

Paquets d'ondelettes de Meyer pour le traitement d'images

Philippe CARRÉ, Christine FERNANDEZ-MALOIGNE

Ircom-SIC, UMR CNRS 6615
BP 179, 86960 Futuroscope.
carre@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

Résumé – A partir de la décomposition en ondelettes de Meyer discrète, nous proposons dans ce papier, son extension à une décomposition en paquets d'ondelettes et son application à l'image numérique. Cette nouvelle approche s'appuie sur une projection, qui, par ses propriétés de séparation fréquentielle, offre une représentation adaptée pour un algorithme de segmentation d'images.

Abstract – From the discret Meyer wavelet transform, we propose in this paper an extension to a Meyer wavelet packet decomposition and its application to the image. This new approach based on a projection, which has good properties of frequential discrimination, permits one to have a representation adapted to a segmentation algorithm

1 Rappel sur les ondelettes de Meyer

Définition Le principe des ondelettes de Meyer est de lisser l'ondelette sinc, considéré comme le cas idéal en fréquentiel. Pour cela, une fonction de coupure de régularité variable est définie par

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}, \text{ et } r(t) + r(1-t) = 1 \text{ pour tout } t.$$

La fonction d'échelle de Meyer, ζ , s'exprime alors en fonction de r [2]. Nous notons $\hat{\zeta}$, la transformée de Fourier de ζ :

$$\hat{\zeta}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1/3 \\ \cos(\frac{\pi}{2}r(3|\xi| - 1)) & \text{si } 1/3 < |\xi| \leq 2/3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (1)$$

A la fonction ζ , introduite dans l'équation (1), correspond une analyse multirésolution [4]. On peut alors trouver une fonction périodique $H(\xi)$ telle que $\hat{\zeta}(2\xi) = (1/\sqrt{2})H(\xi)\hat{\zeta}(\xi)$. Ce filtre passe-bas $H(\xi)$ peut s'écrire [4]

$$H(\xi) = \sqrt{2} \sum_n \hat{\zeta}(2\xi + 2n). \quad (2)$$

Afin de construire la fonction d'ondelette ψ associée, nous utilisons la relation liant le filtre passe-bas H au filtre passe-haut G dans le cas d'une décomposition orthogonale [4]

$$\begin{aligned} G(\xi) &= e^{-i2\pi\xi} H^*(\xi + 1/2) \\ &= -e^{i2\pi\xi} \sum_n \hat{\zeta}(2\xi + 1 + 2n)\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Alors la fonction d'ondelette est définie par

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= (1/\sqrt{2})G(\xi/2)\hat{\zeta}(\xi/2) \\ &= \begin{cases} e^{-i\xi\pi} \sin(\frac{\pi}{2}r(3|\xi| - 1)) & \text{si } 1/3 < |\xi| \leq 2/3 \\ e^{-i\xi\pi} \cos(\frac{\pi}{2}r(\frac{3}{2}|\xi| - 1)) & \text{si } 2/3 < |\xi| \leq 4/3 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}. \end{aligned} \quad (4)$$

L'ondelette de Meyer a un support compact dans le domaine fréquentiel, et une décroissance temporelle très

rapide. Sa régularité est identique à celle de la fonction de coupure r . Toutefois, elle n'est pas associée à des filtres à support temporel fini. L'algorithme de transformée en ondelettes rapide, proposé par Mallat, n'est donc pas utilisable. Le principe, pour développer un algorithme numérique de décomposition en ondelettes de Meyer, repose sur une utilisation de la décomposition de Malvar dans le plan fréquentiel [3]. Cette idée fut reprise en détail par Kolaczyk durant sa thèse [1]. L'algorithme de décomposition en ondelettes de Meyer discret se décline en une combinaison de partitions dans le domaine fréquentiel, avec des fenêtres régulières, suivi de transformées trigonométriques locales [1]. Nous allons étendre cet algorithme aux paquets d'ondelettes.

Quelques éléments de base Tout d'abord rappelons brièvement les définitions introduites dans la décomposition en ondelettes de Malvar qui sont utilisées lors de la décomposition discrète en ondelettes de Meyer.

