

Détection de la FI de signaux à variations de phase sinusoidales et faible indice de modulation par une technique basée sur le principe du maximum de vraisemblance : Application à la mesure de la vitesse particulaire acoustique.

Cyril MELLETT, Jean-Christophe VALIÈRE

LAUM, UMR CNRS 6613

Avenue Olivier Messaïen, BP 92101, 72085 Le Mans Cedex 09, France.

Cyril.Mellet@univ-lemans.fr, Jean-Christophe.Valiere@univ-lemans.fr

Résumé – La mesure de la vitesse particulaire acoustique par vélocimétrie laser à effet doppler (VLD) nécessite une démodulation de signaux à variation de fréquence sinusoidale. La gamme d’amplitude et de fréquence étant étendue en acoustique, l’indice de modulation des signaux recueillis peut atteindre des valeurs faibles. Cette étude présente la comparaison de 2 méthodes basées sur le principe du maximum de vraisemblance pour estimer la FI de signaux dont l’indice de modulation est de l’ordre de 10^{-2} . L’influence des paramètres de chaque méthode sur la précision d’estimation est mis en évidence.

Abstract – Acoustic particle velocity measurement by laser-Doppler velocimetry can be achieved using an estimation of instantaneous frequency. As the magnitude and frequency ranges can be large in acoustics, the modulation ratio of Doppler signals may be small (10^{-2}). This paper compares two demodulation techniques based on the maximum likelihood principle. The performance of these estimators is examined as a function of their parameters.

1 Introduction

La vitesse particulaire acoustique est une quantité très difficilement estimable par des techniques classiques de mesure : fil chaud, doublet microphonique. Ces méthodes possèdent le désavantage majeur d’être invasives et donc de perturber sensiblement le champ à mesurer. Par conséquent, la technique de Vélocimétrie Laser Doppler (VLD) développée pour la mécanique des fluides, a été adaptée à la mesure de vitesses particulières acoustiques [6]. Son principe consiste à mesurer le décalage fréquentiel de la lumière rétro-diffusée par une particule animée d’une vitesse variable $v(t) = V \cos(2\pi f_{ac}t + \psi)$ traversant une zone d’interfranges créées par deux faisceaux lasers cohérents. Ainsi, le signal recueilli peut se modéliser sous la forme suivante :

$$z(t) = A \exp \left[j \left(2\pi F_p t + \frac{V}{i f_{ac}} \sin(2\pi f_{ac}t + \psi) \right) \right] + b(t), \quad (1)$$

où $z(t)$ représente le signal analytique associé au signal réel issu de l’expérience. Les termes F_p et i sont liés au système optique et représentent respectivement la fréquence porteuse imposée par l’introduction d’une cellule de Bragg sur l’un des trajets optiques et la longueur des interfranges. Le terme f_{ac} représente la fréquence acoustique imposée par le haut-parleur. Les deux autres termes sont les quantités à estimer l’amplitude maximale de la vitesse, V , et la phase à l’origine, ψ .

Le signal étant à modulation de fréquence, l’estimation de la vitesse acoustique peut être obtenue par le suivi

de la fréquence instantanée (FI) du signal [8] [2], $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$, où $\phi(t)$ est la phase du signal analytique $z(t)$. La gamme de mesure des vitesses étant très étendue en acoustique, l’indice de modulation, $\alpha = \frac{V}{i f_{ac}}$, peut prendre des valeurs comprises entre 0,01 et 100. Parmi les techniques d’estimation de FI [1], l’objectif est de trouver celles capables de déterminer cette quantité de manière précise pour de faibles indices de modulation. Une étude préalable a permis de mettre en évidence que des techniques à base de transformée temps-fréquence bilinéaire possèdent un seuil d’estimation pour α de l’ordre de 0,2 [7]. Le travail s’oriente actuellement vers l’étude de méthodes paramétriques pour estimer la FI de signaux à modulation de fréquence sinusoidale, et plus particulièrement par la méthode de maximum de vraisemblance. Ainsi, cette étude compare deux méthodes de maximisation de la fonction de vraisemblance.

2 Maximum de vraisemblance

Les techniques basées sur le principe du maximum de vraisemblance reposent sur la maximisation de la densité de probabilité conditionnelle :

$$p(z | \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^N} \exp \left[\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - z_r[n])^2 \right], \quad (2)$$

par rapport à tous les coefficients du vecteur θ .

