

Analyse spectrale non paramétrique à haute résolution

Philippe CIUCIU, Jérôme IDIER, Jean-François GIOVANNELLI

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, Plateau de Moulon
91192 Gif-sur-Yvette cedex, France.

ciuciu@lss.supelec.fr, idier@lss.supelec.fr, giovannelli@lss.supelec.fr

Résumé – Le problème de l'estimation spectrale à faible nombre d'échantillons est abordé sous l'angle de la synthèse de Fourier. Sous cette formulation, nous avons proposé dans [1, 2] des estimateurs spectraux non linéaires capables de restaurer fidèlement soit des raies spectrales, comme Sacchi *et al.* [3], soit des spectres plus réguliers. Le calcul de ces estimateurs repose sur la minimisation d'une énergie convexe. Nous discutons tout d'abord de ces méthodes en vue de présenter des algorithmes de relaxation par blocs, pour simplifier la phase d'optimisation des énergies. Deuxièmement, une classe d'estimateurs spectraux originaux est présentée pour estimer des spectres « mélangés », c'est-à-dire présentant à la fois des composantes résolues et d'autres plus douces.

Abstract – Spectral analysis can be identified as a linear underdetermined inverse problem, particularly when a short data set is available. In [1, 2], we have proposed non linear estimators, either suited to line spectra restoration (akin to Sacchi *et al.* [3]), or to restoration of smooth spectra. These estimates are computed by minimizing convex criteria. After a brief overview of such estimation methods, we focus on the optimization step and derive block coordinate descent algorithms to alleviate the computational burden. Afterwards, we address the more difficult problem of "mixed" spectra restoration, composed of narrow and broad band spectral components.

1 Introduction

Dans cette communication comme dans [1–3], nous identifions l'estimation spectrale à la synthèse de Fourier [4]. Dans cette formulation, l'analyse spectrale en temps court, c'est-à-dire l'estimation de P composantes spectrales à partir de N échantillons observés ($P \gg N$), entre dans la famille des problèmes inverses linéaires *mal posés*. La régularisation par pénalisation [5] est un cadre bien adapté pour résoudre ce type de problèmes.

Dans la suite, nous abordons successivement trois problèmes d'estimation spectrale à faible nombre d'échantillons, selon un ordre de difficulté croissante.

- Le premier concerne l'estimation de spectres piqués. Des contributions récentes [1–3] ont permis d'exhiber des modèles de régularisation *séparables* adaptés à la restauration de tels spectres. Nous proposons de minimiser les critères convexes résultant par un algorithme de relaxation par blocs, issu de la régularisation semi-quadratique (SQ) de Geman & Yang [6, 7].
- Dans une deuxième partie, nous présentons des modèles de régularisation markoviens conduisant à une estimation fidèle de spectres plus réguliers. Abordée préalablement dans [1, 2], nous proposons ici une famille de critères markoviens permettant d'utiliser une variante de l'algorithme précédent.
- En dernier lieu, nous abordons un problème plus difficile: celui de la restauration de spectres « mélangés », présentant simultanément des composantes impulsionnelles et d'autres plus régulières. Pour ce

faire, un nouveau modèle d'observation, baptisé « bi-modèle », est introduit. Un schéma adéquat de régularisation, s'inspirant des différentes fonctions de pénalisation vues précédemment, permet à la fois de retrouver des composantes spectrales résolues et d'autres plus étalées.

Des simulations effectuées sur un jeu de données proche de celui de Kay & Marple [8] permettent de valider les trois modèles, et surtout de mettre en lumière les performances de cette nouvelle classe d'estimateurs.

2 Formulation du problème

Soit $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^t \in \mathbb{C}^N$ un vecteur temporel dont on désire estimer P composantes spectrales. Notons $\nu_p = p/P$ les fréquences discrètes équiréparties où $p \in \{0, 1, \dots, P-1\} = \mathbb{N}_P$, et X_p les amplitudes spectrales associées, on a alors à l'instant n :

$$x_n = \sum_{p=0}^{P-1} X_p e^{2j\pi\nu_p n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_N.$$

