

# Approche multirésolution pour la reconstruction 3D de défaut en tomographie X

Charles SOUSSEN, Ali MOHAMMAD-DJAFARI

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-SUPÉLEC-UPS)  
Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

sousсен@lss.supelec.fr, djafari@lss.supelec.fr

**Résumé** – L’objet de ce travail est la reconstruction de la forme d’un défaut compact dans un milieu homogène en tomographie X pour des applications en contrôle non destructif. Nous modélisons la forme du défaut par un polyèdre et estimons les coordonnées de ses sommets directement à partir des projections. L’estimateur choisi est le maximum *a posteriori* et l’algorithme proposé est de type recuit simulé ou descente itérative par coordonnées. L’initialisation se fait à l’aide d’une méthode qui estime les moments géométriques de l’objet à partir des projections. Le caractère multirésolution intervient au niveau algorithmique : nous utilisons la solution obtenue à une résolution donnée comme initialisation à la résolution plus fine suivante.

**Abstract** – This work handles the 3D shape reconstruction from X-ray tomographic projection data in nondestructive testing applications. We model the shape of a homogeneous compact default in a homogeneous background by a polyhedron and estimate directly its vertices coordinates from the data. This estimation is defined as the maximum *a posteriori* (MAP) estimate, and the MAP criterion is optimized either by simulated annealing or by iterative coordinate descent techniques. The initial solution is obtained by computing the geometric moments of the object from the data. The multiresolution step is here part of the optimization process. It consists of using the solution obtained at a given resolution level as an initial solution for the following finer resolution level.

## 1 Introduction

La détection et la reconstruction tomographique de défauts homogènes compacts dans un fond homogène à partir d’un faible nombre de projections à angles limités sont des problèmes typiques du contrôle non destructif (CND). Les matériaux qui constituent les défauts et le fond étant en général connus, nous pouvons supposer sans perte de généralité, que leur densités valent 1 et 0. Le milieu se modélise alors sous la forme d’une image binaire 2D ou 3D.

Plusieurs catégories de méthodes traitent le problème de la reconstruction d’images 3D binaires avec des contours fermés. La plus classique modélise l’objet par un ensemble de voxels binaires [1] et estime ces derniers au sens du maximum *a posteriori* (MAP) en utilisant une modélisation markovienne. La fermeture des contours peut alors faire partie des informations *a priori*. D’autres méthodes proposent une reconstruction directe du contour fermé de l’objet en le modélisant comme le passage à zéro d’une fonction de dimension supérieure (méthodes dites par courbes de niveaux ou *level-set*) [2]. Enfin, il existe des méthodes qui modélisent le contour par des formes géométriques déformables dont les paramètres sont estimés à partir des données [3, 4]. La méthode que nous proposons rentre dans cette dernière catégorie. Sa particularité est de modéliser l’objet par un polyèdre dont les sommets sont estimés au sens d’un critère MAP, avec une information *a priori* markovienne sur leurs positions. L’avantage d’une telle approche est la réduction considérable du nombre de paramètres à estimer, malgré la non linéarité du problème, inhérente à la modélisation géométrique. Du point de vue algorithmique, nous proposons une méthode multirésolu-

tion. Elle consiste à réaliser des estimations itératives de polyèdres, où la première itération correspond la résolution la plus grossière. Le nombre de sommets du polyèdre augmente alors à mesure que la résolution s’affine. À chaque itération, la maximisation du critère *a posteriori* est réalisée par une méthode de type recuit simulé [5] ou descente itérative par coordonnées (ICD, [1]). L’initialisation à la résolution la plus basse est un ellipsoïde obtenu en estimant les moments géométriques de l’objet à partir des données. Aux autres résolutions, l’initialisation correspond au résultat de l’itération précédente.

