

# Nouvelles fonctions de collage pour les schémas de compression d'images par IFS

Guillaume ROBERT<sup>1</sup>, Nathalie LAURENT<sup>1</sup>, Jean-Marc CHASSERY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>France Telecom - CNET / DIH, CCETT  
4, rue du Clos Courtel, 35512 Cesson Sevigne, France

<sup>2</sup>Equipe Infodis / TIMC  
Grenoble, France

Guillaume.Robert@imag.fr, Nathalie.Laurent@cnet.francetelecom.fr  
Jean-Marc.Chassery@imag.fr

**Résumé** — Dans cet article, nous présentons un développement du schéma classique de compression d'images en niveaux de gris par IFS. Nous proposons une amélioration des fonctions de collage traditionnellement utilisées afin d'en accroître les performances sur les zones à contenu haute fréquence. Pour cela, nous introduisons des fonctions harmoniques ainsi qu'une nouvelle méthode de résolution du problème inverse.

**Abstract** — In this paper, we present an evolution of IFS-based image compression schemes, well adapted to high frequency contents. We propose to substitute the usual affine mass map which tends to smooth irregular surfaces, by an harmonic based map. This change implies the creation of a new IFS determination algorithm for solving the inverse problem.

## 1 Introduction

Aussi contradictoire que cela puisse paraître, les codeurs fractals descendant des travaux de Jacquin[6] souffrent d'un manque de robustesse pour le traitement des zones fortement texturées [13]. En réalité, certains travaux ont montré qu'il est possible d'appréhender fidèlement une large classe de textures, mais reposent sur l'hypothèse forte que celles-ci sont fractales [8]. Malheureusement les textures naturelles ne possèdent généralement pas cette propriété d'auto-similarité sur laquelle repose les méthodes par IFS.

Différentes directions ont été explorées afin d'améliorer les performances des IFS sur les surfaces chaotiques. Parmi les premières idées, on peut souligner l'utilisation de partitions adaptatives qui visent à créer des petits blocs sur les zones riches et de larges blocs sur les zones homogènes. Davoine présente dans [5] un résumé des différents types de partitions utilisés pour résoudre le problème inverse: quadtree, HV, triangulaire, polygonale, régions complexes.

Une autre voie pour l'amélioration des performances des IFS, est l'hybridation avec d'autres méthodes de traitement d'image. Ces schémas hybrides, fournissent de très bons résultats car ils tirent partie des avantages des deux méthodes. Parmi les différentes hybridations on peut noter IFS-DCT [1] [12], IFS-sous bande [2] [7], IFS-QV [11] [4].

Comparées aux autres éléments de la chaîne de codage par IFS, les fonctions de collage n'ont pas été réellement étudiées et demeurent la plupart du temps des fonctions

affines. Afin de contourner un problème d'emboîtement des blocs sources et destinations, Monro propose dans [10] l'utilisation de fonctions de collage polynomiales. Plus récemment Lutton introduit dans [9] des fonctions de collage définies par des arbres de fonctions et recourt à la programmation génétique pour résoudre le problème inverse ainsi devenu très complexe.

Considérant les textures comme la bête noire des IFS, nous proposons une nouvelle famille de fonctions de collage remplaçant avantageusement les fonctions affines: les fonctions harmoniques. Cette approche peut être vue comme une sorte d'hybridation IFS-DCT, mais avec l'avantage d'une optimisation conjointe des paramètres des deux méthodes.

Dans la section 2 nous proposons une formulation mathématique des fonctions de collage harmoniques. Dans la section 3 nous exposons un processus de résolution du problème inverse posé à l'aide de ces fonctions. Nous présenterons les résultats dans la section 4 puis concluons dans la section 5 sur les améliorations à venir.