Considérons la partition de $[0, N-1]$ avec des intervalles donnés par

$$[0, N-1] = \bigcup_j I_j \text{ et } I_j \cap I_{j'} = \emptyset, \forall j \neq j'$$

avec $I_j = [a_j, a_{j+1}[$. Nous définissons l'opérateur de repliement U_{a_j} et son adjoint $U_{a_j}^*$ de la façon suivante [5]:

$$U_{a_j} f(t) \stackrel{(1)}{=} \begin{cases} r\left(\frac{a_j-t}{\alpha}\right) f(t) \mp_{(2)}^{(1)} r\left(\frac{t-a_j}{\alpha}\right) f(2a_j-t) \\ \text{si } a_j - \alpha < t < a_j \end{cases}$$

$$U_{a_j}^* f(t) \stackrel{(2)}{=} \begin{cases} r\left(\frac{t-a_j}{\alpha}\right) f(t) \pm_{(2)}^{(1)} r\left(\frac{a_j-t}{\alpha}\right) f(2a_j-t) \\ \text{si } a_j < t < a_j + \alpha \\ f(t) \text{ sinon} \end{cases} \quad (5)$$

avec $\alpha > 0$, $2\alpha < l_j$ et $r(\cdot)$ la fonction de coupure introduite précédemment.

Soit $I_{[a_j, a_{j+1}]}$ l'opérateur de restriction, nous définissons l'opérateur de restriction régulier T_{I_j} (avec $I_j = [a_j, a_{j+1}[$)

et son adjoint de la façon suivante

$$\begin{aligned} T_{I_j} f &= 1_{[a_j, a_{j+1}]} U_{a_j} U_{a_{j+1}} f \\ T_{I_j}^* f &= U_{a_j}^* U_{a_{j+1}}^* 1_{[a_j, a_{j+1}]} f \end{aligned}$$

2 Paquets d'ondelettes de Meyer

2.1 Rappel sur les paquets d'ondelettes

En utilisant les filtres H et G , une séquence de fonctions est définie récursivement suivant (cf [4]) :

$$\widehat{\psi}_0^0(\xi) = \widehat{\zeta}(\xi), \quad \widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}(\xi) = H_j^l(\xi) \widehat{\psi}_j^l(\xi), \quad \widehat{\psi}_{2_{j+1}}^{l+1}(\xi) = G_j^l(\xi) \widehat{\psi}_j^l(\xi). \quad (6)$$

La collection de ces fonctions, pour $l = 0, 1, \dots$, correspond aux *paquets d'ondelettes* associés à H et G .

Si l'on applique les relations de l'équation (6), avec les filtres H et G définis dans le cadre de la décomposition en ondelettes de Meyer, les fonctions de paquets d'ondelettes de Meyer peuvent alors être définies pour tout indice j, l .

Le filtre H_j^l correspond à un filtre passe-bas appliqué à l'échelle l sur un ensemble ayant pour support fréquentiel $[j2^{-l}, (j+1)2^{-l}]$.

H_j^l peut donc s'exprimer en fonction de H par

$$H_j^l(\xi) = H(2^l(\xi + j2^{-l})) = \sqrt{2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^{l+1}\xi + 2n + j) \quad (7)$$

Le filtre G_j^l est obtenu à partir de la relation

$$\begin{aligned} G_j^l(\xi) &= e^{-i2\pi\xi} H_j^{l*}(\xi + 1/2) \\ &= -e^{i2^{l+1}\pi\xi} \sqrt{2} \sum_n \widehat{\zeta}(2^{l+1}\xi + 2n + 1 + j) \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 Réalisation de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer

Nous allons maintenant adapter au calcul des paquets d'ondelettes de Meyer, les méthodes numériques proposées par Kolaczyk [1]. Du fait des relations (6), la réalisation numérique de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer se définit récursivement. Comme pour la décomposition en ondelettes, l'intervalle des fréquences traitées est réduit aux fréquences positives. La partie négative est calculée par extension grâce à la propriété suivante :

Soit $\widehat{f} = f_1 + if_2$ la transformée de Fourier d'une fonction f et $-I =]-b, -a]$ un intervalle de fréquence négative, Alors les projections de f_1 et f_2 sur $-I$ peuvent s'obtenir directement de leurs projections sur $I = [a, b[$ en utilisant la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} (T_{-I} f_1)(\xi) &= (T_I f_1)(-\xi) \\ (T_{-I} f_2)(\xi) &= -(T_I f_2)(-\xi) \end{aligned} \right\} \forall \xi \in]-\infty, 0]. \quad (9)$$

2.2.1 Coefficients de paquets d'ondelettes pour $j > 0$

Définition de l'intervalle associé à $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$ Nous nous plaçons à une échelle l donnée de la projection. $\widehat{\psi}_j^l$ a alors pour support $[j2^{-l}, (j+1)2^{-l}[$ plus une zone de recouvrement définie à droite et à gauche de cet intervalle.

