Décodage itératif des codes produits avec des coefficients adaptatifs

Annie PICART[1], Ramesh PYNDIAH[1]

[1]ENST BRETAGNE, Département Signal et Communications
BP 832, 29285 Brest Cédex, France

Annie.Picart@enst-bretagne.fr, Ramesh.Pyndiah@enst-bretagne.fr

Résumé – Les turbo codes produits (TCP) sont décodés par un algorithme qui utilise deux paramètres alpha et beta, évoluant avec le nombre de décodages et fixés expérimentalement. L'influence de ces paramètres sur les performances des turbo codes produits est primordiale. Pour des raisons pratiques, ces coefficients sont optimisés seulement pour un code particulier. En les adaptant aux circonstances du décodage, c'est-à-dire en tenant compte du code, de la modulation, du canal de transmission, le décodeur itératif des codes produits gagne en portabilité et en performances.

Abstract – Product turbo codes (PTC) are decoded by an algorithm using two parameters alpha and beta, that are function of the number of decoding steps and are fixed experimentally. The performance of PTC depends heavily on the values of these coefficients. For practical reasons, they are optimized only for one particular code. Adapting the coefficients to the decoding circumstances (encoder, modulation, transmission channel) leads to an improvement of the decoder portability and performance.

1 Introduction

Dans le marché des télécommunications, en expansion continue depuis plusieurs années, il existe une forte demande de systèmes numériques permettant de transmettre des informations à des débits croissants, avec une qualité toujours améliorée. Les turbo codes constituent actuellement la solution la plus performante pour réduire le taux d'erreurs et améliorer l'efficacité spectrale par rapport aux systèmes de codage classiques. Une mise en oeuvre de complexité raisonnable a également contribué au développement important des turbo codes.

Nous traitons ici des turbo codes en blocs ou turbo-codes produits, introduits par Pyndiah en 1994 [Py94a]. Les performances de ces turbo codes en blocs intéressent non seulement les concepteurs de systèmes de transmission de messages courts, mais aussi ceux des systèmes nécessitant un rendement de codage élevé. L'algorithme de décodage itératif des codes produits, initialement proposé en [Pyn94a], utilise deux paramètres $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ qui sont fixés expérimentalement et évoluent avec le nombre p de décodages effectués. Les valeurs de ces coefficients ont une influence déterminante sur les performances. En pratique, ces valeurs sont optimisées seulement pour un code particulier. L'optimisation expérimentale du jeu de paramètres est difficilement envisageable pour tous les codes produits car la procédure est trop longue et fastidieuse.

On propose donc d'adapter les coefficients $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ aux circonstances du décodage. On illustre ici l'influence du paramètre β sur les performances. On montre que l'expression du coefficient α dépend de la nature du canal de transmission (gaussien ou de Rayleigh). En tenant compte non seulement du nombre de décodages effectués, mais aussi de la modulation, du code élémentaire, du canal de transmission, le décodeur itératif gagne en portabilité et en performances. Le gain en rapport signal à bruit peut atteindre 2 dB pour les codes courts. Pour les codes longs, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un taux d'erreurs spécifié est réduit de 1 ou 2 par rapport au cas où l'on utilise des coefficients prédéterminés.

2 Les turbo codes produits

2-1 Construction d'un code produit

Un code produit est obtenu par la concaténation en série d'au moins deux codes en blocs. En considérant deux codes $\mathbf{C}_1(n_1,k_1,d_1)$ et $\mathbf{C}_2(n_2,k_2,d_2)$, le code produit $\mathbf{C}_p(n_p,k_p,d_p)$ est représenté par une matrice $\mathbf{M}$ à n_2 lignes et n_1 colonnes obtenues de la façon suivante. k_2 messages de dimension k_1 sont codés par le code $\mathbf{C}_1$, puis les n_1 colonnes de la matrice sont codées par le code $\mathbf{C}_2$. Toutes les lignes et toutes les colonnes du code produit représentent un mot de code, respectivement des codes $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$. C'est pourquoi le code produit est décodé par un décodage successif des lignes et des colonnes de la matrice. L'utilisation d'un algorithme de décodage des codes en blocs à entrées et sorties pondérées permet d'itérer efficacement le processus.