En pratique, \mathbf{x} n'est pas disponible; les données observées $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$ sont corrompues par des incertitudes expérimentales. Le bruit \mathbf{n} est supposé blanc, gaussien, centré, circulaire et stationnaire. Les observations \mathbf{y} sont donc reliées aux inconnues $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_{P-1}]^t \in \mathbb{C}^P$ par:

$$\mathbf{y} = W_{NP} \mathbf{X} + \mathbf{b}, \quad (1)$$

où W_{NP} est une matrice de Fourier ($N \times P$). À l'aide des seules données, il s'avère impossible de retenir une solution particulière sans imposer de contrainte supplémentaire, puisqu'il existe une infinité de solutions minimisant

$\mathcal{Q}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{y} - W_{NP} \mathbf{X}\|^2$. Pour lever cette indétermination, on combine la partie d'attache aux données $\mathcal{Q}(\mathbf{X})$, convexe au sens large, avec un terme de régularisation $\mathcal{R}(\mathbf{X})$, strictement convexe. Un hyperparamètre $\lambda \geq 0$ règle le compromis entre les deux parties. Le critère global $\mathcal{J}(\mathbf{X})$ est donc strictement convexe et son minimiseur définit l'estimateur des amplitudes spectrales :

$$\widehat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^P} \mathcal{J}(\mathbf{X}) = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^P} [\mathcal{Q}(\mathbf{X}) + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{X})].$$

Puisque \mathcal{J} admet un seul minimiseur, continu en fonction des données [9], le problème régularisé est donc *bien posé*. $\widehat{\mathbf{X}}$ s'interprète dans un cadre bayésien comme l'estimée du maximum *a posteriori* (MAP) pour une loi *a priori* proportionnelle à $\exp(-k\mathcal{R}(\mathbf{X}))$. Le carré du module de $\widehat{\mathbf{X}}$ fournit l'estimateur du spectre de puissance. Dans le cas d'une pénalisation quadratique, $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}$, l'estimée obtenue est proportionnelle au périodogramme [1, 3, 10].

3 Spectres impulsionsnels

3.1 Énergie non quadratique séparable

Puisque le périodogramme est un estimateur basse résolution, Sacchi *et al.* [3] ont proposé un potentiel de régularisation non convexe plus résolvant $R_0(x) = \ln(1 + x^2/\tau^2)$, correspondant à une loi *a priori* de Cauchy. De manière indépendante, nous avons retenu dans [1] des alternatives convexes mais résolvantes pour R_0 :

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{p=0}^{P-1} R_0(\rho_p), \quad (2)$$

où $\rho_p = |X_p|$, $\boldsymbol{\rho} = [\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{P-1}]^\dagger$. R_0 est un potentiel symétrique convexe sur \mathbb{R} , croissant sur \mathbb{R}_+ , garantissant la convexité de \mathcal{R} en \mathbf{X} [1] : les fonctions L_p , ρ^p ($1 \leq p < 2$), et la fonction hyperbolique $\sqrt{\beta^2 + \rho^2}$ conviennent pour R_0 .

\mathcal{J} étant alors convexe et continûment différentiable (C^1), il peut être minimisé par des algorithmes standards. Nous présentons ici une méthode de relaxation par blocs, détaillée par ailleurs dans [11].

3.2 Énergie SQ séparable

Pour la restauration d'une image \mathbf{X} à valeurs réelles, Geman & Yang [6] ont proposé un critère *augmenté* $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{B})$ associé à un critère pénalisé $\mathcal{J}(\mathbf{X})$, vérifiant

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \mathcal{Q}(\mathbf{X}) + \lambda \mathcal{R}^*(\mathbf{X}, \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\inf_{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^P} \mathcal{R}^*(\cdot, \mathbf{B}) = \mathcal{R}(\cdot), \quad (4)$$

D'après (3) et (4), \mathcal{J} et \mathcal{K} partagent le même minimiseur $\widehat{\mathbf{X}}$, si bien qu'on peut l'obtenir en minimisant soit \mathcal{J} soit \mathcal{K} . Les variables auxiliaires \mathbf{B} servent à transformer un critère \mathcal{J} non quadratique en \mathbf{X} , en une fonction \mathcal{K} , quadratique en \mathbf{X} à \mathbf{B} fixé

