donc avoir recours à la minimisation d’une fonctionnelle à $q_\alpha + q_\phi$ variables où q_α (q_ϕ) désigne la dimen-

sion de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ ($\boldsymbol{\eta}_\phi$). Ceci peut être particulièrement complexe d’un point de vue calculatoire et difficile à implanter d’un point de vue numérique. *L’objet de cet article est de proposer une alternative à l’estimateur du Maximum de Vraisemblance, qui soit moins complexe calculatoirement mais qui offre des performances statistiques équivalentes, du moins asymptotiquement.* Pour ceci, on s’inspire du Principe d’Invariance Étendu (PIE) [6] qui permet, à l’aide d’une procédure en deux étapes, d’obtenir des estimées aussi précises asymptotiquement avec, à chaque étape, un problème de minimisation moins compliqué. Dans un premier temps, on utilise un modèle moins détaillé pour le signal qui permet de simplifier considérablement le problème de minimisation. Dans un deuxième temps, des techniques des moindres carrés sont utilisées. Cette procédure permet d’autre part de découpler l’estimation des paramètres d’amplitude de l’estimation des paramètres de phase. Enfin, comme nous le montrerons, les estimées des paramètres de phase ne dépendent pas des hypothèses émises sur l’amplitude, ce qui améliore notablement la robustesse d’estimation.

2 Estimation des paramètres

Nous proposons dans cette section un estimateur de $\boldsymbol{\eta}$ fondé sur le PIE. Dans un premier temps, on décrit le principe d’invariance étendu avant de l’appliquer au cas considéré. Seuls les résultats principaux sont donnés, les développements théoriques pouvant être trouvés dans [7]. On considère ici le cas d’un signal chirp pour lequel

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

et donc $\boldsymbol{\eta}_\phi = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$. De plus, on suppose que $n(t)$ est un bruit blanc complexe, de moyenne nulle, circulaire et Gaussien, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{n(t)\} &= 0, \\ \mathcal{E}\{n(t)n(s)\} &= 0 \\ \mathcal{E}\{n^*(t)n(s)\} &= \sigma^2\delta(t,s)\end{aligned}$$

2.1 Principe d'Invariance Étendu (PIE)

Le PIE permet de simplifier de nombreux problèmes d'estimation où le vecteur paramètre est obtenu par minimisation d'une fonctionnelle. Il consiste à trouver une autre paramétrisation du problème qui puisse simplifier le problème de minimisation. Pour être plus précis, considérons un modèle paramétré par un vecteur $\boldsymbol{\eta}$ et supposons qu'on puisse obtenir une estimée de $\boldsymbol{\eta}$ comme suit

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in D_\eta} V(\boldsymbol{\eta}) \quad (3)$$

où D_η désigne le domaine de recherche. Supposons maintenant que l'on puisse re-paramétriser le modèle en fonction d'un autre vecteur $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ tel que $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = f(\boldsymbol{\eta}) \in D_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \ \forall \boldsymbol{\eta} \in D_\eta$. Soit $\tilde{V}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = V(\boldsymbol{\eta})$ le critère exprimé en fonction de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$. Considérons alors l'estimateur suivant de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in D^u} \tilde{V}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (4)$$

Dans l'équation précédente, D^u est un domaine nettement plus vaste que $D_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ (i.e. $D_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \subset D^u$) choisi de manière à rendre le problème (4) plus simple. Si $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ et $f(\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}})$ convergent (soit en nombre de points, soit en rapport signal à bruit) vers le même vecteur paramètre, alors

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^e = \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in D_\eta} \left(\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} - f(\boldsymbol{\eta}) \right)^T \mathbf{W} \left(\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} - f(\boldsymbol{\eta}) \right) \quad (5)$$

est asymptotiquement équivalent à $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, avec

$$\mathbf{W} = \mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{V}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}} \partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T} \right\} \Bigg|_{\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}} \quad (6)$$

L'idée du PIE est donc de trouver $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ tel que (4) soit beaucoup plus facile à obtenir que (3). Observons que l'estimation par PIE nécessite 2 étapes. Le problème que nous considérons ici entre dans le cadre de l'utilisation du PIE, comme nous le décrivons maintenant plus en détail. Dans la suite, le terme asymptotique s'entend en rapport signal à bruit.