2-2 Décodage itératif des codes produits

Considérons le décodage d'une ligne ou d'une colonne, associée à un mot de code $\mathbf{C}$, de composantes c_j égales à 0 ou 1. En supposant une modulation MDP2, le symbole émis e_j caractérisant le symbole binaire c_j est de la forme :

$$e_j = 2c_j - 1 \tag{1}$$

Après transmission sur un canal gaussien, l'échantillon reçu en sortie du démodulateur s'exprime par :

$$r_j = e_j + b_j \tag{2}$$

où b_j est un bruit blanc gaussien, centré de variance σ^2.

La fiabilité du symbole binaire e_j à l'entrée du décodeur est définie par le Logarithme du Rapport de Vraisemblance Normalisé r_j' défini par :

$$r_j' = \frac{\sigma^2}{2} \ln \frac{P_r\left[e_j = +1 / r_j\right]}{P_r\left[e_j = -1 / r_j\right]} \tag{3}$$

Le vecteur des entrées pondérées de composantes r_j' est noté $\mathbf{R}'$.

L'algorithme utilisé pour le décodage à entrées pondérées est dérivé de l'algorithme de Chase [Ch72]. On détermine le vecteur binaire $\mathbf{Y}$ obtenu par seuillage de $\mathbf{R}'$. On sélectionne les symboles binaires les moins fiables de $\mathbf{Y}$ à l'entrée du décodeur, on commute un ou plusieurs de ces symboles peu fiables, puis on décode chaque vecteur binaire après commutation. En sortie du décodeur de Chase, on dispose d'une liste limitée des mots de code les plus vraisemblables. La décision est prise en faveur du mot de code $\mathbf{D}$ dont la distance euclidienne par rapport au vecteur d'entrée $\mathbf{R}'$ est la plus faible.

L'algorithme de Pyndiah [Py94a] permet ensuite d'affecter une pondération ou une fiabilité à chacune des décisions d_j du vecteur décidé $\mathbf{D}$. La fiabilité associée à la décision d_j est définie par :

$$r_{d_j}' = \frac{\sigma^2}{2} \ln \frac{\Pr\left[d_j = +1 / \mathbf{R}'\right]}{\Pr\left[d_j = -1 / \mathbf{R}'\right]} \tag{4}$$

Dans tout processus de décodage itératif, à chaque étape de décodage, c'est l'information inédite apportée par le dernier décodeur qui est l'information pertinente utile au décodeur suivant. Cette information dite extrinsèque est extraite de la décision pondérée r_{d_j}' en y retranchant l'information r_j' disponible avant décodage :

$$w_j = r_{d_j}' - r_j' \tag{5}$$

L'information extrinsèque w_j est alors exploitée pour modifier l'entrée du décodeur suivant en fonction de la décision qui vient d'être prise. La fiabilité à l'entrée du $p^{\text{ième}}$ décodeur est égale à :

$$r_j'(p) = r_j' + \alpha(p) w_j \tag{6}$$

Le paramètre $\alpha(p)$ est introduit pour tenir compte du fait que la fiabilité de l'information extrinsèque est faible au cours des premières itérations, mais augmente avec le nombre p de décodages effectués.

En utilisant les expressions (4) et (5), l'information extrinsèque w_j est évaluée au $p^{\text{ième}}$ décodage par :

$$w_j(p) = \frac{\left\|\mathbf{R}'(p) - \mathbf{C}^c(p)\right\|^2 - \left\|\mathbf{R}'(p) - \mathbf{D}(p)\right\|^2}{4} d_j(p) - r_j'(p) \tag{7}$$

$r_j'(p)$ représente la composante j du vecteur $\mathbf{R}'(p)$ de fiabilité à l'entrée du $p^{\text{ième}}$ décodeur. $\mathbf{D}(p)$ est le mot de code décidé en sortie du $p^{\text{ième}}$ décodeur. $\mathbf{C}^c(p)$ est le mot de code « concurrent » le plus vraisemblable pour lequel le symbole en position j est opposé à d_j ($c_j^c = -d_j$). L'utilisation de l'expression (7) pour le calcul de w_j suppose que le mot de code concurrent $\mathbf{C}^c$ est disponible en sortie du décodeur. Un tel mot existe dans l'ensemble des mots du code, mais ne figure pas toujours dans l'ensemble des mots de code les plus vraisemblables proposés en sortie du décodeur. Il arrive qu'en une position j particulière, tous les mots de code proposés en sortie du décodeur de Chase aient une composante égale à d_j. Si aucun concurrent de signe opposé à d_j n'est disponible, l'information extrinsèque est évaluée par :

$$w_j(p) = \beta(p) d_j(p) \tag{8}$$

où le paramètre $\beta(p)$ augmente au fil des décodages.