Afin d'obtenir la fonction $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$, le filtre H_j^l est appliqué.

D'après la définition (7), H_j^l a un support égal à

$$[j2^{-l} - 2^{-l-1} + n2^{-l+1}, j2^{-l} + 2^{-l-1} + n2^{-l+1}[.$$

La fonction $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$ correspond donc à un intervalle à l'intersection des deux supports, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} I_{2_j}^{l+1} &= [j2^{-l}, j2^{-l} + 2^{-l-1}[\\ &= [(2j)2^{-l-1}, (2j+1)2^{-l-1}[. \end{aligned}$$

Définition du recouvrement associé à $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$ Un intervalle I_j^l a deux zones de recouvrement respectivement notées α_j^l à sa droite, et α_{j-1}^l à sa gauche. D'après la définition de I_j^l précédente, nous constatons que la borne gauche du nouvel intervalle $I_{2_j}^{l+1}$ est identique à celle de I_j^l . La zone de recouvrement à gauche est donc identique à celle de I_j^l et a été définie à une échelle précédente. En revanche, la zone de recouvrement à droite de $I_{2_j}^{l+1}$ correspond à la nouvelle division. D'après les équations (1) et (7) ce recouvrement est égal à $\frac{2^{-l-1}}{6}$.

D'une façon générale, les tailles des zones de recouvrement sont définies par récurrence suivant

$$\text{recouvrement de } I_{2_j}^{l+1} = \begin{cases} \alpha_{2_j}^{l+1} = \frac{2^{-l-1}}{6} \text{ à droite} \\ \alpha_{2_{j-1}}^{l+1} = \alpha_{j-1}^l \text{ à gauche} \end{cases} \quad (10)$$

L'initialisation est fixée par la première coupure $\alpha_0^0 = \frac{1}{6}$ (la première fenêtre correspondant à ζ).

Définition des polarités et transformées associées à $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$ Si l'on respecte les principes proposés par Kolaczyk [1], et d'après l'équation (7), les polarités au nouveau point de coupure $j2^{-l} + 2^{-l-1}$ sont, respectivement, $(-, +)$ pour la partie réelle et $(+, -)$ pour la partie imaginaire. La partition au point $j2^{-l}$ a été calculée à une échelle précédente et correspond à des polarités identiques. Nous en déduisons que les polarités de l'intervalle associé à $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$ correspondent à la transformée en sinus DST-III pour la partie réelle et en cosinus DCT-III pour la partie imaginaire.

Définition des paramètres de $\widehat{\psi}_{2_{j+1}}^{l+1}$ Nous appliquons le même raisonnement pour déterminer l'intervalle, les recouvrements, les polarités et les transformées associés à $\widehat{\psi}_{2_{j+1}}^{l+1}$.

Afin d'obtenir la fonction $\widehat{\psi}_{2_{j+1}}^{l+1}$ à partir de la fonction $\widehat{\psi}_j^l$, nous appliquons le filtre G_j^l . D'après la définition (8), G_j^l a un support égal à

$$[(j+1)2^{-l} - 2^{-l-1} + n2^{-l+1}, (j+1)2^{-l} + 2^{-l-1} + n2^{-l+1}[.$$

La fonction $\widehat{\psi}_{2_{j+1}}^{l+1}$ correspond alors à un intervalle

$$I_{2_{j+1}}^{l+1} = [(2j+1)2^{-l-1}, (2j+2)2^{-l-1}[$$

Selon le même principe que pour $\widehat{\psi}_{2_j}^{l+1}$, les zones de recouvrement doivent être définies par récurrence

$$\text{recouvrement de } I_{2_{j+1}}^{l+1} = \begin{cases} \text{à droite, } \alpha_{2_{j+1}}^{l+1} = \alpha_j^l \\ \text{à gauche, } \alpha_{2_j}^{l+1} = \frac{2^{-l-1}}{6} \end{cases} \quad (11)$$

