

Tomographie 2D locale en géométrie divergente par une approche ondelettes non séparables

Stéphane BONNET¹, Françoise PEYRIN^{1,2}, Rémy PROST¹

¹CREATIS, CNRS UMR 5515, INSA 502
69621 Villeurbanne Cedex, France

²ESRF, BP220, 38043 Grenoble Cedex, France

bonnet@creatis.insa-lyon.fr, peyrin@esrf.fr, prost@creatis.insa-lyon.fr

Résumé – Les ondelettes offrent de nouvelles perspectives en tomographie locale. Cette technique permet de réduire la dose de radiation administrée au patient sans compromettre la qualité de la région d'intérêt reconstruite.

Dans cette communication, nous proposons une formule analytique reliant les coefficients d'ondelettes de l'image à ses projections divergentes. Son application à la reconstruction locale est également présentée.

Abstract – Wavelets in Computerized Tomography has lead to new developments in Local Tomography. This approach allows to reduce radiation exposure without degrading the image quality of the reconstructed region.

In this communication, we propose an explicit formula to compute the wavelet coefficients of an image from its fanbeam projections. The application to Local Tomography is demonstrated as well.

1 Introduction

En tomographie X, une coupe anatomique du patient est reconstruite à partir d'un grand nombre de mesures d'atténuation d'un faisceau de rayons X. Il est établi, qu'en utilisant les méthodes classiques de reconstruction tomographique, la reconstruction d'une région d'intérêt (i.e. ROI) nécessite toutes les projections de l'image et non pas exclusivement celles de la ROI. Récemment, l'utilisation des ondelettes en tomographie a permis de surmonter cette limitation [1],[2],[3]. Ces méthodes se basent sur la propriété de certaines ondelettes à localiser la Transformée de Radon et permettent donc de reconstruire une région d'intérêt à partir essentiellement de projections locales. Cependant, ces algorithmes ont été développés pour une géométrie d'acquisition parallèle alors que la plupart des scanners X cliniques utilisent une source divergente de rayons X. A ce jour, la seule adaptation d'algorithmes multirésolution à des données divergentes a consisté à réorganiser les données en un ensemble de projections parallèles [4].

Dans cet article, nous proposons une formule analytique de reconstruction multirésolution directement adaptée aux projections divergentes. Cette approche repose sur l'emploi d'ondelettes non séparables radiales et relie les coefficients d'ondelettes de l'image à ses projections éventail. Un algorithme multirésolution similaire à la méthode standard de reconstruction 2D divergente (i.e. Rétroprojection Filtrée) est ainsi proposé. Son application à la reconstruction locale est également décrite.

Dans la suite, les caractères gras minuscules et majuscules correspondent respectivement à des vecteurs 2D et des matrices.

2 Formule directe de reconstruction

2.1 Analyse Multirésolution 2D

Une Analyse Multirésolution (i.e. AMR) 2D de $L^2(\mathbb{R}^2)$ se caractérise par le choix d'une matrice de dilatation $\mathbf{D} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, une fonction d'échelle Φ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et un ensemble d'ondelettes $\{\Psi^i \in L^2(\mathbb{R}^2), i = 1 \dots (|\det \mathbf{D}| - 1)\}$. Ce formalisme permet de définir l'ensemble des versions dilatées et translatées de Φ par [5] :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{D}|^{-\frac{j}{2}} \Phi(\mathbf{D}^{-j} \mathbf{x} - \mathbf{k}), j \in \mathbb{Z}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

L' AMR 2D consiste à décomposer successivement le signal 2D suivant un terme d'approximation et $(|\det \mathbf{D}| - 1)$ termes de détails à chaque résolution.

Notons $W_{\mathbf{D},j}(\Phi; f)(\mathbf{n})$ les coefficients d'approximations de f à la résolution j et $W_{\mathbf{D},j}(\Psi^i; f)(\mathbf{n})$ les coefficients d'ondelettes de la fonction f . Cette décomposition est obtenue en appliquant au signal f un banc de filtres, séparables ou non séparables, possédant, en particulier, les propriétés de reconstruction parfaite du signal à partir de ces coefficients.

Le signal 2D est généralement décomposé sur des bases d'ondelettes séparables par produits tensoriels en fixant $\mathbf{D}_S = 2 \mathbf{I}$ [6]. Cette approche permet de préserver la plupart des propriétés des ondelettes 1D comme la reconstruction parfaite, la régularité... Elle a trouvé de nombreuses applications en traitement d'images [7] du fait de la simplicité de sa mise en oeuvre et de la faible complexité du calcul. Néanmoins, l'emploi d'ondelettes séparables privilégie certaines directions dans l'image (horizontales, verticales et diagonales) ce qui peut être une limitation en tomographie où la géométrie d'acquisition est circulaire.