3 Choix des coefficients alpha et beta

3-1 Coefficients prédéterminés

Les paramètres $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont déterminés expérimentalement de manière à atteindre un taux d'erreurs spécifié, en un minimum d'itérations. Pour obtenir les meilleures performances, il faudrait systématiquement optimiser les coefficients $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ pour chaque rapport signal à bruit, chaque code et modulation et tenir compte du canal de transmission. D'un point de vue pratique, il est toujours très difficile de choisir le jeu « optimal » de paramètres. La normalisation de la matrice $\mathbf{W}$ des informations extrinsèques permet parfois de réduire l'influence des paramètres $\alpha(p)$ et $\beta(p)$. Le même jeu de coefficients prédéterminés, et optimisés pour un code particulier, peut alors être utilisé pour plusieurs codes.

3-2 Coefficients adaptatifs

Le fait de fixer a priori les valeurs des paramètres $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ ne garantit pas d'obtenir les meilleures performances possibles dans toutes les circonstances. C'est pourquoi, il est intéressant d'introduire des paramètres « adaptatifs ».

3-2-1 Evaluation du paramètre alpha

Dans la mesure où le terme w_j apporte une information supplémentaire sur la décision d_j, il peut être modélisé par :

$$w_j = d_j + b_{w_j} \tag{9}$$

où b_{w_j} est un bruit blanc, centré, gaussien, de variance σ_w^2, généré par le dernier décodeur, indépendant du bruit b_j généré sur le canal. Le décodeur suivant prend une décision à partir du vecteur des fiabilités $\mathbf{R}'$ initialement reçu, et du vecteur $\mathbf{W}$ des informations extrinsèques délivrées par le dernier décodeur. La fiabilité de la décision d_j en sortie du décodeur p est maintenant définie par :

$$r'_{d_j}(p) = \frac{\sigma^2}{2} \ln \frac{\Pr\left[d_j = +1 / \mathbf{R}', \mathbf{W}(p-1)\right]}{\Pr\left[d_j = -1 / \mathbf{R}', \mathbf{W}(p-1)\right]} \quad (10)$$

On peut montrer [Pi98] que $r'_{d_j}(p)$ est de la forme :

$$r'_{d_j}(p) = \left[r'_j + \frac{\sigma^2}{\sigma_w^2(p-1)} w_j(p-1) \right] + w_j(p) \quad (11)$$

où le terme entre crochets représente l'entrée pondérée du décodeur p, c'est-à-dire :

$$r'_j(p) = r'_j + \frac{\sigma^2}{\sigma_w^2(p-1)} w_j(p-1) \quad (12)$$

Par analogie entre les expressions (6) et (12), on déduit que le paramètre $\alpha(p)$ est proportionnel au rapport des variances $\sigma^2 / \sigma_w^2(p-1)$. En réalité, si on utilise pour $\alpha(p)$ simplement ce rapport de variance, les valeurs de $\alpha(p)$ restent très faibles, généralement inférieures à 0,7 c'est-à-dire trop faibles pour obtenir de bons résultats. Par contre, l'expression suivante conduit à de bonnes performances du turbo décodeur :

$$\alpha(p) = p \frac{\sigma^2}{\sigma_w^2(p-1)} \quad (13)$$

Soulignons que $\alpha(p)$ dépend ainsi du nombre p de décodages effectués, du rapport signal à bruit et de la modulation puisque la relation liant σ^2 à E_b / N_0 dépend de la modulation. Dans l'expression (13), le code élémentaire intervient au niveau de la variance σ_w^2, qui diminue pour les faibles rendements de codage.