2.2 Un modèle moins détaillé

La première (et principale) étape consiste en fait à utiliser un modèle moins structuré que (1). Dans cette optique, nous choisissons de ne plus considérer la dépendance de $\alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha)$ vis-à-vis de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$, c'est-à-dire qu'on n'impose plus de structure sur l'amplitude. Ce faisant, on devient a priori insensible à une quelconque hypothèse sur l'amplitude, ce qui devrait améliorer la robustesse d'estimation. Le nouveau modèle non-structuré devient donc

$$x(t) = \alpha(t)e^{i\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)} + n(t) \quad (7)$$

Le nouveau vecteur paramètre qui décrit le modèle non-structuré est ainsi $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\eta}_\phi^T]^T$ où

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha(0) \ \dots \ \alpha(N-1)]^T$$

On propose alors d'estimer $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ comme

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_\phi} \sum_{t=0}^{N-1} \left| x(t) - \alpha(t)e^{i\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)} \right|^2 \quad (8)$$

Notons que $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ est l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle (7). Nous décrivons maintenant comment sont obtenues ces estimées et quelles sont leurs performances.

Proposition 1. *Le vecteur $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T, \hat{\boldsymbol{\eta}}_\phi^T]^T$ est donné par*

$$\hat{a}_1, \hat{a}_2 = \arg \max_{a_1, a_2} \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-i2(a_1 t + a_2 t^2)} \right| \quad (9)$$

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{2} \text{angle} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-i2(\hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)} \right\} \quad (10)$$

$$\hat{\alpha}(t) = \text{Re} \left\{ x(t) e^{-i(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)} \right\} \quad (11)$$

où $\text{Re}\{b\}$ désigne la partie réelle de b .

Démonstration Voir [7] □

Nous analysons maintenant les performances de l'estimateur précédent.

Proposition 2. *La matrice de covariance asymptotique de $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ est l'inverse de la matrice d'Information de Fisher (FIM) pour le modèle non structuré, dont l'expression est donnée par*

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \begin{bmatrix} 2\sigma^{-2} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (12)$$

où \mathbf{F}_ϕ est la FIM correspondant à l'estimation de $\boldsymbol{\eta}_\phi$ dont les éléments sont

$$\mathbf{F}_\phi(k+1, \ell+1) = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^2(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha) t^{k+\ell} \quad k, \ell = 0, 1, 2 \quad (13)$$

Démonstration Voir [7] □

Remarque 1. *Notons que les estimées des paramètres de phase ainsi obtenues ont la même variance asymptotique que celles obtenues avec le modèle structuré puisque la matrice $\tilde{\mathbf{F}}$ est diagonale par blocs et que \mathbf{F}_ϕ est la FIM pour le modèle structuré (cf. [3] pour ce dernier cas). Ceci signifie que, pour autant que seule importe l'estimation des paramètres de phase, l'utilisation d'un modèle structuré pour l'enveloppe n'apporte pas une meilleure précision. De plus, contrairement à l'estimateur ML structuré, obtenir $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ ne nécessite aucune hypothèse sur la forme de $\alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha)$, ce qui améliore la robustesse d'estimation. Enfin, on n'a ici qu'un problème de minimisation 2-D.*

2.3 La seconde étape du PIE

Une fois que les estimées du modèle non structuré ont été calculées, on invoque le PIE pour obtenir des estimateurs équivalents au Maximum de Vraisemblance. Néanmoins, pour que le PIE puisse s'appliquer, il faut au préalable démontrer que $f(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ et $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ convergent vers la même valeur. Or, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ étant l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle non structuré, la théorie générale de l'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance [4] et la proposition 2 indiquent que $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ est asymptotiquement Gaussien, c'est-à-dire