Dans cette expression, $z[n]$ représente le signal analytique associé au signal issu de l’expérience et $z_r[n]$ un signal de référence construit à partir d’un ensemble de paramètres

caractéristiques du signal $z[n]$ regroupé dans le vecteur θ . La construction du signal de référence, à partir de l'information a priori disponible sur le signal z , assure la modélisation du système. La maximisation de $p(z | \theta)$, en minimisant l'erreur quadratique d'estimation, $(z[n] - z_r[n])^2$, permet de prédire l'ensemble des paramètres de θ les plus adéquats à la modélisation. Ainsi, dans un cas de modélisation parfaite, la fonction $p(z | \theta)$ représente la densité de probabilité du bruit, supposé gaussien, qui entache les valeurs de z . Dans le cas présent, la modélisation des variations sinusoïdales de la phase est assurée par la propriété d'approximateur universel des polynômes. Le signal de référence, dont la phase varie de manière polynomiale, s'écrit donc :

$$\begin{cases} z_r[n] = A' \exp(j\phi_r[n]) = s[n] + jv[n] \\ \text{avec } \phi_r[n] = \sum_{i=0}^p a_i n^i \end{cases} \quad (3)$$

L'ordre du polynôme étant fini, l'ensemble des paramètres regroupés dans le vecteur θ , doit être ajusté afin de satisfaire le critère d'optimisation (eq.2), où θ est défini par :

$$\theta = (A' a_0 \dots a_p)^T, \quad (4)$$

où le symbole T représente la transposition.

3 Techniques de maximisation

Le critère d'optimisation, défini par l'équation 2 est équivalent à la maximisation de la fonction D [1] [3] :

$$D = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] \exp[-j(a_1 n + \dots + a_p n^p)], \quad (5)$$

par rapport aux coefficients (a_1, \dots, a_p) . L'ensemble des paramètres du vecteur θ est alors déduit de cette maximisation par les relations suivantes :

$$\begin{cases} D(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p) = \max_{(a_1, \dots, a_p)} D(a_1, \dots, a_p), \\ \hat{a}_0 = \arg[D(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)] \\ A' = |D(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)|^2 \end{cases} \quad (6)$$

3.1 Méthode par démodulation des ordres supérieurs

La fonction D , pour un ordre $p=1$, est homogène à une transformée de Fourier discrète (TFD). Sa maximisation est alors équivalente à la recherche du maximum du spectre du signal $z[n]$. Une solution envisagée, pour sa maximisation dans un cas général ($p \geq 1$) consiste à utiliser le résultat pour un ordre 1. Pour y parvenir, le signal est tout d'abord démodulé par les ordres supérieurs [1] :

$$z_{dem}[n] = z[n] \exp[-j(a_2 n^2 + \dots + a_p n^p)], \quad (7)$$

avec des coefficients (a_2, \dots, a_p) pris sur un ensemble de valeurs qui quadrillent un domaine prédéfini. La seconde étape consiste à rechercher l'ensemble (a_2, \dots, a_p) pour lequel il existe un maximum global du spectre, chacun des coefficients parcourant l'espace qui lui est réservé. Cette méthode requiert un temps de calcul considérable pour des ordres élevés de p . Afin de limiter ce dernier,

une série de tests a été réalisée pour un degré du polynôme fixé à 3. Dans le même but, le domaine d'excursion des coefficients a_2 et a_3 a été restreint autour de leur valeur respective obtenue par le développement limité à l'ordre 3 de la phase du signal modélisé par l'équation (1).

L'estimation de la FI par cette méthode nécessite une détermination précise des coefficients du polynôme. Or l'introduction d'une fenêtre d'analyse perturbe l'estimation de ces coefficients et provoque des disparités sur les estimations. Des tests ont permis de mettre en évidence ce phénomène et ont encouragé la recherche d'autres techniques de maximisation.

3.2 Méthode du Simplex

Une nouvelle orientation a consisté à maximiser la fonction D en minimisant son inverse. Parmi l'ensemble des méthodes de minimisation de fonctions à plusieurs variables [5], le Simplex a été retenu pour sa fiabilité et sa robustesse à converger vers le minimum global d'une fonction [4]. Pour converger vers un minimum de la fonction, la méthode du Simplex opère une suite de transformation géométrique sur un nombre de points initiaux qui quadrillent l'espace [4]. Néanmoins si la fonction possède des minimums locaux aux alentours du minimum global, les points initiaux doivent être concentrés dans une région restreinte autour du minimum globale pour assurer la convergence vers ce dernier. Une étude sur des simulations va être menée pour observer l'influence de ce paramètre sur la qualité des estimations.