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \mathbf{X}^\dagger \Lambda \mathbf{X} / 2 - \mathbf{X}^\dagger \xi(\mathbf{B}) + \Psi(\mathbf{B}) \quad (5)$$

s'appliquant à des quantités réelles. Dans le cadre de la synthèse de Fourier, une extension complexe de cette démarche est nécessaire. Elle est possible sur la base de la dualité convexe *vectorielle*. Soit $\mathbf{x}_p = [\Re(X_p), \Im(X_p)]^\dagger \in \mathbb{R}^2$ le vecteur associé à $X_p \in \mathbb{C}$, et $\mathbf{b}_p = [\Re(B_p), \Im(B_p)]^\dagger \in \mathbb{R}^2$ celui associé à une variable auxiliaire complexe B_p . Notons $\phi_\alpha(\mathbf{x}_p) = \alpha R_0(\rho_p)$, avec $\alpha \in]0, \alpha_{\text{sup}}[$, et g_α la fonction C^1 , convexe en \mathbf{x}_p , telle que $g_\alpha(\mathbf{x}_p) = \|\mathbf{x}_p\|^2 / 2 - \phi_\alpha(\mathbf{x}_p)$. Comme ϕ_α est convexe, la convexité de g_α impose α_{sup} [12, Lemme 1]. Le résultat suivant donne alors la forme de \mathcal{R}^* .

Théorème 1 Soit $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_0^\dagger, \mathbf{b}_1^\dagger, \dots, \mathbf{b}_{P-1}^\dagger]^\dagger \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^2$ que l'on note aussi $\mathbf{B} = [\Re(\mathbf{B}), \Im(\mathbf{B})]$, et \mathcal{R} définie par (2), alors la relation (4) est vérifiée par :

$$\mathcal{R}^*(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{1}{2} |X_p - B_p|^2 + \psi_\alpha(\mathbf{b}_p) \right), \quad (6)$$

où $\psi_\alpha(\mathbf{b}_p) = g_\alpha^*(\mathbf{b}_p) - \|\mathbf{b}_p\|^2 / 2$, et g_α^* est la conjuguée convexe de g_α [13] : $g_\alpha^*(\mathbf{b}_p) = \sup_{\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^2} (\mathbf{b}_p^\dagger \mathbf{x}_p - g_\alpha(\mathbf{x}_p))$. On obtient alors \mathcal{K} sous la forme (5) pour le triplet suivant :

$$\begin{cases} \Lambda &= 2W_{NP}^\dagger W_{NP} + \lambda' I_P = F_P \Delta F_P^\dagger / P^2 \\ \xi(\mathbf{B}) &= 2W_{NP}^\dagger \mathbf{y} + \lambda' (\Re(\mathbf{B}) + j\Im(\mathbf{B})) \\ \Psi(\mathbf{B}) &= \lambda' \left[(\|\Re(\mathbf{B})\|^2 + \|\Im(\mathbf{B})\|^2) / 2 + \sum_{p=0}^{P-1} \psi_\alpha(\mathbf{b}_p) \right] \end{cases}$$

avec $\lambda' = \lambda/\alpha$, F_P la matrice carrée de Fourier ($F_P F_P^\dagger = P I_P$), et Δ la matrice diagonale des valeurs propres de Λ , indépendante de \mathbf{B} :

$$\Delta = P \begin{bmatrix} (2P + \lambda') I_N & O_{N, P-N} \\ O_{P-N, N} & \lambda' I_{P-N} \end{bmatrix}.$$

Preuve : voir [11].

L'expression (6) est bien quadratique en \mathbf{X} lorsque \mathbf{B} est fixé. Remarquons qu'une utilisation de la dualité scalaire, reliant une variable auxiliaire réelle à chaque module ρ_p , aurait conduit à une énergie \mathcal{R}^* quadratique en $\boldsymbol{\rho}$, *mais non quadratique en \mathbf{X}* .