Les polarités au nouveau point de coupure $j2^{-l} + 2^{-l-1}$ sont $(-, +)$ pour la partie réelle et $(+, -)$ pour la partie imaginaire. Le repliement autour du point $(j+1)2^{-l}$ a été calculé à une échelle précédente et correspond à des polarités identiques. Les polarités de l'intervalle associé à ψ_{2j+1}^{l+1} correspondent donc à la transformée en sinus DST-III pour la partie réelle et en cosinus DCT-III pour la partie imaginaire.

Finalement, les projections de la partie réelle et imaginaire dans une décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer s'écrivent :

$$d_{l,j,k}^{\mathcal{R}} = \sum_{\xi} f_1(\xi) \sqrt{\frac{2}{\lg_l}} b_{l_j}(\xi) \sin \left[(k+1/2) \frac{\pi}{\lg_l} (\xi - 2^{-l-1}) \right],$$

$$d_{l,j,k}^{\mathcal{S}} = \sum_{\xi} f_2(\xi) \sqrt{\frac{2}{\lg_l}} b_{l_j}(\xi) \cos \left[(k+1/2) \frac{\pi}{\lg_l} (\xi - 2^{-l-1}) \right].$$

avec b_{l_j} une fenêtre de support $[j2^{-l}, (j+1)2^{-l}]$ ayant un recouvrement défini par les équations (10) et (11) selon si j est paire ou impaire.

En suivant le même principe que pour les ondelettes de Meyer, nous combinons les projections correspondant aux parties réelle et imaginaire afin d'obtenir les coefficients de paquets d'ondelettes de Meyer discrets périodiques :

$$d_{j,k}^l = \begin{cases} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} (d_{l,j,k}^{\mathcal{S}} + d_{l,j,k}^{\mathcal{R}}) \\ \text{si } k = 0, \dots, 2^{-l-1} - 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} (d_{l,j,2^{-l}-k-1}^{\mathcal{S}} - d_{l,j,2^{-l}-k-1}^{\mathcal{R}}) \\ \text{si } k = 2^{-l-1}, \dots, 2^{-l} - 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

2.2.2 Coefficients d'ondelettes pour $j = 0$

Nous allons nous intéresser au cas de la trame ($j = 0$). Il est défini, à chaque échelle, par

$$\begin{aligned} \psi_0^{l+1} &= H_0^l \psi_0^l \\ &= 2^{(l+1)/2} \sum_n \zeta(2^{l+1}\xi + 2n) \psi_0^l \\ &= H(2^l \xi) \psi_0^l \end{aligned}$$

Sachant que $\psi_0^0 = \zeta$, on constate que le calcul des coefficients de paquets d'ondelettes de la trame reste identique au cas des ondelettes. Afin de calculer les coefficients de paquets d'ondelettes de Meyer $d_{0,k}^l$, nous reprenons la méthodologie introduite par Kolaczyk pour le calcul de la trame dans une décomposition en ondelettes de Meyer [1].

2.3 Algorithme et reconstruction

2.3.1 Décomposition

L'algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer périodique se résume à l'algorithme suivant :

- Pour j variant de 0 à 2^{l-1} ,

Repliement de la partie réelle positive de \hat{f} autour du point $(2j+1)\frac{N}{2^l}$ avec comme une polarité positive à gauche et négative à droite et une zone de recouvrement $\frac{2^{-l}}{6}$

Repliement de la partie imaginaire positive de \hat{f} autour du point $(2j+1)\frac{N}{2^l}$ avec comme une polarité négative à gauche et positive à droite et une zone de recouvrement $\frac{2^{-l}}{6}$

- Calcul des transformées trigonométriques locales : $d_{0,k}^{l,\mathcal{R}} = DCT_I(T_{l_0}^l f_1)$ et $d_{0,k}^{l,\mathcal{S}} = DST_I(T_{l_0}^l f_2)$
- Combinaison des coefficients $d_{0,k}^{l,\mathcal{R}}$ et $d_{0,k}^{l,\mathcal{S}}$ afin d'obtenir $d_{0,k}^l$.
- Pour j variant de 1 à 2^l ,
Calcul des transformées trigonométriques locales : $d_{j,k}^{l,\mathcal{R}} = DST_III(T_{l_j}^l f_1)$ et $d_{j,k}^{l,\mathcal{S}} = DCT_III(T_{l_j}^l f_2)$
Combinaison des coefficients $d_{j,k}^{l,\mathcal{R}}$ et $d_{j,k}^{l,\mathcal{S}}$ afin d'obtenir $d_{j,k}^l$.