4 Résultats

Les résultats présentés ici, montrent l'influence des paramètres intrinsèques des différentes méthodes sur la précision des estimations de la FI. Ces tests réalisés sur des simulations de signaux à variations de fréquence sinusoïdale avec un faible indice de modulation permettent d'établir la robustesse de ces méthodes et leur capacité à être employées sur des signaux réels. Cette partie se consacre plus particulièrement à l'influence de la taille de la fenêtre d'analyse et au degrés de concentration des points initiaux autour de la valeur du minimum global nécessaire à une estimation précise de la FI dans le cas de la méthode du Simplex.

4.1 Méthode de démodulation des ordres supérieurs : influence de la taille de la fenêtre d'analyse

La longueur de la fenêtre d'analyse détermine la durée sur laquelle les variations sinusoïdales de FI vont être approchées par des portions de polynômes. Un compromis va devoir être trouvé entre une durée de fenêtre réduite, assurant une modélisation précise mais limitant la précision fréquentielle et une durée plus conséquente sur laquelle les variations de fréquence peuvent devenir difficilement estimable par un polynôme d'ordre 2. La sensibilité est testée pour des signaux simulés dont l'indice de modulation α

vaut 0.05. L'analyse de ces signaux montre des différences importantes d'estimation pour différentes longueurs de fenêtre. La figure 1 illustre parfaitement cette sensibilité en comparant les estimations de la FI d'un signal simulé avec les paramètres suivants : $Fp = 47kHz$, $f_{ac} = 2kHz$, $V = 0.1mm/s$, $\psi = -45^\circ$, noyé dans un bruit blanc gaussien dont le rapport signal sur bruit (RSB) vaut 15dB, pour des fenêtres d'analyse de 75, 100, 150 et 200 points. Elle met en évidence la présence d'une longueur de fenêtre

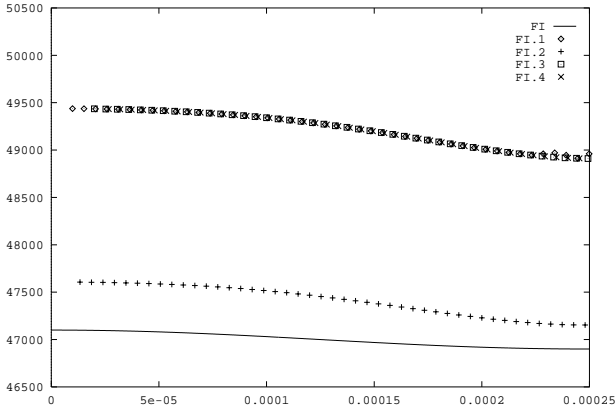


FIG. 1: comparaison des estimations de la FI d'un signal dont les paramètres sont $Fp = 47kHz$, $f_{ac} = 2kHz$, $V = 0.1mm/s$, $\psi = -45^\circ$ pour une fenêtre d'analyse de 75 points : 'FI.1' symbolisée par (\diamond), de 100 points : 'FI.2' (+), de 150 points : 'FI.3' (\square) et de 200 points : 'FI.4' (x).

(100 points) pour laquelle l'erreur d'estimation de FI est la moins importante. La longueur optimale se situe dans un intervalle réduit autour de cette valeur. En effet, une diminution de sa taille de 25 points (FI.1) fournit une estimation moins précise. De même, une estimation effectuée avec une fenêtre de 150 points (FI.3) produit le même résultat que FI.1. Une étude plus précise a confirmé que la valeur optimale de la fenêtre devait se situer dans un intervalle restreint autour de la valeur de 100 points, sans toutefois pouvoir la faire coïncider avec la courbe de FI simulée (trait continu).

L'influence de la taille de la fenêtre sur la qualité d'estimation de la FI peut s'expliquer par la précision nécessaire à l'estimation du coefficient $a1$ pour obtenir un suivi de FI satisfaisant. En effet, une erreur relative de 1% sur la détermination de ce coefficient provoque un décalage de quelques centaines de Hertz de la valeur de FI. Ainsi, l'introduction de la fenêtre d'analyse modifie le spectre du signal démodulé et perturbe sensiblement l'estimation de ce coefficient. Ceci peut expliquer les difficultés d'obtenir des estimations précises de la FI.