## 2 Modélisation polyédrale

L’expression générale des données en tomographie à rayons X est

$$p_i(\mathbf{t}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{r}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{t}) d\mathbf{x} + b_i(\mathbf{t}), \quad (1)$$

$i = 1, \dots, n$ , où  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  représente les coordonnées d’un point dans l’espace,  $\mathbf{t} = (\alpha, \beta)$  celles d’un point dans le plan d’une projection.  $\mathbf{r}_i(\mathbf{x})$  désigne les coordonnées du point d’intersection d’un rayon, défini par la source et le point  $\mathbf{x}$ , avec le plan de la  $i$ -ème projection.  $n$  est le nombre de projections,  $\delta$  la fonction de Dirac 2D, et  $b_i$  le bruit inhérent à la modélisation et à la  $i$ -ème mesure, supposé blanc et gaussien.

Dans les approches qui modélisent l’objet sous forme de voxels, une discrétisation de (1) aboutit à

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{b}, \quad (2)$$

où les vecteurs  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{p}$  représentent l’ensemble des voxels et des données, et  $\mathbf{A}$  est une matrice dont les éléments ne

dépendent que de la géométrie du problème. L'estimation de  $\mathbf{f}$  au sens du MAP est obtenue en optimisant un critère de la forme

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 + \lambda\mathcal{U}(\mathbf{f}), \quad (3)$$

où  $\mathcal{U}(\mathbf{f})$  est la fonction d'énergie du modèle markovien choisi pour l'objet.

Dans l'application considérée, nous supposons que le défaut recherché représente une seule zone compacte du domaine investi. Ce défaut peut néanmoins être non convexe et donc complexe à reconstruire. Nous avons donc choisi de modéliser cette zone par un polyèdre  $\mathcal{P}$  :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Dans ce qui suit, nous notons  $\mathcal{P} = (\mathbf{V}, \mathbf{F})$  où  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_N)$  contient les coordonnées des sommets du polyèdre et  $\mathbf{F}$  représente ses faces, supposées triangulaires. Le problème direct (1) s'écrit alors :

$$p_i(t) = \iiint_{\mathcal{P}} \delta(\mathbf{r}_i(\mathbf{x}) - t) d\mathbf{x} + b_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Le problème de l'estimation du défaut se ramène alors à l'estimation du polyèdre  $\mathcal{P}$  à partir des données. Étant donné un ensemble de sommets, il existe plusieurs polyèdres qui possèdent ces sommets. De façon à simplifier le problème de reconstruction, nous supposons fixes les indices des sommets qui composent chaque face. Le problème direct se simplifie alors sous la forme

$$\mathbf{p} = \mathcal{A}(\mathbf{V}) + \mathbf{b}, \quad (6)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur non linéaire sur les sommets. Nous estimons  $\mathbf{V}$  dans un cadre bayésien. L'estimateur minimise

$$\mathcal{J}(\mathbf{V}) = \|\mathbf{p} - \mathcal{A}(\mathbf{V})\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \phi(V_j - V_j^0), \quad (7)$$

où  $\phi(V) = \|V\|^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq 2$ , et  $V_j^0$  désigne le barycentre des voisins du sommet  $V_j$ . La technique de minimisation est basée sur l'algorithme ICD [1], où les sommets du polyèdre sont visités cycliquement. Le sommet  $V_j$  prend une position sur la droite  $(V_j V_j^0)$ ; il est modifié suivant un processus aléatoire, et sa nouvelle position est acceptée si elle induit une diminution du critère  $\mathcal{J}$ . Ce balayage sommet par sommet permet une mise à jour du critère peu coûteuse puisqu'il n'engendre qu'une modification locale du polyèdre. On calcule ainsi la valeur du critère en la configuration modifiée à partir de celle de la configuration antérieure en ne considérant que la partie du polyèdre qui a subi un changement.

L'initialisation est réalisée par une méthode qui consiste à évaluer les moments géométriques de l'objet jusqu'à un certain ordre (habituellement 2 ou 3) à partir des données. Puis, le polyèdre initial est estimé à partir des moments géométriques évalués [6].