Un traitement réellement 2D est possible avec l'emploi d'ondelettes quinconces qui offrent plus de flexibilité dans l'analyse multirésolution, plus de degrés de liberté dans la synthèse des filtres et respectent mieux le système visuel humain [5]. La matrice de dilatation est alors donnée par $\mathbf{D}_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les ondelettes non séparables quinconces permettent d'analyser un signal 2D à une résolution intermédiaire (i.e. $\mathbf{D}_Q^2 = \mathbf{D}_S$) et peuvent être construites efficacement en utilisant la transformation de McClellan appliquée à un banc de filtres 1D [8].

2.2 Tomographie 2D multirésolution

Dans un travail antérieur [3], nous avons établi que les coefficients d'approximations d'une image f peuvent être exprimés à partir de ses projections parallèles $\mathcal{R}_\theta f(t)$ par :

$$\begin{cases} W_{\mathbf{D}^j}(\Phi; f)(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{D}^j \mathbf{x}) & \text{avec } \mathbf{x} = (x, y)^t. \\ \mathcal{B}(x, y) = \int_{-t_m}^{\pi} \int_{-t_m}^{\pi} \mathcal{R}_\theta f(t) h_{\theta, j}(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \\ \text{avec } h_{\theta, j} = \Lambda \mathcal{R}_\theta \tilde{\Phi}_{j, 0}. \end{cases} \quad (2)$$

où \mathcal{R} représente l'opérateur de la Transformée de Radon et Λ l'opérateur Lambda, défini dans le domaine de Fourier par $(\Lambda p)(\omega) = |\omega| \times \hat{p}(\omega)$.

Les coefficients sont donc obtenus en rétroprojetant sur une grille de points définie par la matrice \mathbf{D} le résultat de la convolution entre la projection parallèle $\mathcal{R}_\theta f$ et le filtre rampe modifié $h_{\theta, j}$. Ce filtre dépend à présent de l'angle θ , de la résolution souhaitée j et de l'ondelette Φ .

Cette formule est l'analogie multirésolution de la formule de reconstruction par rétroprojection filtrée [9] :

$$f(x, y) = \int_{-t_m}^{\pi} \int_{-t_m}^{\pi} \mathcal{R}_\theta f(t) k(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \quad (3)$$

où t_m est défini par $\mathcal{R}_\theta f(t) = 0$ pour $|t| > t_m \forall \theta$ et k désigne le kernel du filtre rampe.

Pour le choix $\mathbf{D}_S = 2 \mathbf{I}$ dans (2), on retrouve la formule proposée en [2] pour des ondelettes séparables. On calcule de la même façon les ($|\det \mathbf{D}| - 1$) coefficients d'ondelettes de la fonction f à partir des projections parallèles $\mathcal{R}_\theta f$ en substituant dans (2) la fonction Ψ^i à Φ .

Une étape de filtrage est ensuite nécessaire pour reconstruire la fonction f à partir des coefficients d'approximations et d'ondelettes ainsi obtenus : cette synthèse est mise en oeuvre par l'emploi d'un banc de filtres avec un schéma pyramidal [6] [voir Fig. (2)].

2.3 Géométrie 2D divergente

La figure 1 illustre la géométrie divergente à détecteurs plan et précise les notations utilisées par la suite. La projection divergente $R_\beta(s)$ est paramétrée par s , la distance depuis l'origine sur l'axe \mathcal{D}' , et β , l'angle que fait la source avec l'axe Oy. On réalise un échantillonnage régulier du domaine (β, s) sur $[0, 2\pi[\times [-s_m, s_m]$ et on cherche à reconstruire la fonction f , supposée à support compact, à partir de l'ensemble des projections divergentes ainsi obtenues.