Nous effectuons ces opérations pour l variant de 1 à L . L'algorithme décrit ci-dessus est résumé sur la figure 1.

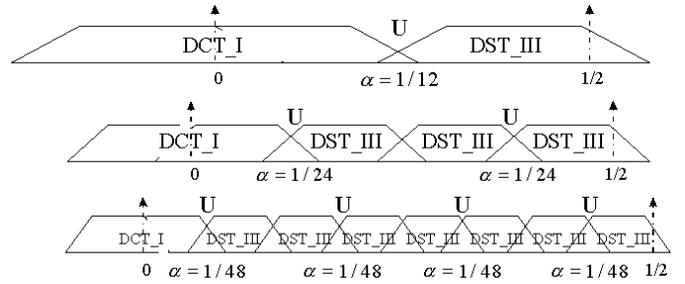


FIG. 1: Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer. Nous indiquons avec le symbole U les points de repliement traités à chaque échelle, ainsi que la taille de la zone de recouvrement associée. Les transformées trigonométriques indiquées correspondent au traitement de la partie réelle de \hat{f}

2.3.2 Reconstruction

Afin de pouvoir définir simplement l'algorithme de reconstruction, il faut que les paquets d'ondelettes de Meyer vérifient $W_j^l = W_{2j}^{l+1} \oplus W_{2j+1}^{l+1}$. Si l'on considère que les filtres H_j^l et G_j^l sont miroirs en quadrature, la preuve est immédiate grâce au lemme suivant :

Corollaire 1 [5] Si H et G sont des filtres miroirs en quadrature et Γ est une partition dyadique disjointe de \mathcal{R} , alors $\{\psi_{j,k}^l : I_j^l \in \Gamma, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathcal{R})$.

Mais, les propriétés des opérateurs de restriction peuvent aussi constituer une manière différente de le démontrer dans le cas des paquets d'ondelettes de Meyer. Après avoir calculer les transformées trigonométriques inverses sur chaque intervalle, nous obtenons les ensembles $T_{l_j}^l f_i(\xi)$. On calcule les termes $T_{l_j}^* T_{l_j}^l f_1(\xi)$ et $T_{l_j}^* T_{l_j}^l f_2(\xi)$ grâce à l'opérateur de repliement adjoint U^* . Puisque la projection est orthogonale, c'est-à-dire que $T_{l_j}^* T_{l_j}^l T_{l_{j'}}^* T_{l_{j'}}^l = 0$ pour tout $l \neq l' \times j \neq j'$, et que les intervalles adjacents sont de polarités opposées, nous pouvons écrire que

$$T_{l_j}^* T_{l_j}^l f_2(\xi) = T_{l_{2j}^*}^* T_{l_{2j}^*}^l f_2(\xi) \oplus T_{l_{2j+1}^*}^* T_{l_{2j+1}^*}^l f_2(\xi).$$

Donc, si l'on note A l'ensemble correspondant à un arbre admissible sélectionné par un algorithme de meilleure base, la fonction \hat{f} peut-être reconstruite à partir de la relation suivante :

$$\hat{f} = \sum_{(l,j) \in A} (P_{I_j^l} f_1 + iP_{I_j^l} f_2),$$

$$\text{avec } P_{I_j^l} f_1 = \begin{cases} T_{I_0^l}^* T_{I_0^l} f_1, & \text{si } j = 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_1(\xi), & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j > 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_1(-\xi), & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j > 0 \end{cases},$$

$$\text{et } P_{I_j^l} f_2 = \begin{cases} T_{I_0^l}^* T_{I_0^l} f_1, & \text{si } j = 0 \\ T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_2(\xi), & \text{si } \xi \geq 0 \text{ et } j > 0 \\ -T_{I_j^l}^* T_{I_j^l} f_2(-\xi), & \text{si } \xi < 0 \text{ et } j > 0 \end{cases}.$$