4.2 Méthode du Simplex

Une étude a été nécessaire pour déterminer l'influence du choix des points initiaux sur la qualité d'estimation de la FI. Auparavant, cette partie présente le comportement

des estimations face au changement de taille de la fenêtre d'analyse.

4.2.1 Taille de la fenêtre d'analyse

Pour mettre en évidence l'influence de la taille de la fenêtre d'analyse, une étude statistique a été menée. Ce travail a consisté à analyser 100 réalisations différentes d'un signal simulé et bruité avec le même fenêtrage. Le résultat sur lequel porte les conclusions provient de la moyenne des estimations et permet d'observer le comportement moyen de cette méthode.

Les signaux ont été construits avec les paramètres sui-

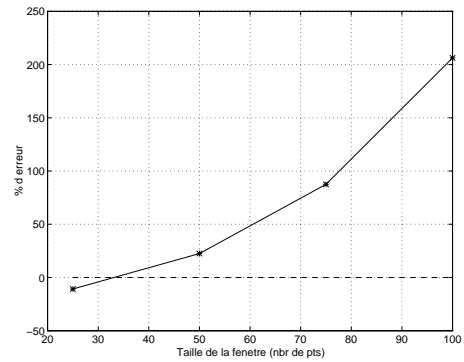


FIG. 2: influence de la taille de la fenêtre sur les estimations des facteurs V et ψ .

vants : $Fp = 47kHz$, $f_{ac} = 2kHz$, $V = 0.1mm/s$, $d = 210^{-3}s$, $\psi = -45^\circ$, $RSB = 15dB$, et traités par le maximum de vraisemblance pour estimer la FI, suivi d'une détection synchrone pour obtenir les valeurs de V et ψ . Les courbes ainsi obtenues (fig.2 et 3) montrent l'influence de la taille de la fenêtre d'analyse sur la précision d'estimation de V et ψ . La figure 2, représentant la précision de la vitesse en fonction du nombre de points constituant la fenêtre, montre une dégradation de la qualité d'estimation lorsque la taille de la fenêtre augmente. L'estimation peut devenir même totalement erronée pour une fenêtre de 75 ou 100 points. De plus, pour une fenêtre de 25 points la vitesse est sous-estimée avec une précision de 10% alors qu'elle est sur-estimée avec une précision de 25% pour une fenêtre de 50 points. Une étude concentrée autour

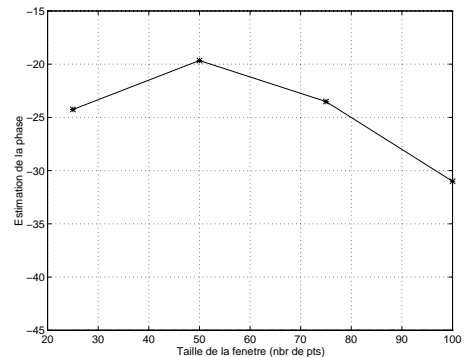


FIG. 3: influence de la taille de la fenêtre sur l'estimation de la phase ψ .

d'un nombre de point avoisinant 40 a montré que la taille de la fenêtre optimale est de 33 points. L'amplitude de la vitesse est alors estimée avec une précision de 5%. Ceci représente les meilleurs résultats obtenus jusqu'à présent pour des indices de modulation de 0.02.

Le comportement de l'estimation de la phase, illustrée par la figure 3, est totalement différent, l'estimation semblant tendre vers la valeur exacte de -45° pour des tailles de fenêtre importante. Cela signifie qu'il existerait un compromis à établir pour obtenir de manière précise et simultanée une estimation de l'amplitude de la vitesse et de sa phase.

4.2.2 Influence de la valeur du point initial

Les points initiaux, nécessaires à la minimisation de la fonction D par rapport aux coefficients a_1, a_2, a_3 , sont générés à partir de paramètres initiaux notés a_{10}, a_{20}, a_{30} . Pour observer l'influence de ce triplet, ils ont été calculés par le développement limité de la phase à l'ordre 3 pour des valeurs fictives, V_0 , de la vitesse. Une étude statistique a été menée d'une manière similaire à celle du paragraphe précédent. Les tests ont été réalisés avec des signaux dont les paramètres sont les suivants: $Fp = 47kHz$, $f_{ac} = 2kHz$, $V = 0.1mm/s$, $\psi = -45^\circ$, $d = 210^{-3}s$, $RSB = 15dB$, et des valeurs de V_0 proportionnelles à V : $\frac{V_0}{V} = [\frac{1}{4} \frac{1}{2} 1 \frac{3}{2} 2]$.