Par ailleurs, ϕ_α et g_α respectent les conditions [12] induisant le caractère C^1 et la convexité de \mathcal{K} en (\mathbf{X}, \mathbf{B}) . Un algorithme de relaxation par blocs sur \mathcal{K} , tel que LEGEND [7], converge alors vers $\widehat{\mathbf{X}}$. Chaque itération de l'algorithme comporte deux remises à jour (RAJ) :

1°: RAJ séparable de $\mathbf{B}^{(k+1)}$, $\forall k \geq 0$

$$\forall p \in \mathbb{N}_P, \mathbf{b}_p^{(k+1)} = (\nabla g_\alpha^*)^{-1}(\mathbf{x}_p^{(k)}) = \nabla g_\alpha(\mathbf{x}_p^{(k)}) \quad (7)$$

$$= \mathbf{x}_p^{(k)} - \nabla \phi_\alpha(\mathbf{x}_p^{(k)})$$

2°: RAJ globale de $\mathbf{X}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = F_P \Delta^{-1} F_P^\dagger \xi(\mathbf{B}^{(k+1)}). \quad (8)$$

On remarque sur (7) qu'il n'est pas nécessaire de connaître ψ_α pour calculer $\mathbf{B}^{(k+1)}$, grâce à la relation entre les gradients des fonctions d'une paire de Legendre [13, §26]. De plus, le caractère Toeplitz circulant de $W_{NP}^\dagger W_{NP}$ [10] est transmis à Λ qui peut alors être inversée dans la base de Fourier une fois pour toutes. Numériquement, la résolution de (8) dans le domaine de Fourier est peu coûteuse,

et rend ainsi cet algorithme, notamment dans sa version *surrelaxée*, très efficace par rapport à une méthode de gradient [11].

4 Spectres réguliers

4.1 Énergie markovienne de classe C^1

Les modèles séparables conduisent à un gain substantiel en terme de résolution, mais ne permettent pas de restaurer des spectres plus doux. Pour introduire une certaine régularité sur le spectre de puissance, nous proposons [1] une régularisation markovienne de la forme :

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{p=0}^{P-1} [R_0(\rho_p) + \mu R_1(\rho_{p+1} - \rho_p)],$$

où $\rho_P = \rho_0$ puisque \mathbf{X} est 1-périodique. On a supposé R_0 et R_1 paires, convexes et C^1 . On a montré dans [2, 11] que le potentiel R_1 ne pouvait garantir à lui seul la convexité de \mathcal{R} en \mathbf{X} , et qu'il était nécessaire pour ce faire de lui adjoindre un terme séparable R_0 , linéaire au voisinage de l'origine ($R_0(\rho) = \rho$ par exemple). Ainsi, $R_0(|X_p|)$ est une fonction non différentiable par rapport à X_p , en $0_{\mathbb{C}}$. Pour concilier convexité et différentiabilité au sein d'une même pénalisation markovienne, nous proposons [11] de remplacer la fonction module par une approximation convexe de classe C^1 [14] :

$$\varphi_\varepsilon(X_p) = \sqrt{\varepsilon^2 + |X_p|^2} = q_p, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En notant $\mathbf{q} = [q_0, q_1, \dots, q_{P-1}]^t$, le critère obtenu s'écrit :

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}) = \sum_{p=0}^{P-1} [R_0(q_p) + \mu R_1(q_{p+1} - q_p)]. \quad (9)$$

4.2 Énergie SQ markovienne

L'application directe de la dualité vectorielle précédente, consistant à coupler une variable auxiliaire complexe à une interaction entre deux amplitudes spectrales complexes (X_p, X_{p+1}), ne fournit pas une énergie markovienne SQ en \mathbf{X} . En revanche, on parvient au résultat en manipulant pour chaque interaction markovienne (X_p, X_{p+1}) un vecteur auxiliaire \mathbf{b}_p à deux variables complexes (B_p^+, B_{p+1}^-) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p &= [\Re(X_p), \Im(X_p), \Re(X_{p+1}), \Im(X_{p+1})]^t \in \mathbb{R}^4 \\ \mathbf{b}_p &= [\Re(B_p^+), \Im(B_p^+), \Re(B_{p+1}^-), \Im(B_{p+1}^-)]^t \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

D'après [12], ϕ_α doit être convexe pour garantir la convexité de \mathcal{K} ; on choisit donc $\phi_\alpha(\mathbf{x}_p) = \alpha((R_0(q_p) + R_0(q_{p+1}))/2 + \mu R_1(q_p - q_{p+1}))$, fixant ainsi $g_\alpha(\mathbf{x}_p) = \|\mathbf{x}_p\|^2 - \phi_\alpha(\mathbf{x}_p)$. La convexité de g_α en \mathbf{x}_p a été établie dans [11]. Le résultat suivant fournit alors l'énergie SQ \mathcal{R}^* associée à (9).