(12)

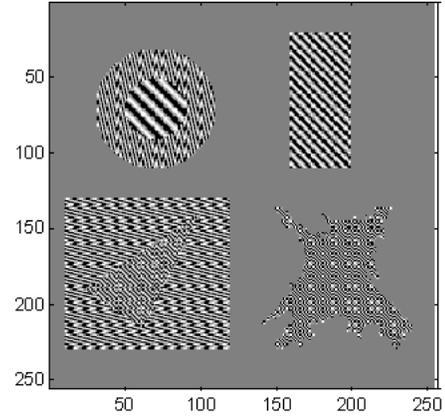
L'extension de la décomposition en paquets d'ondelettes de Meyer à la dimension deux est basée sur le même principe que l'algorithme utilisé avec des filtres à support temporel fini. La décomposition 2D s'effectue en appliquant l'algorithme présenté ci-dessus sur chaque ligne, puis sur chaque colonne de l'image.

3 Application

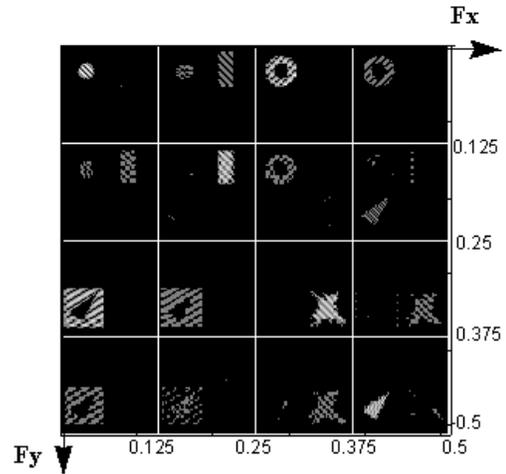
Nous présentons, sur la figure 2, un exemple de décomposition en paquets d'ondelettes, sur deux échelles, d'une image composée de différents atomes temps-fréquence. Cet exemple nous permet d'illustrer l'avantage d'utiliser une base d'ondelettes associées à des filtres à support fréquentiel fini. En effet, nous constatons sur la décomposition avec des ondelettes de Daubechies D8 que les différentes textures apparaissent dans différents plans d'ondelettes. A l'inverse, dans la décomposition avec les paquets d'ondelettes de Meyer, chaque texture est bien localisée dans un seul plan. Cette nouvelle base de décomposition trouve tout naturellement sa place dans des algorithmes de segmentation, comme ceux proposés à partir de paquets d'ondelettes "classiques".

References

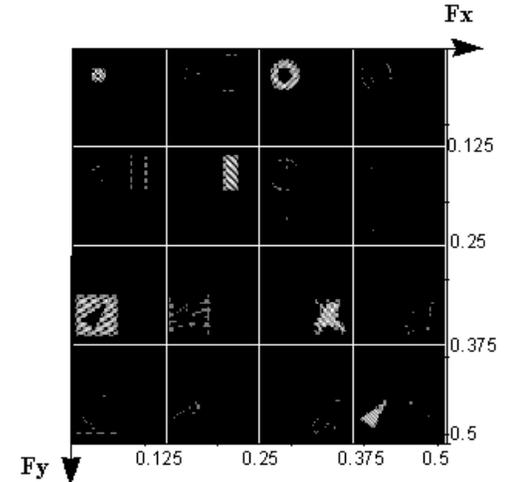
- [1] E. Kolaczyk. *Wavelet Methods for the Inversion of Certain Homogeneous Linear Operators in the Presence of Noisy Data*. PhD thesis, Stanford University, October 1994.
- [2] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*, volume I. Hermann, Paris, 1990.
- [3] Y. Meyer. *Les ondelettes : algorithmes et applications*. Armand Colin, Paris, 1994.
- [4] M. Vetterli and J. Kovačević. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
- [5] M. Wickerhauser. *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. A K Peters, Massachusetts, 1994.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2: Décomposition en paquets d'ondelettes : (a) Image originale composée de différents atomes TF 2D (b) Décomposition avec les ondelettes de Daubechies D8 (c) Décomposition avec les ondelettes de Meyer