### 3 Algorithme multirésolution

La méthode proposée en section 2 est une généralisation de la modélisation polygonale de défauts pour le problème

équivalent en dimension 2 [7], qui donne satisfaction et permet une reconstruction rapide. Cependant, certaines difficultés techniques apparaissent en 3D. En particulier, il est fréquent d'obtenir, après un grand nombre d'itérations, des configurations singulières dans lesquelles une arête et une face du polyèdre s'intersectent. Pour pallier à cette

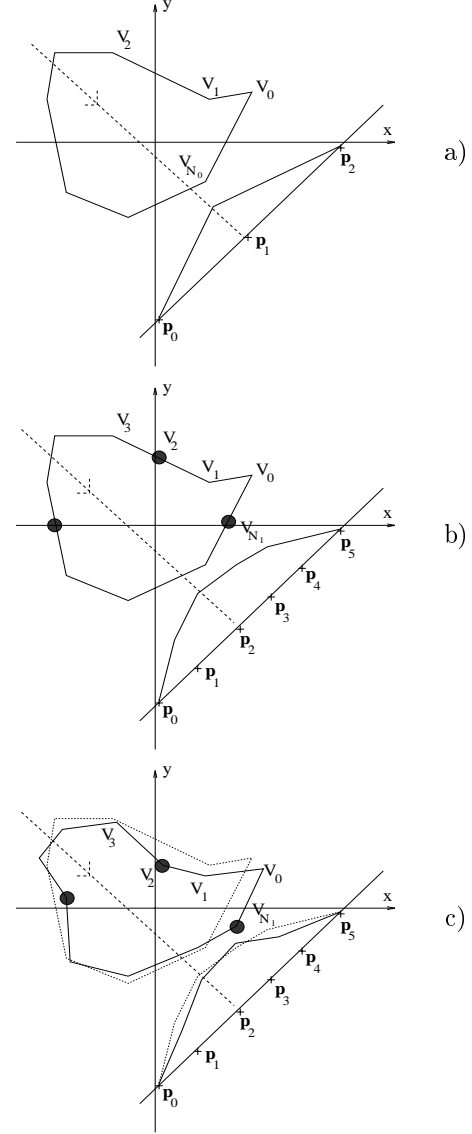


FIG. 1 – Illustration en 2D d'une itération de la méthode multirésolution : a) solution à l'itération  $r-1$ , b) ajout de sommets sur les arêtes les plus longues de ce polygone et augmentation du nombre de données disponibles, c) solution à l'itération  $r$  courante.

difficulté et pour accélérer la reconstruction, nous avons choisi une stratégie multirésolution. Son principe est de commencer par un faible nombre de sommets pour obtenir une solution qui est utilisée comme solution *a priori* à l'étape suivante. Puis, le rajout progressif de sommets au polyèdre permet d'affiner la reconstruction. Le principe de cette méthode est illustré sur la figure 1<sup>1</sup>.

1. Pour cause de complexité des graphiques 3D, nous considérons sur cette figure le problème analogue en dimension 2, dans lequel l'objet est un polygone.

En notant  $r$  le niveau de résolution courant et  $R + 1$  le nombre total de niveaux (en général inférieur à 5), l'algorithme se résume :

- $r = 0$ . Calculer une première reconstruction  $\mathcal{P}_0 = (\mathbf{V}_0, \mathcal{F}_0)$  à  $N_0$  sommets par la méthode monorésolution, à partir des données (1) sous-échantillonnées.
- Pour  $r = 1, \dots, R$ ,
  - Sous-échantillonner les données initiales avec une fréquence multiple de celle du pas précédent.
  - Augmenter le nombre total de sommets  $N_{r-1}$  du polyèdre. Transformer le polyèdre  $\mathcal{P}_{r-1}$  en une configuration équivalente  $\mathcal{P}_r^0 = (\mathbf{V}_r^0, \mathcal{F}_r)$  à  $N_r$  sommets.
  - Reconstruire  $\mathcal{P}_r = (\mathbf{V}_r, \mathcal{F}_r)$  par l'algorithme monorésolution en utilisant  $\mathcal{P}_r^0$  comme solution initiale.