3-2-2 Evolution du paramètre beta

Pour estimer l'information extrinsèque par l'expression (8) plusieurs interprétations du paramètre $\beta(p)$ ont été envisagées :

- cas 1 : $\beta(p) = 0 \ \forall\, p$; aucune information extrinsèque n'est utilisée si le décodeur n'est pas capable d'en calculer la valeur exacte (à partir de l'expression (7)) ;
- cas 2 : $\beta(p) = 0,5 \ \forall\, p$; la valeur de w_j est une valeur moyenne qui permet un changement éventuel de la décision d_j ;
- cas 3 : $\beta(p) = 1 \ \forall\, p$; la décision d_j est fortement confirmée car tous les mots de code les plus vraisemblables ont une composante en position j égale à d_j ;
- cas 4 : pour les composantes d_j sans concurrent de signe opposé, le mot de code considéré comme concurrent est le mot de code $\mathbf{C}^2$ le plus vraisemblable après $\mathbf{D}$. Dans ce cas, w_j est évaluée par l'expression (7) où $\mathbf{C}^c = \mathbf{C}^2$;
- cas 5 : $\beta(p)$ évolue linéairement en fonction du nombre p de décodages effectués et du nombre maximal d'itérations IT fixé a priori :

$$\beta = \frac{p}{IT} \quad (14)$$

La figure 1 permet de comparer les résultats obtenus avec ces 5 approches pour le code produit $[BCH(64,57)]^2$, associé à une modulation MAQ16, sur un canal gaussien. Le paramètre $\alpha(p)$ est évalué par l'expression (13). Ces courbes de Taux d'Erreurs Binaires (TEB) en fonction du nombre de décodages p sont comparées à celle que l'on obtient à partir des coefficients prédéterminés choisis pour ce code, et présentés dans le tableau 1.

Tableau 1 - Valeurs prédéterminées des paramètres α et β

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha(p)$	0	0,5	0,7	0,9	1	1	1	1
$\beta(p)$	0,2	0,3	0,5	0,5	0,9	1	1	1

Selon la modélisation du paramètre β, les performances sont médiocres, moyennes ou excellentes. Il apparaît clairement que, si le décodeur n'est pas capable d'évaluer de manière exacte l'information extrinsèque, il est nécessaire d'estimer w_j à partir de l'expression (8) avec un coefficient β différent de 0. Les meilleures performances sont obtenues pour des valeurs de β (et donc de w_j) différentes d'un décodage au suivant et évoluant linéairement avec p.

3-2-3 Influence du canal de transmission

Pour un nombre d'itérations fixé à 4, les performances obtenues en utilisant les expressions (13) et (14) pour α et β conduisent à de bonnes performances sur un canal gaussien. Ces mêmes expressions sont mal adaptées dans le cas d'un canal de Rayleigh, comme l'illustre la figure 2. Les valeurs du coefficient α restent très faibles. L'influence de l'information extrinsèque w_j à l'entrée du décodeur reste trop faible par rapport à celle de la fiabilité r'_j qui, elle, est affectée d'atténuation de Rayleigh. Pour améliorer les résultats, il faut imposer une valeur minimale de α égale à 0,5. Sur canal de Rayleigh, le paramètre α sera donc évalué à partir de l'expression :

$$\alpha(p) = \max\left(0,5 \, ; \, p \frac{\sigma^2}{\sigma_w^2(p-1)} \right) \quad (15)$$

Le coefficient β est toujours évalué par l'expression (14). Dans ces conditions, au bout de 4 itérations, le TEB est réduit d'un facteur 10 environ par rapport au cas où les coefficients prédéterminés du tableau 1 sont utilisés.