Théorème 2 Soit $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_0^t, \mathbf{b}_1^t, \dots, \mathbf{b}_{P-1}^t] \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^4$, notée aussi $\mathbf{B} = [\Re(\mathbf{B}^+), \Im(\mathbf{B}^+), \Re(\mathbf{B}^-), \Im(\mathbf{B}^-)]$, et \mathcal{R} définie par (9), alors la relation (4) est satisfaite par :

$$\mathcal{R}^*(\mathbf{X}, \mathbf{B}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{p=0}^{P-1} \left(\left| X_p - \frac{B_p^+ + B_{p+1}^-}{2} \right|^2 + \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{b}_p) \right), \quad (10)$$

où $\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{b}_p) = \|\mathbf{b}_p\|^2 / 4 + \psi_\alpha(\mathbf{b}_p)$. ψ_α s'obtient à nouveau à partir de g_α^* , conjuguée convexe de g_α . On obtient alors \mathcal{K}

sous la forme (5) pour le triplet suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \Lambda &= 2W_{NP}^\dagger W_{NP} + 2\lambda' I_P = F_P \Delta F_P^\dagger / P^2 \\ \xi(\mathbf{B}) &= 2W_{NP}^\dagger \mathbf{y} + \lambda' \left(\Re(\mathbf{B}^+) + \Re(\mathbf{B}^-) \right. \\ &\quad \left. + j(\Im(\mathbf{B}^+) + \Im(\mathbf{B}^-)) \right) \\ \Psi(\mathbf{B}) &= \lambda' \left[\left(\|\Re(\mathbf{B}^+)\|^2 + \|\Im(\mathbf{B}^+)\|^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\Re(\mathbf{B}^-)\|^2 + \|\Im(\mathbf{B}^-)\|^2 \right) / 2 + \sum_{p=0}^{P-1} \psi_\alpha(\mathbf{b}_p) \right]. \end{aligned} \right.$$

Preuve : voir [11].

On constate sur Ψ que les variables auxiliaires (B_p^+, B_{p+1}^-) interagissent localement. Heureusement, les interactions ne sont pas connectées entre elles, si bien que leur remise à jour reste parallélisable. De plus, la dualité multivariée proposée ici pour l'énergie (9), fait croître le nombre de variables auxiliaires à introduire pour obtenir une énergie SQ en \mathbf{X} . Ce prix à payer s'explique par le caractère non linéaire qui relie \mathcal{R} à \mathbf{X} dans (9). Une itération de l'algorithme sur \mathcal{K} se résume alors à :

$$\begin{aligned} 1^\circ: & \text{RAJ séparable de } \mathbf{B}^{(k+1)}, \forall k \geq 0 \\ & \forall p \in \mathbb{N}_P, \mathbf{b}_p^{(k+1)} = \mathbf{x}_p^{(k)} - \nabla \phi_\alpha(\mathbf{x}_p^{(k)}) \\ 2^\circ: & \text{RAJ globale de } \mathbf{X}^{(k+1)} : \\ & \mathbf{X}^{(k+1)} = F_P \Delta^{-1} F_P^\dagger \xi(\mathbf{B}^{(k+1)}). \end{aligned} \quad (11)$$

5 Spectres « mélangés »

Les spectres « mélangés » sont constitués de raies spectrales et de phénomènes plus réguliers. Pour prendre en compte cette caractéristique, on modélise le spectre recherché \mathbf{X} comme la somme de deux contributions : l'une pour les raies, \mathbf{X}^e , et l'autre, \mathbf{X}^l , pour la partie plus douce. Cette nouvelle construction, baptisée « bimodèle », permet de réécrire (1) :

$$\mathbf{y} = W_{NP} (\mathbf{X}^e + \mathbf{X}^l) + \mathbf{n},$$

conduisant à un critère de moindres carrés $\mathcal{Q}_M(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}^l) = \|\mathbf{y} - W_{NP} (\mathbf{X}^e + \mathbf{X}^l)\|^2$. On profite de la Section 3, pour introduire une régularisation séparable \mathcal{R}^e sur \mathbf{X}^e , tandis que pour \mathbf{X}^l , nous choisissons au vu de la Section 4 un terme markovien :

$$\mathcal{R}_M(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}^l) = \lambda_e \mathcal{R}^e(\mathbf{X}^e) + \lambda_l \mathcal{R}^l(\mathbf{X}^l),$$

où $\lambda_e, \lambda_l > 0$ sont les hyperparamètres. Pour restaurer les raies spectrales dans \mathbf{X}^e , il faut imposer $\lambda_e > \lambda_l$.