## 2 Collage massique harmonique

Afin d'accorder un intérêt plus marqué aux hautes fréquences, nous introduisons une nouvelle famille de fonctions de collage massique appelées fonctions harmoniques. Celles ci s'appliquent aux blocs source décimés  $\bar{D}^{\alpha(i)}$  par une des méthodes antécédentes connues: dans un dictionnaire issu de l'image elle même on sélectionne un bloc source  $\mathcal{D}^{\alpha(i)}$  auquel on applique une transformation spa-

tialement contractante  $\omega_S^{\alpha(i)}$  dont le support des images est le support du bloc destination  $\mathcal{R}^i$  à approximer [3][5].

L'expression d'une fonction de collage massique harmonique  $\omega_M^{\alpha(i)}$  appliquée au bloc décimé  $\bar{\mathcal{D}}^{\alpha(i)}$  afin de générer le bloc  $\hat{\mathcal{R}}^{\alpha(i)}$  approximant le bloc destination  $\mathcal{R}^i$  est donnée pour un pixel  $p$  par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_p^{\alpha(i)} &= \omega_M^{\alpha(i)}(\bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)}) \\ &= b + \sum_{k \in [0..N_c[} \sum_{l \in [0..N_c[} c_{kl}^{\alpha(i)} \times \bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)} \times \\ &\quad \cos(\theta_k \times p_x) \times \cos(\theta_l \times p_y) \end{aligned} \quad (1)$$

Où  $b \in \mathbb{Z}$  représente l'*offset*,  $\theta_l = \frac{2\pi}{2^{l+\delta}}$  avec  $l \in [0..N_S[$  représentent les pulsations fixées et associées à chaque fonction de base avec un décalage  $\delta \in \mathbb{N}$ ,  $(p_x, p_y) \in \mathbb{N}^2$  représente la position relative du pixel  $p$  dans  $\bar{\mathcal{D}}^{\alpha(i)}$  et  $c^{\alpha(i)} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$  représente la matrice des amplitudes des fonctions de base.

Le nouvel objectif consiste donc à déterminer les valeurs  $c_{kl}^{\alpha(i)}$  et  $b$  qui minimisent l'erreur de collage  $E^{\alpha(i)}$  entre  $\hat{\mathcal{R}}^{\alpha(i)}$  et  $\mathcal{R}^i$ . L'erreur choisie est la distance  $L^2$  entre les deux blocs :

$$\begin{aligned} E^{\alpha(i)} &= \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} (\mathcal{R}_p^i - \hat{\mathcal{R}}_p^{\alpha(i)})^2 \\ &= \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} (\mathcal{R}_p^i - \omega_M^{\alpha(i)}(\bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)}))^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Des équations 1 et 2 découle l'expression de l'erreur d'un collage harmonique :

$$E^{\alpha(i)} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} \left( \left( \sum_{k \in [0..N_c[} \sum_{l \in [0..N_c[} c_{kl}^{\alpha(i)} \times \bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)} \times \cos(\theta_k \times p_x) \times \cos(\theta_l \times p_y) \right) - \mathcal{R}_p^i \right)^2 \quad (3)$$

### 3 Résolution du problème inverse

La détermination des coefficients  $c_{kl}^{\alpha(i)}$  et  $b$  minimisant l'erreur de collage  $E^{\alpha(i)}$ , est obtenue par annulation de sa dérivée par rapport à  $c_{kl}^{\alpha(i)}$  et  $b$ . Cela se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial E^{\alpha(i)}}{\partial c_{00}^{\alpha(i)}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial E^{\alpha(i)}}{\partial c_{N_c-1N_c-1}^{\alpha(i)}} = 0 \\ \frac{\partial E^{\alpha(i)}}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Après simplifications, 4 peut se réécrire comme une équation linéaire matricielle :

$$A \times X = B \quad (5)$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} A_{00}^{00} & \cdots & A_{0N_c-1}^{00} & A_{10}^{00} & \cdots & A_{N_c0}^{00} \\ \vdots & & & & & \\ A_{00}^{0N_c} & & & & & \\ A_{00}^{1N_c} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ A_{00}^{N_c0} & \cdots & A_{0N_c-1}^{N_c0} & A_{10}^{N_c0} & \cdots & A_{N_c0}^{N_c0} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} B_{00} \\ \vdots \\ B_{N_c-1N_c-1} \\ B_{N_c-1N_c} \end{pmatrix}$$