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \quad (14)$$

De même, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ étant l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle structuré, on a

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{F}^{-1}) \quad (15)$$

avec

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2\sigma^2 \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^T}{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (16)$$

De plus, la fonctionnelle

$$f : \mathbb{R}^{q_\alpha + q_\phi} \mapsto \mathbb{R}^{N + q_\phi}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha \\ \boldsymbol{\eta}_\phi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\eta}_\phi \end{bmatrix}$$

est continue et dérivable. Par conséquent, en utilisant les résultats de [1, chapitre 6], on peut démontrer que

$$f(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}^T) \quad (17)$$

où \mathbf{D} est la matrice des dérivées partielles, évaluée en $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$, i.e.

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \quad (18)$$

ce qui démontre que $f(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ et $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ convergent vers la même valeur, rendant ainsi applicable le PIE. Nous montrons maintenant comment s'obtiennent les estimées à partir du PIE. D'après le principe d'invariance étendu, un estimateur asymptotiquement équivalent à l'estimateur ML peut être obtenu en utilisant (5) et (6). Or ici, on considère des estimateurs du Maximum de Vraisemblance. D'où, puisque le critère à minimiser est, à une constante multiplicative près, la fonction log-vraisemblance (cf. équation (8)), la matrice \mathbf{W} de (6) est dans notre cas la matrice d'information de Fisher pour le modèle non structuré, évaluée en $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, c'est-à-dire $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}})$. Ainsi, par le PIE, l'estimateur équivalent à l'estimateur ML est donné par

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^e = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \left(\hat{\boldsymbol{\eta}} - f(\boldsymbol{\eta}) \right)^T \tilde{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \left(\hat{\boldsymbol{\eta}} - f(\boldsymbol{\eta}) \right) \quad (19)$$

De par la structure diagonale par blocs de $\tilde{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\eta}})$, le critère dans (19) se réécrit comme

$$J(\boldsymbol{\eta}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\phi) = 2\sigma^{-2} \|\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\eta}_\alpha)\|^2 + \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_\phi - \boldsymbol{\eta}_\phi \right)^T \mathbf{F}_\phi(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_\phi - \boldsymbol{\eta}_\phi \right) \quad (20)$$

Le critère est donc la somme de deux termes positifs, l'un dépendant de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$, l'autre de $\boldsymbol{\eta}_\phi$. Ce dernier peut être réduit à zéro en posant

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_\phi^e = \hat{\boldsymbol{\eta}}_\phi \quad (21)$$

Il reste alors à minimiser le premier terme, ce qui revient à estimer $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ comme

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^e = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}_\alpha} \|\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\eta}_\alpha)\|^2$$

$$= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}_\alpha} \sum_{t=0}^{N-1} |\hat{\alpha}(t) - \alpha(t; \boldsymbol{\eta}_\alpha)|^2 \quad (22)$$

Notons que l'on a ainsi découpé l'estimation de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ de celle de $\boldsymbol{\eta}_\phi$ (à cause de la paramétrisation choisie qui induit une matrice $\tilde{\mathbf{F}}$ diagonale par blocs). Il convient également d'observer que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^e = \hat{\boldsymbol{\eta}}_\alpha$, c'est-à-dire que le vecteur $\hat{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^e$ est obtenu dès la première étape du PIE.

3 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons des simulations numériques afin de valider les résultats théoriques présentés ci-avant. Nous considérons les deux cas suivants pour l'amplitude :

- $\alpha(t)$ est une exponentielle décroissante, i.e. $\alpha(t) = A \exp\{-\beta t\}$ et $\boldsymbol{\eta}_\alpha = [A \ \beta]^T$
- $\alpha(t)$ est une fonction "sinus cardinal" i.e. $\alpha(t) = A \text{sinc}(\pi \nu t)$ et $\boldsymbol{\eta}_\alpha = [A \ \nu]^T$