À chaque étape  $r \geq 1$ , l'augmentation du nombre de sommets est obtenue en dupliquant les faces dont les surfaces sont supérieures à un seuil  $\beta \mathcal{S}_r$ , où  $\mathcal{S}_r$  est la surface de  $\mathcal{P}_r$ , et  $\beta > 0$  est un paramètre arbitraire. Pour limiter le volume de calculs, les données initiales sont échantillonnées; le nombre de données intervenant dans  $\mathcal{J}$  est  $d^{r-R} n \cdot M$ , où  $d$  est le pas de sous-échantillonnage. Le nombre de pixels par projection, noté  $M$ , est supposé être une puissance de  $d$ .

## 4 Résultats de simulation

### 4.1 Cas bidimensionnel

La simulation présentée sur la figure 2 correspond à la donnée de 5 projections bruitées d'un objet compact, avec un rapport signal sur bruit (RSB) de 20 dB. Nous avons choisi  $R = 4$  niveaux de résolution et un polygone initial à 5 sommets. Pour des raisons de simplicité, le passage d'un niveau de résolution au suivant s'effectue en plaçant un nouveau sommet au barycentre de chaque arête. Le nombre de sommets du polygone déformable est donc doublé.  $\lambda$  est fixé à 1 et  $\alpha$  à 2. Le nombre d'itérations est de 50 en monorésolution et de 10 pour chaque résolution en multirésolution. Les résultats des deux algorithmes sont analogues et proches de l'objet réel mais l'algorithme multirésolution réduit sensiblement la complexité numérique.

### 4.2 Cas tridimensionnel

Nous présentons une simulation en 3D sur les figures 3 et 4. Les données simulées correspondent à 9 projections bruitées d'un objet compact, avec un rapport signal sur bruit de 20 dB. Nous avons considéré 2 niveaux de résolution. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixés à 1 et 1.2. Le paramètre  $\lambda$  est fixé à la première itération de chaque résolution de telle sorte que le terme de fidélité aux données représente 90 % de la fonction d'énergie. Le polyèdre déformable contient 58 sommets et 112 faces à la première résolution, puis 102 sommets et 200 faces à la seconde. Il est important de noter que l'initialisation à la seconde résolution et le résultat de la première ne diffèrent que par leur nombre de sommets, la forme des deux polyèdres étant exactement la même. En effet, chaque sommet rajouté est défini comme le barycentre d'une face préexistante et ne modifie donc pas cette face.