Le critère global \mathcal{J}_M associé à \mathcal{Q}_M et \mathcal{R}_M est strictement convexe en $(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}^l)$, et de classe C^1 d'après les propriétés établies sur chacune des énergies régularisantes. Le minimiseur composite $\widehat{\mathbf{X}} = \widehat{\mathbf{X}}^e + \widehat{\mathbf{X}}^l$ s'interprète dans un cadre bayésien comme l'estimée du MAP joint. On le calcule à partir d'une extension directe des algorithmes de relaxation par blocs vus précédemment en considérant un critère augmenté \mathcal{R}_M^* du type :

$$\mathcal{R}_M^*(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}^l, \mathbf{B}^e, \mathbf{B}^l) = \lambda_e \mathcal{R}_0^*(\mathbf{X}^e, \mathbf{B}^e) + \lambda_l \mathcal{R}_1^*(\mathbf{X}^l, \mathbf{B}^l),$$

où \mathcal{R}_0^* est de la forme (6) et \mathcal{R}_1^* de celle de (10).

6 Simulations

Nous illustrons les performances des méthodes présentées sur un jeu de données similaire à celui de Kay & Marple [8]. Chaque spectre estimé est calculé à partir de 64 échantillons complexes, issus d'un processus composé de trois sinusôides et d'un bruit coloré gaussien. La « vraie » densité spectrale de puissance apparaît en fig 1 (f). Les sinusôides sont aux fréquences réduites $-0,3$, $-0,22$ et $-0,21$ et ont respectivement un rapport signal à bruit (RSB) de 0 , $+20$ et $+20$ dB. Ici le RSB est défini comme le rapport de puissance d'une sinusôide sur la puissance totale dans la bande passante du bruit. Ce signal a été sélectionné pour tester la capacité de nos méthodes à restituer simultanément des composantes large bande et bande étroite.

L'hyperparamètre λ réalisant le compromis entre la pénalisation globale et la partie d'attache aux données a été réglé de manière à assurer une conservation de la puissance des observations : $\|\widehat{\mathbf{X}}\|^2 = \|y\|^2$. Les autres paramètres ont été choisis empiriquement. Chaque spectre estimé apparaissant sur la fig. 1 a été calculé sur $P = 256$ échantillons fréquentiels. La technique du *bourrage de zéros* a été utilisée pour calculer le périodogramme décrit en fig. 1 (a). La résolution du périodogramme pour une séquence de longueur 64 est de $0,015$ en fréquence réduite, si bien que les sinusôides placées en $-0,22$ et $-0,21$ sont en dessous de cette résolution. Deux spectres estimés avec des pénalisations séparables, apparaissant en fig. 1 (b)-(c), permettent de restaurer toutes les raies. Le second est très proche du résultat fourni par [3]. Sur la fig. 1 (d), on peut voir l'effet adoucissant d'une régularisation markovienne : un compromis semble difficile à trouver pour préserver les pics spectraux. Sur la fig. 1 (e), on peut voir que l'estimée du « bimodèle » dépasse sensiblement les limites atteintes par les méthodes précédentes puisqu'il sépare les raies les plus proches, tout en restaurant fidèlement la partie large bande.

Références

- [1] J. Idier, J.-F. Giovannelli, et P. Ciuciu, « Interprétation régularisée des périodogrammes et extensions non quadratiques », in *Actes du 16^e colloque GRETSI*, Grenoble, France, septembre 1997, pp. 695–698.
- [2] P. Ciuciu, J. Idier, et J.-F. Giovannelli, « Markovian high resolution spectral analysis », in *Proc. IEEE ICASSP*, Phoenix, U.S.A., mars 1999, pp. 1601–1604.
- [3] M. D. Sacchi, T. J. Urych, et C. J. Walker, « Interpolation and extrapolation using a high-resolution discrete Fourier transform », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-46, n° 1, pp. 31–38, janvier 1998.
- [4] S. F. Gull et G. J. Daniell, « Image reconstruction from incomplete and noisy data », *Nature*, vol. 272, pp. 686–690, 1978.
- [5] A. Tikhonov et V. Arsenin, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Éditions MIR, Moscou, 1976.
- [6] D. Geman et C. Yang, « Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization », *IEEE Trans. Image Processing*, vol. IP-4, n° 7, pp. 932–946, juillet 1995.
- [7] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud, « Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging », in *Proc. IEEE ICIP*, 1994, vol. 2, pp. 168–172.