On prend pour valeurs numériques $A = 1$, $\beta = 0.02$ et $\nu = 0.05$. Dans toutes les simulations, le vecteur des paramètres chirp est $\boldsymbol{\eta}_\phi = 2\pi [0.1 \ 0.18 \ 0.001]^T$. Le rapport signal à bruit (RSB) est défini comme $RSB = 10 \log_{10} \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^2(t)$. Pour chaque figure, 500 simulations de Monte-Carlo ont servi à estimer les variances empiriques des estimées. Les figures 1-2 et 3-4 illustrent l'influence de N et du RSB. On constate que les variances empiriques sont très proches des Bornes de Cramér-Rao, comme prévu par la théorie, et ce pour les 3 paramètres principaux du modèle. Ceci vient valider l'analyse théorique présentée dans la section précédente.

4 Conclusions

Dans cet article nous nous sommes focalisés sur l'estimation de signaux chirp dont l'amplitude, déterministe, varie dans le temps. Ce problème a été abordé dans l'optique d'offrir un estimateur de performances comparables à l'estimateur du Maximum de Vraisemblance, mais de coût calculatoire moindre. Pour ceci, le principe d'invariance étendu est utilisé car il permet, grâce à une paramétrisation moins détaillée, de scinder en deux étapes le problème de minimisation par rapport aux paramètres d'amplitude et de phase. Plus précisément, en n'imposant aucune structure sur l'enveloppe, on estime de façon relativement simple les paramètres de phase. De plus, les estimées de ces derniers sont, à fort RSB, aussi précises que dans le cas du modèle structuré de départ. Ensuite,

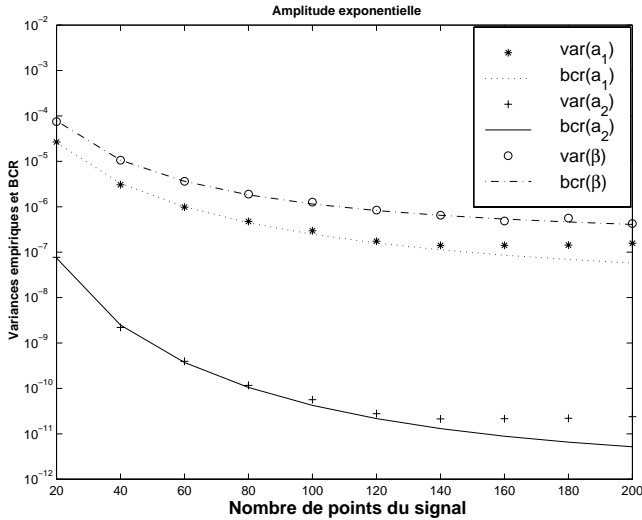


FIG. 1: Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du nombre de points. $RSB = 10\text{dB}$.

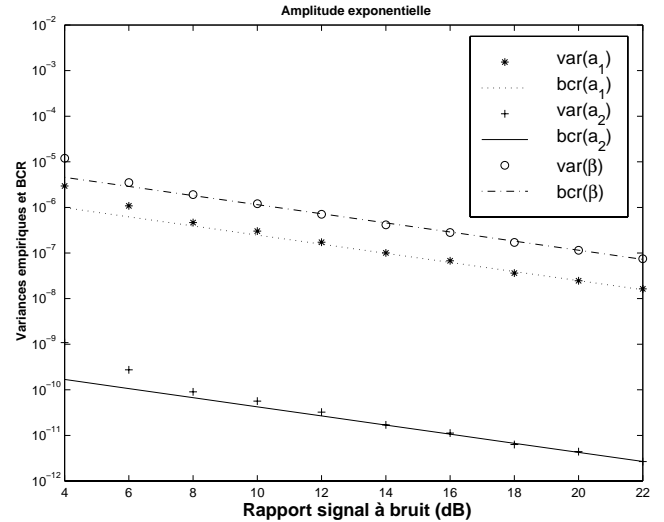


FIG. 3: Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du RSB. $N = 100$.