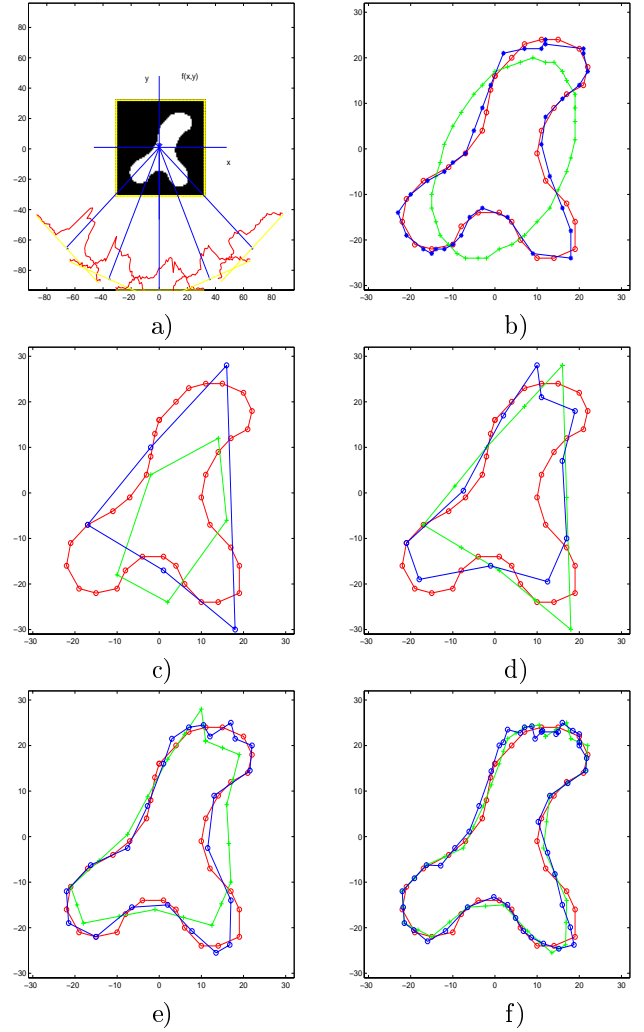


FIG. 2 – Cas bidimensionnel ; Données et reconstructions par les méthodes directe et multirésolution. a) l'objet et ses projections bruitées, b) initialisation (contour elliptique) et reconstruction par l'algorithme monorésolution, c-f) reconstructions pour les 4 niveaux de l'algorithme multirésolution. Sur chacun des graphes c-f) sont représentés l'objet réel, l'initialisation et le résultat de la reconstruction pour la résolution courante.

## 5 Conclusions

Dans cette présentation, nous avons exposé une méthode originale de reconstruction d'un objet tridimensionnel compact homogène dans un fond homogène en tomographie à rayons X. Cette approche modélise le défaut par un polyèdre dont les sommets sont estimés à partir des données dans un contexte bayésien. Nous considérons les résultats de la section 4 très encourageants, notre méthode permettant la reconstruction de formes relativement complexes de façon rapide. Nos travaux futurs s'orientent vers une amélioration de l'initialisation, qui conditionne fortement la qualité des reconstructions. Nous pensons également explorer d'autres stratégies stochastiques d'optimisation (méthode de type Monte Carlo), qui pourraient permettre d'éviter la convergence de l'algorithme vers des minima locaux de la fonction d'énergie.