En introduisant la fonction  $\psi_p^{kl} = \cos(\theta_k \times p_x) \times \cos(\theta_l \times p_y)$ , les coefficients de la matrice connue  $A \in \mathcal{M}^{N_c^2+1}(\mathbb{R})$  deviennent :

$$\begin{cases} A_{mn}^{kl} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} (\bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)})^2 \times \psi_p^{mn} \times \psi_p^{kl}, \\ \quad \forall k \in [0..N_c[, \forall l \in [0..N_c[, \\ \quad \forall m \in [0..N_c[, \forall n \in [0..N_c[ \\ A_{mn}^{N_cN_c} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} \bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)} \times \psi_p^{mn}, \\ \quad \forall m \in [0..N_c[, \forall n \in [0..N_c[ \\ A_{N_c0}^{kl} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} \bar{\mathcal{D}}_p^{\alpha(i)} \times \psi_p^{kl}, \\ \quad \forall k \in [0..N_c[, \forall l \in [0..N_c[ \\ A_{N_c0}^{N_cN_c} = \text{card}(\mathcal{R}^i) \end{cases}$$

et les coefficients du vecteur connu  $B \in \mathbb{R}^{N_c^2+1}$  deviennent :

$$\begin{cases} B_{kl} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} \bar{\mathcal{D}}_{\beta(p)}^{\alpha(i)} \times R_p \psi_p^{kl}, \\ \quad \forall k \in [0..N_c[, \forall l \in [0..N_c[ \\ B_{N_c-1N_c} = \sum_{p \in \text{support}(\mathcal{R}^i)} R_p \end{cases}$$

Ce système peut alors être résolu par le biais d'une factorisation  $LDL^t$ .

## 4 Résultats

Comme le montre la figure 1.c, des fonctions de collage massique basées sur des fonctions harmoniques telles que le cosinus, permettent une bonne appréhension des hautes fréquences d'une image, ce qu'un schéma IFS classique (à fonction de collage massique affine) ne parvient pas à faire, figure 1.b . D'autre part, les détails tels que la rivière de la figure 1.a, sont fidèlement restitués tout en limitant l'apport de hautes fréquences parasites.

Le temps *CPU* nécessaire à la détermination d'un IFS harmonique, est fortement dépendant du nombre de fonctions de la base harmonique. Pour une base de deux fonctions, quatre  $c_{kl}$  et  $b$  doivent être déterminés, ce qui prend environ 5 minutes pour une image  $256 \times 256$  sur un *PII350*. Ce temps passe à une heure pour une base de trois fonctions comme nécessaire pour la figure 1.c.

## 5 Conclusion

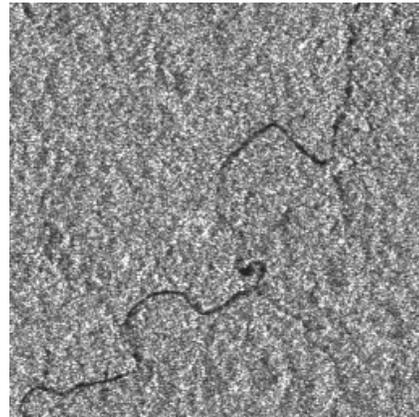
Dans cette article, non avons proposé l'utilisation de fonctions de collage massique harmoniques en remplacement des fonctions de collage massique affine généralement utilisées dans les schémas de compression d'images par IFS. L'intérêt de cette nouvelle famille de fonction est son

bon comportement en présence de bloc au contenu texturé.