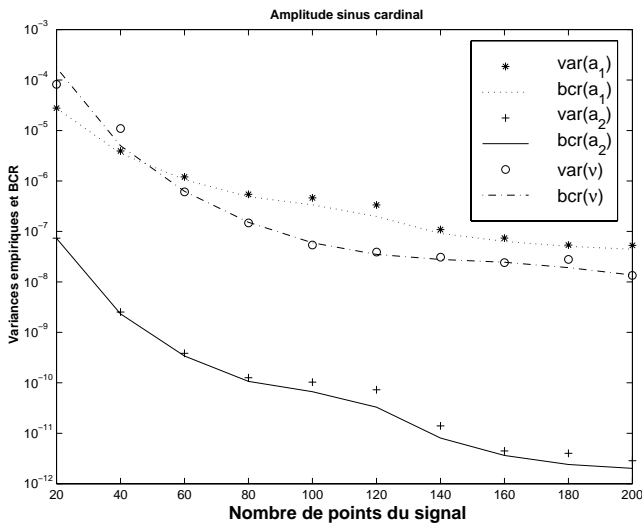


FIG. 2: Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du nombre de points. $RSB = 10\text{dB}$.

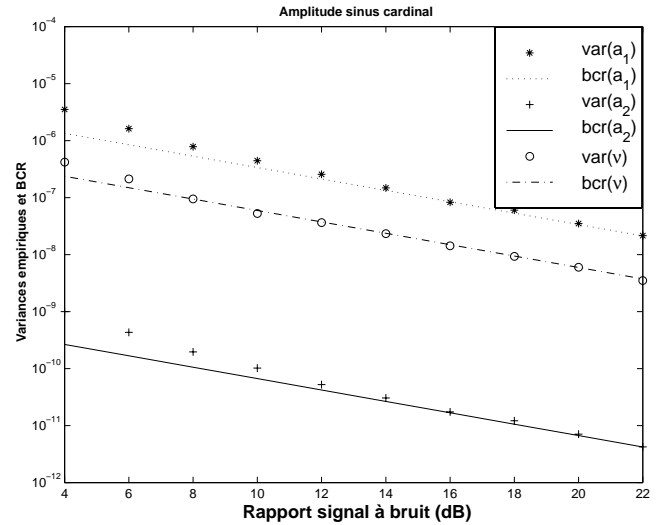


FIG. 4: Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du RSB. $N = 100$.

l'estimation des paramètres d'amplitude se réduit à un problème des moindres carrés.

Références

- [1] P. J. Brockwell et R. A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, 2ème ed., Springer Series in Statistics, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [2] B. Friedlander et J.M. Francos, *Estimation of amplitude and phase parameters of multicomponent signals*, IEEE Transactions Signal Processing **43** (1995), no. 4, 917–926.
- [3] M. Ghogho, A.K. Nandi, et A. Swami, *Cramér-Rao Bounds and parameter estimation for random amplitude phase modulated signals*, Proceedings ICASSP99 (Phoenix), Mars 1999, pp. 1577–1580.
- [4] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, Prentice Hall, Englewood

Cliffs, NJ, 1993.

- [5] F. Le Chevalier, *Principes de Traitement des Signaux Radar et Sonar*, Masson, Paris, 1989.
- [6] P. Stoica et T. Söderström, *On reparametrization of loss functions used in estimation and the invariance principle*, Signal Processing **17** (1989), 383–387.
- [7] F. Vincent et O. Besson, *Estimation de signaux chirp à amplitude variant dans le temps*, Traitement du Signal (1999), accepté pour publication.
- [8] F. Vincent, E. Chaumette, C. Nouals, et D. Muller, *Etude d'un système radar de détection des débris spatiaux*, Proceedings 5th International Conference on Radar Systems (Brest), Mai 1999.
- [9] G. Zhou, G.B. Giannakis, et A. Swami, *On polynomial phase signals with time-varying amplitudes*, IEEE Transactions Signal Processing **44** (1996), no. 4, 848–861.