Les courbes ainsi obtenues montrent l'importance de l'es-

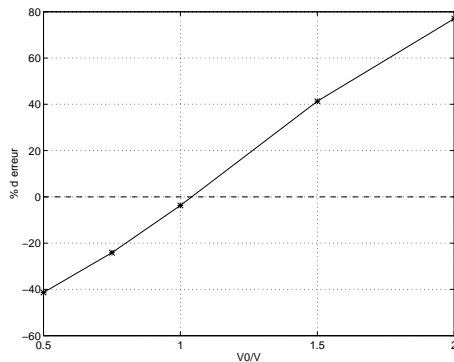


FIG. 4: Influence du triplet initial sur la précision d'estimation de V .

timisation des valeurs des points initiaux. En effet, plus les points initiaux s'écartent de la valeur simulée V et plus les estimations deviennent imprécises. Ce phénomène se retrouve sur les estimations de l'amplitude maximale de la vitesse mais également à un degré moindre sur l'estimation de la phase ψ .

Cela signifie que l'utilisation de cette méthode sur des signaux issus de l'expérience de VLD devra nécessiter une connaissance approximative de la valeur de la vitesse à estimer.

5 Conclusion

La méthode d'estimation de FI par démodulation des ordres supérieurs présentent une trop forte sensibilité à la taille de la fenêtre d'analyse pour être retenue. Cepen-

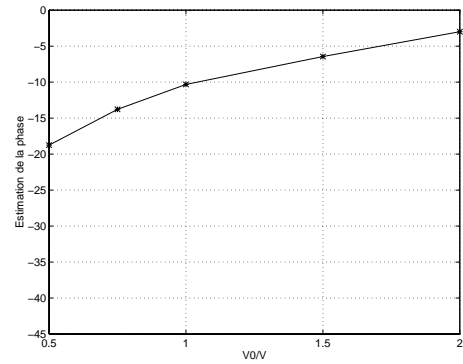


FIG. 5: Influence du triplet initial sur la précision d'estimation de ψ .

dant, elle nous a permis d'observer la possibilité d'utiliser le principe du maximum de vraisemblance en tant qu'estimateur de FI et de développer une nouvelle méthode utilisant la méthode du Simplex. Cette technique nous permet d'envisager la démodulation de signaux à variations de fréquence sinusoidale dont l'indice de modulation est de l'ordre de 10^{-2} , avec une précision de 5%.

Cette méthode nous permet de gagner un ordre de grandeur par rapport aux techniques temps-fréquence et montre la possibilité de mesurer des vitesses particulières acoustiques correspondant à des déplacements de 3nm pour $f_{ac} = 5kHz$. Des tests sur des signaux issus de l'expérience de VLD vont devoir être menés pour confirmer ces premiers résultats très encourageants.

Références

- [1] B. Boashash and P. O'Shea. Algorithms for instantaneous frequency estimation: A comparative study. *Proc. SPIE Conf. Advanced Acous., Speech and Sig. Process.*, **1348**, San Diego, July 1990.
- [2] D. Gabor. Theorie of communication. *Proc. IEEE*, **93**(3):429-457, 1946.
- [3] Lloyd J. Griffiths. Rapid measurement of digital instantaneous frequency. *IEEE Trans. Acous, Speech, and Sig. Process.*, **ASSP 23**(2):207-222, April 1975.
- [4] J.A. Nedler and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer J.*, **7**:308-313, 1965.
- [5] Jr. R.L. Branham. *Scientific Data Analysis: An Introduction to Overdetermined Systems*. Springer-Verlag.
- [6] K.J. Taylor. Absolute measurement of acoustic particle velocity. *J. Acoust. Soc. Am.*, **59**(3):691-694, March 1976.
- [7] V. Valeau. *Mesure de la vitesse acoustique particulière par anémométrie laser doppler: estimation de fréquence instantanée à variation sinusoidale, validation de la mesure*. PhD thesis, Université du Maine, 1999.
- [8] J. Ville. Théorie et application de la notion de signal analytique. *Cables et transmissions*, **2A**(1):61-74, 1948.