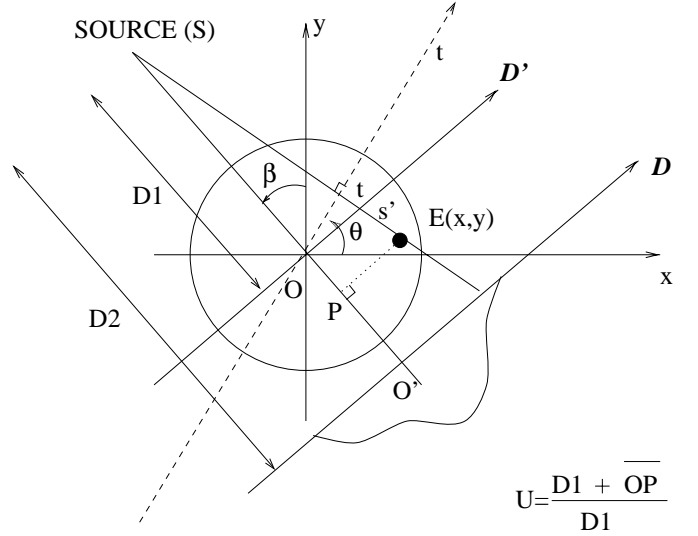


FIG. 1: Faisceau divergent

Une projection éventail $R_\beta(s)$ coïncide avec la projection parallèle $\mathcal{R}_\theta f(t)$ si les paramètres (θ, t) et (s, β) sont liés par les relations : $\theta = \beta + \arctan \frac{s}{D_1} = \beta + \gamma(s)$ et $t = \frac{s}{\sqrt{D_1^2 + s^2}}$.

Si l'on effectue ce changement de variable dans l'équation (2), et si on exprime le point que l'on cherche à reconstruire en coordonnées polaires ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$), il vient :

$$\mathcal{B}(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \frac{D_1^3}{(D_1^2 + s^2)^{3/2}} R_\beta(s) h_{\beta + \gamma(s), j} \left(r \cos(\beta + \gamma(s) - \phi) - \frac{s}{\sqrt{D_1^2 + s^2}} \right) ds d\beta. \quad (4)$$

On introduit deux nouvelles variables \mathcal{U} et s' :

$$\mathcal{U} = \frac{D_1 + r \sin(\beta - \phi)}{D_1}, \quad s' = \frac{r \cos(\beta - \phi)}{\mathcal{U}} \quad (5)$$

L'équation (4) devient alors :

$$\mathcal{B}(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} \frac{D_1^3}{(D_1^2 + s^2)^{3/2}} R_\beta(s) h_{\beta + \gamma(s), j} \left(\frac{\mathcal{U} D_1}{\sqrt{D_1^2 + s^2}} (s' - s) \right) ds d\beta. \quad (6)$$

Pour chaque pixel (x, y) que l'on cherche à reconstruire, \mathcal{U} désigne le rapport entre $\overline{SO} + \overline{OP}$ et la distance source-origine alors que s' désigne la valeur de s pour le rayon passant par ce pixel (voir Fig. 1).

Nous faisons à présent les deux hypothèses suivantes :

- L'ondelette Ψ et la fonction d'échelle Φ sont radiales. La transformée de Radon de ces fonctions est donc indépendante de l'angle et on obtient le filtre rampe modifié $h_{\theta, j} = h_j^{rad} = \Lambda \mathcal{R}_\theta \tilde{\Phi}_{j, 0}$

- De plus, on impose la condition :

$$\frac{\mathcal{U} D_1}{\sqrt{D_1^2 + s^2}} \simeq 1. \quad (7)$$

Cette condition est vérifiée pour tout objet de taille très inférieure à la distance source-origine ce qui est généralement le cas en pratique. Du fait de la propriété du filtre

rampe $k(at) = \frac{1}{a^2}k(t)$, on a la simplification :

$$h_j^{rad} \left(\frac{UD_1}{\sqrt{D_1^2 + s^2}}(s' - s) \right) \simeq \frac{D_1^2 + s^2}{U^2 D_1^2} h_j^{rad}(s' - s) \quad (8)$$

qui peut être substituée dans (6).

Il est ainsi possible d'obtenir une formule approchée reliant directement les coefficients d'ondelettes de f à ses projections éventail $R_\beta(s)$. Cette formule est alors donnée pour le choix d'une ondelette radiale Φ^{rad} par :

$$\begin{cases} W_{\mathbf{D}^j}(\Phi^{rad}, f)(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{D}^j \mathbf{x}) & \text{avec } \mathbf{x} = (x, y)^t. \\ \mathcal{B}(x, y) \simeq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-sm}^{sm} R_\beta(s) h_j^{rad}(s' - s) \frac{D_1}{\sqrt{(D_1^2 + s^2)}} ds d\beta \end{cases} \quad (9)$$

L'équation (9) est l'analogie multirésolution de la formule de reconstruction en géométrie 2D divergente.

3 Applications

3.1 Reconstruction Multirésolution en Géométrie divergente

Pour la mise en oeuvre de la formule (9), nous choisissons d'utiliser la matrice de dilatation quinconce \mathbf{D}_Q .