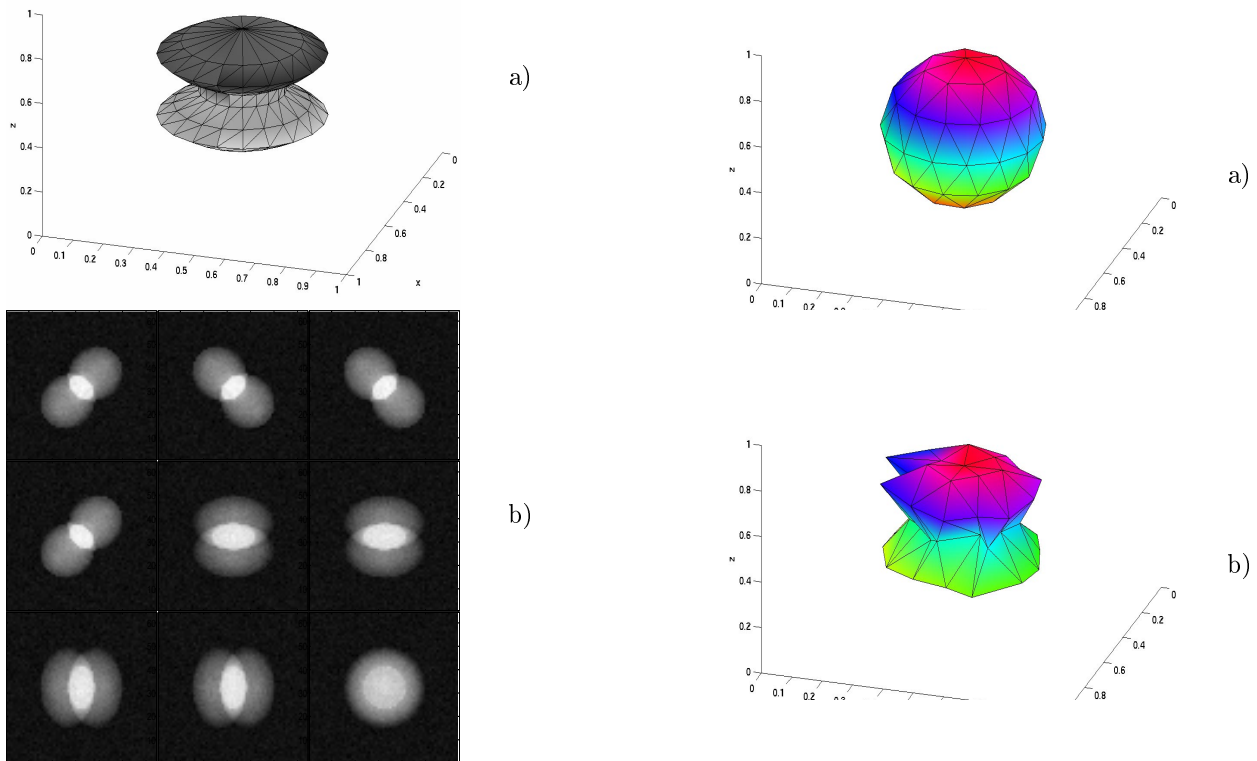


FIG. 3 – Cas tridimensionnel. a) objet original, b) données simulées : 9 projections bruitées à angles limités sur un détecteur identique. Chaque projection contient  $64 \times 64$  pixels, le rapport signal sur bruit vaut 20 dB.

## Références

- [1] C. A. Bouman et K. D. Sauer, « A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization », *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, n° 3, pp. 480–492, mars 1996.
- [2] F. Santosa, « A level-set approach for inverse problems involving obstacles », *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 1, pp. 17–33, 1996.
- [3] Y. Amit et K. M. Manbeck, « Deformable template models for emission tomography », *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 12, n° 2, pp. 260–268, June 1993.
- [4] K. M. Hanson, G. S. Cunningham, et R. J. McKee, « Uncertainties in tomographic reconstructions based on deformable models », in *Image Processing*, K. M. Hanson, ed., *Proc. SPIE*, vol. 3034, pp. 276–286, 1997.
- [5] S. Geman et D. Geman, « Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-6, n° 6, pp. 721–741, novembre 1984.
- [6] C. Soussen et A. Mohammad-Djafari, « Recovery of moments of a compact homogeneous object from tomographic projection data », *soumis à Graphical Models and Image Processing*, 1999.
- [7] A. Mohammad-Djafari et Y. Khayi, « Array processing techniques and shape reconstruction in tomography », in *Proc. IEEE ICASSP*, Munich, Germany, avril 1997, vol. II, pp. 3785–3789.

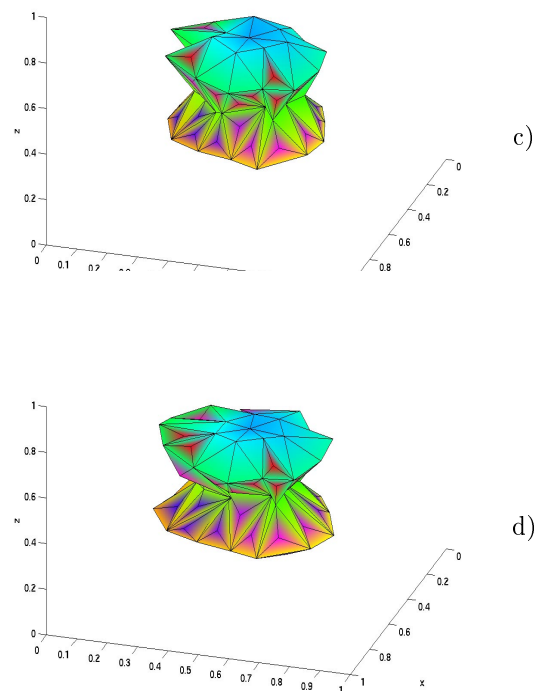


FIG. 4 – Reconstruction de la forme polyédrale avec 2 niveaux de résolution. a) initialisation par un ellipsoïde, b) reconstruction monorésolution après 10 itérations, c) passage au second niveau de résolution – ce polyèdre, utilisé comme initialisation au second niveau de résolution, est identique à b) mais possède davantage de sommets et de faces, d) reconstruction finale obtenue après 10 itérations.