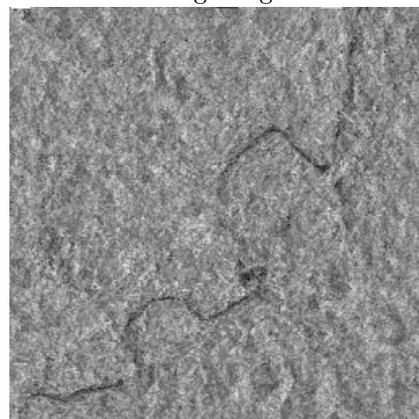
De futurs travaux viseront à réduire le surcoût en temps de calcul induit par le recours à cette famille de fonctions, au moyen d'une approche hiérarchique. La quantification des coefficients est également une étape délicate qu'une étude statistique pourra permettre d'améliorer.

## Références

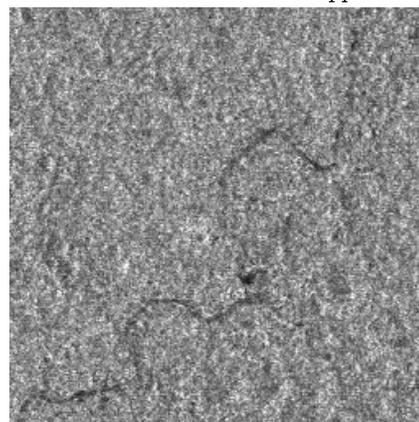
- [1] K. U. Barthel, J. Schüttemeyer, T. Voyé, and P. Noll, *A new image coding technique unifying fractal and transform coding*, IEEE International Conference on Image Processing (Austin, Texas), November 1994, pp. 112–116.
- [2] G. Davis, *Adaptive self-quantization of wavelet subtrees: a wavelet-based theory of fractal image compression*, SPIE conference on mathematical imaging: wavelet applications in signal and image processing (1995).
- [3] F. Davoine, *Compression d'images par fractales basée sur la triangulation de Delaunay*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, France (1995).
- [4] F. Davoine, M. Antonini, J.-M. Chassery, and M. Barlaud, *Fractal image compression based on Delaunay triangulation and vector quantization*, IEEE Transactions on Image Processing - Special Issue on Vector Quantization (1996).
- [5] F. Davoine, G. Robert, and J.M. Chassery, *How to improve pixel-based fractal image coding with adaptative partitions*, Fractals In Engineering (J Lévy Véhel, E. Lutton, and C. Tricot, eds.), Springer-Verlag, 1997, pp. 292–306.
- [6] A. E. Jacquin, *Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations*, IEEE Transactions on Image Processing **1** (1992), no. 1, 18–30.
- [7] H. Krupnik, D. Malah, and E. Karnin, *Fractal representation of images via the discrete wavelet transform*, IEEE 18th Conv. of EE in Israel (Tel-Aviv), March 1995.
- [8] J. Lévy-Véhel, *Texture analysis using fractal probability functions*, Tech. Report 1707, INRIA - Rocquencourt, France, 1992.
- [9] E. Lutton, J. Lévy-Véhel, G. Cretin, P. Glevarec, and C. Roll, *Mixed ifs: resolution of the inverse problem using genetic programming*, Complex Systems, vol. 5, 1995, pp. 375–398.
- [10] D. M. Monro, *Class of fractal transforms*, Electronics Letters **29** (1993), no. 4, 362–363.
- [11] M. Muller, R. Hamzaoui, and D. Saupe, *Vq-enhanced fractal image compression*, ICIP, 1996.
- [12] M. Novak, *Attractor coding of images*, Licentiate Thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University (1993).
- [13] G.E. Øien, R. Hamzaoui, and D. Saupe, *On the limitations of fractal image texture coding*, Proceedings of ICASSP.



a. Image originale



b. IFS-Affine à 0.31bpp



c. IFS-Cosinus à 0.30bpp

FIG. 1: Comparaison de notre algorithme IFS basé sur des collages massiques à fonctions harmoniques avec un algorithme IFS classique basé sur des collages massiques à fonctions affines.