- [8] S. M. Kay et S. L. Marple, « Spectrum analysis—a modern perspective », *Proc. IEEE*, vol. 69, n° 11, pp. 1380–1419, novembre 1981.
- [9] C. A. Bouman et K. D. Sauer, « A generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation », *IEEE Trans. Image Processing*, vol. IP-2, n° 3, pp. 296–310, juillet 1993.
- [10] J.-F. Giovannelli et J. Idier, « Regularized interpretation of periodograms », rapport technique, GPI-LSS, 1999.
- [11] P. Ciuciu, J. Idier, et J.-F. Giovannelli, « Markovian high resolution nonparametric spectral analysis », rapport technique, GPI-LSS, 1999.
- [12] J. Idier, « Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration », rapport technique soumis à *IEEE Trans. Image Processing*, GPI-LSS, 1999.
- [13] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [14] R. V. Vogel et M. E. Oman, « Iterative methods for total variation denoising », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 17, n° 1, pp. 227–238, janvier 1996.

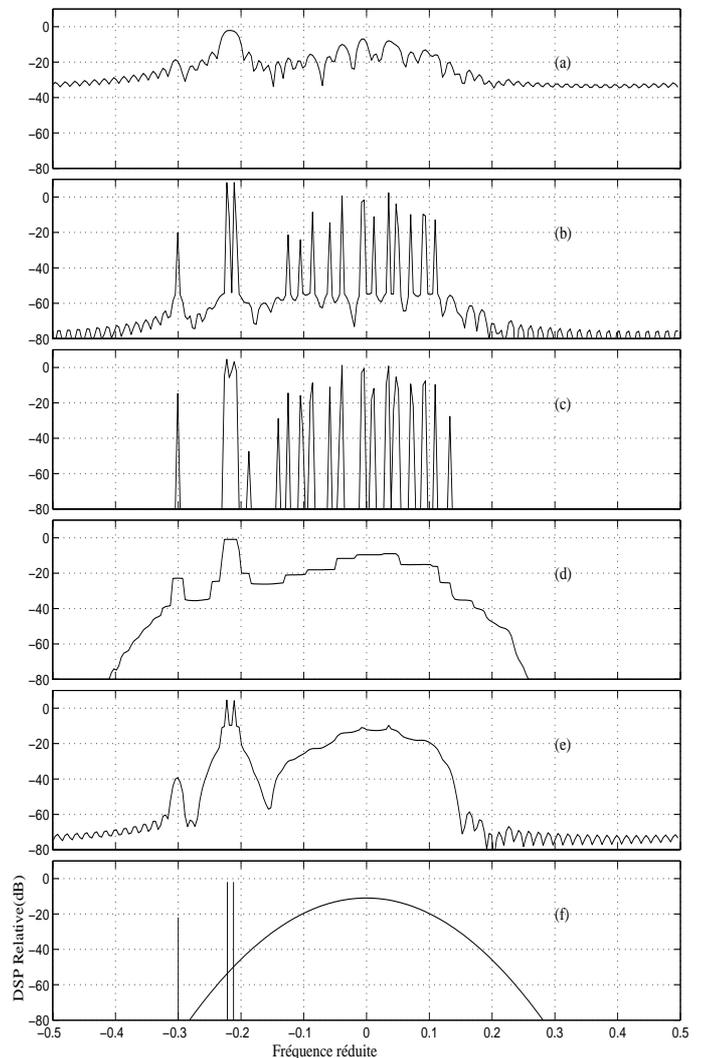


FIG. 1: (a) : périodogramme «bourré de zéros» ; (b) : séparable avec le potentiel convexe $\sqrt{\beta^2 + x^2}$; (c) : idem mais pour le potentiel séparable L_1 ; (d) : pénalisation markovienne ; (e) : bimodèle ; (f) : la vraie DSP.