Désignons par $\{\mathbf{H}, \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{G}}\}$ le banc de filtres 2D associé à une AMR 2D biorthogonale $\{\Phi, \tilde{\Phi}, \Psi, \tilde{\Psi}\}$ [3]. Le schéma d'une AMR 2D quinconce est montré à la figure 2 pour un seul niveau de résolution. Ainsi, on décompose, à chaque résolution, le signal 2D en une composante basse fréquence et une haute fréquence ($|\det \mathbf{D}_Q| = 2$).

Ces filtres 2D sont générés par la transformation de McClellan appliquée aux filtres 1D symétriques $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ d'une AMR 1D. Cette transformation permet de construire des filtres 2D avec des réponses fréquentielles de forme circulaire ou diamant [8].

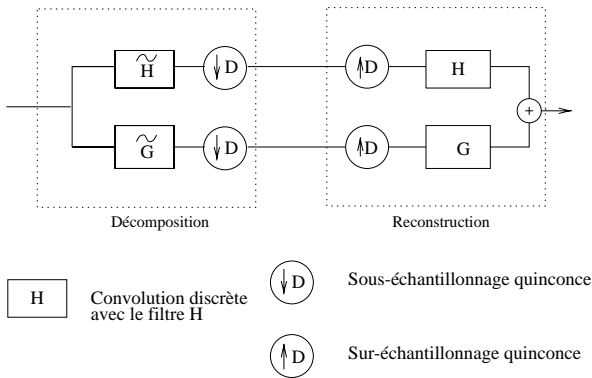


FIG. 2: Banc de Filtres 2D Décomposition/Reconstruction

La transformation sera choisie de façon à préserver le nombre de moments nuls des filtres 1D initiaux. En effet, les ondelettes et les fonctions d'échelles possédant un nombre suffisant de moments nuls sont nécessaires pour localiser la Transformée de Radon et éviter la discontinuité en $\omega = 0$ introduite par l'opérateur Lambda. Cette observation rend possible la tomographie locale par une approche multirésolution [1], [2].

Dans le cas d'une matrice \mathbf{D} quinconce, la transformation de McClellan qui conduit à des filtres à reconstruction parfaite génère des filtres en « diamant » qui approchent les filtres radiaux demandés dans (9). De plus, ils préservent le nombre de moments nuls de l'ondelette 1D.



FIG. 3: Fantôme de Shepp-Logan

Nous présentons par la suite des simulations sur le fantôme mathématique de Shepp-Logan, montré à la figure 3. Cette image de $256 * 256$ pixels est reconstruite à partir de 256 incidences équiréparties sur 360 degrés avec 256 points par projection. L'angle du faisceau divergent est de 10° . La distance source-centre de rotation est 750 mm et la distance source-détecteur est fixée à 1100 mm.

On choisit comme ondelettes biorthogonales 1D les « near coiflet » (table III dans [7]) pour leur grand nombre de moments nuls aussi bien pour la fonction d'échelle que l'ondelette et donc leurs bonnes propriétés de localisation de la Transformée de Radon [2].

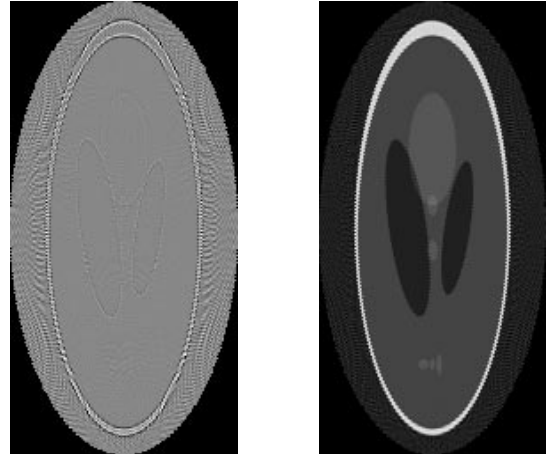


FIG. 4: (a) Coefficients d'ondelettes quinconces (b) Coefficients d'approximations quinconces

La figure (4.a) montre les coefficients d'ondelettes et la figure (4.b) les coefficients d'approximations du phantôme obtenus par la formule (9). Du fait que les deux sous-images correspondent à la décomposition à la résolution $\sqrt{2}$, nous les réorganisons de manière plus compacte suivant les lignes pour visualiser toute l'information.

La figure 5 montre l'image obtenue après le sur-échantillonnage quinquonce et le filtrage par les filtres de synthèse 2D $\{\mathbf{H}, \mathbf{G}\}$ [voir Fig. (2)].