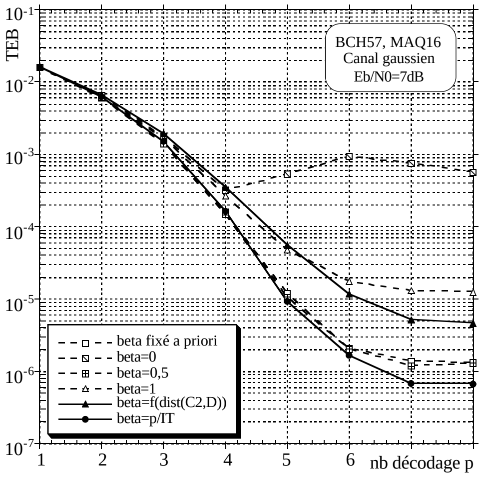

Figure 1 Performances du turbo décodeur pour plusieurs valeurs de β

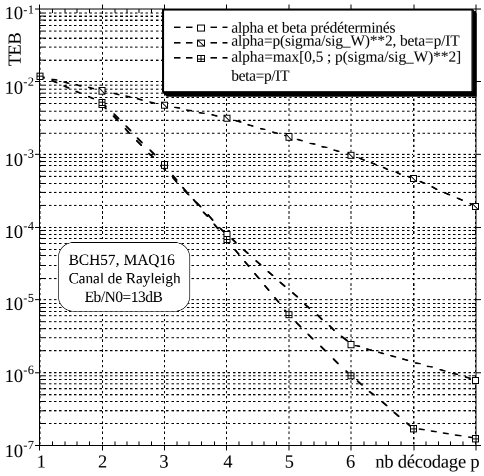

Figure 2 Influence des paramètres α et β sur les performances du turbo décodeur sur canal de Rayleigh

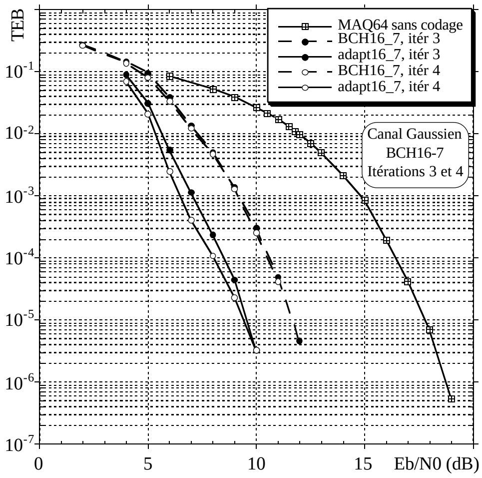

Figure 3 Comparaison du TEB aux itérations 3 et 4 avec des coefficients adaptatifs, puis prédéterminés

3-2-4 Comparaison des résultats pour un code court

Par rapport à l'algorithme utilisant des coefficients prédéterminés, l'algorithme adaptatif apporte un gain de codage d'autant plus important que le code est court. Ainsi, pour le code $[BCH(16,7)]^2$ de la figure 3, le gain de codage aux itérations 3 et 4 est de l'ordre de 2 dB pour un TEB de 10^{-5}. Ce gain est obtenu en prenant pour référence le cas des coefficients prédéterminés du tableau 1. Ces coefficients ont été optimisés pour le code $[BCH(64,57)]^2$ mais pas pour le code $[BCH(16,7)]^2$. Ce gain important montre clairement qu'il est nécessaire d'adapter le jeu de coefficients à chaque code produit. En utilisant les coefficients adaptatifs, le décodage du code $[BCH(64,57)]^2$ nécessite 1 ou 2 décodages de moins qu'avec les coefficients prédéterminés pourtant optimisés pour ce code précisément [Pi98].

4 Conclusion

Le problème le plus important du turbo décodage des codes produits se situe au niveau de la détermination du jeu de paramètres α et β. L'optimisation expérimentale des coefficients n'est pas envisageable à grande échelle du fait de la difficulté et du temps nécessaire à la procédure. Il est donc intéressant d'estimer ces paramètres de manière adaptative en fonction de grandeurs qui dépendent du code, de la modulation, du canal de transmission et du nombre de décodages. L'approche proposée ici apporte un gain de codage assez important (jusqu'à 2 dB) pour les codes courts et permet de diminuer le nombre de décodages de 1 ou 2 dans le cas des codes longs, ceci pour une complexité accrue. L'optimisation conjointe des paramètres adaptatifs devrait apporter une amélioration supplémentaire.

Références

[Ch72] D. Chase, A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 170-182, Jan 1972.

[Pi98] A. Picart, Concaténation de codes et décodage itératif, Application des turbo codes produits aux transmissions à forte efficacité spectrale, Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes1, Décembre 1998.

[Py94a] R.Pyndiah, A. Glavieux, A. Picart, S. Jacq. Near Optimum decoding of product codes, IEEE Proc. of GLOBECOM'94, San Francisco, Nov 1994.