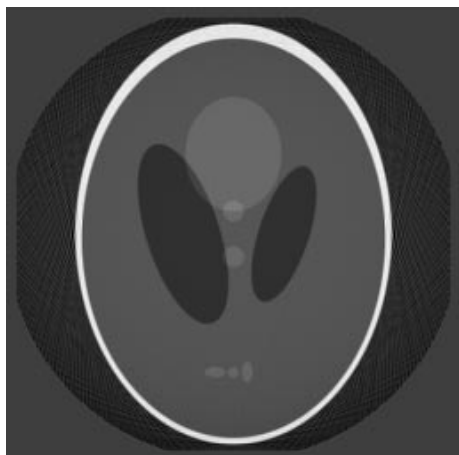


FIG. 5: Image reconstruite par Rétroprojection Filtrée Multirésolution Divergente

Nous observons que la qualité de reconstruction est comparable à celle obtenue par la méthode rétroprojection filtrée standard en géométrie divergente. Si on augmente la divergence du faisceau en rapprochant la source de l'origine, on montre que l'erreur de reconstruction croît légèrement mais l'image reconstruite reste d'une qualité visuelle acceptable.

3.2 Tomographie locale

Pour illustrer la possibilité de tomographie locale par notre méthode, nous avons choisi une ROI centrée de rayon 32 pixels augmentée d'une marge de 12 pixels. Cette marge supplémentaire permet de prendre en compte le support des filtres de reconstruction et augmente avec l'angle de divergence.

La figure (6.a) montre la reconstruction locale de la ROI avec le choix d'une ondelette radiale et la figure (6.b) illustre une reconstruction locale pour le choix d'une ondelette en « diamant ». Le banc de filtres n'étant pas à reconstruction exacte dans le cas circulaire produit l'aspect lissé de la ROI alors que la reconstruction est de meilleure qualité pour la transformation diamant.

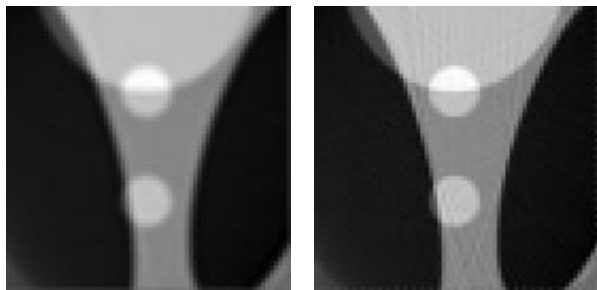


FIG. 6: (a) Reconstruction locale dans le cas circulaire, (b) Reconstruction locale dans le cas diamant

La reconstruction locale est de très bonne qualité. On vérifie que celle-ci se dégrade légèrement si on augmente la ROI du fait que l'approximation (7) n'est plus valide. De plus, la reconstruction présente un offset (i.e. décalage en niveau de gris) constant dans la ROI si la quantité d'information supplémentaire est suffisante.

4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons établi une méthode de reconstruction multirésolution en géométrie 2D divergente. Cette méthode se base sur l'emploi d'ondelettes non séparables radiales.

Ce travail montre que la reconstruction d'une ROI à partir de ses projections divergentes locales est également possible. Cette méthode permet potentiellement de réduire l'exposition du patient sans compromettre la qualité de reconstruction de la région d'intérêt et de diminuer le temps de reconstruction.

Remerciements

Ce travail est financé par la Société SIEMENS FRANCE.

Références

- [1] A.H. Delaney and Y. Bresler. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(6) :799–813, june 1995.
- [2] F. Rashid-Farrokhi, K.J.R. Liu, C.A. Berenstein, and D. Walnut. Wavelet-based multiresolution local tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(10) :1412–1430, october 1997.
- [3] S. Bonnet, F. Peyrin, and R. Prost. Tomographic reconstruction using nonseparable wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, december 1998. submitted.
- [4] F. Rashid-Farrokhi, K.J.R. Liu, and C.A. Berenstein. Local tomography in fan-beam geometry using wavelets. In *IEEE Intern. Conf. Image Proc.*, pages 709–712, 1996.
- [5] J. Kovačević and M. Vetterli. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n . *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :533–555, march 1992.
- [6] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :674–693, july 1989.
- [7] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(2) :205–220, april 1992.
- [8] J.H. McClellan. The design of two-dimensional digital filters by transformations. In *Proc. 7th Annual Princeton Conf. Inform. Sci. and Systems*, pages 247–251, 1973.
- [9] A.C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, 1987.