

# Un algorithme d'identification autodidacte multi-entrées/multi-sorties en présence de bruit corrélé spatialement

Walid HACHEM<sup>1</sup>, François DESBOUVRIES<sup>1</sup>, Philippe LOUBATON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut National des Télécommunications, Département Signal et Image,  
9 rue Charles Fourier, 91011 Évry, France

<sup>2</sup>Université de Marne la Vallée, Laboratoire Systèmes de Communication,  
5 boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée Cédex 2, France

Walid.Hachem@int-evry.fr, desbou@int-evry.fr, loubaton@univ-mlv.fr

**Résumé** – Nous étudions le problème de l'identification au second-ordre d'une fonction de transfert multi-entrées / multi-sorties en présence de bruit additif. Le bruit additif est supposé (temporellement) blanc, c'est-à-dire décorrélé dans le temps, mais nous ne faisons aucune hypothèse sur sa corrélation spatiale. Nous proposons un résultat d'identifiabilité qui requiert des hypothèses très faibles sur la fonction de transfert à estimer. Un algorithme nouveau est proposé et testé par des simulations.

**Abstract** – We address the problem of the second-order blind identification of a Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) transfer function in the presence of additive noise. The additive noise is assumed to be (temporally) white, i.e., uncorrelated in time, but we do not make any assumption on its spatial correlation. We propose an identifiability result which requires very mild assumptions on the transfer function to be estimated. A new algorithm is proposed and tested by simulations.

## 1 Introduction

Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  le signal de dimension  $q$  défini par

$$y_n = [H(z)]s_n + w_n = y_n^u + w_n \quad (1)$$

Nous étudions le problème de l'identification de  $H(z)$  à partir de la donnée (supposée exacte) de la fonction de covariance de la sortie  $y$ .

Dans un contexte d'égalisation autodidacte en communications numériques,  $s_n$  est un processus vectoriel  $p \times 1$  centré et décorrélé, qui représente les séquences de symboles (non observables) émis par  $p$  sources partageant la même période baud. La fonction de transfert matricielle  $q \times p$   $H(z)$  modélise le canal inconnu. Le signal est reçu sur un réseau de  $q$  capteurs, et perturbé par un bruit additif  $w_n$  de dimension  $q$ , décorrélé du signal utile  $y_n^u$ .

Nous supposons que  $q > p$ , que  $H(z) = \sum_{k=0}^M H_k z^{-k}$  est un filtre RIF à minimum de phase, et que  $w_n$  est un bruit blanc de dimension  $q$  (c'est-à-dire  $E(w_n w_n^T) = 0$  si  $n \neq m$ ), de matrice de covariance spatiale  $\Sigma = E(w_n w_n^T)$ .

Les articles [1] et [2] ont été les premiers à résoudre le problème au  $2^{nd}$  ordre. Ils ont donné lieu ensuite à un grand nombre de travaux et variantes. Cependant, la plupart de ces algorithmes considèrent le cas où  $\Sigma = \sigma^2 I_q$ .

Cette hypothèse peut cependant être restrictive dans certains contextes. Par exemple, si les propriétés physiques des capteurs ne sont pas identiques, les composantes du bruit sont décorrélées mais leurs variances ne coïncident pas nécessairement. Le bruit peut même être corrélé spatialement s'il résulte de la superposition d'un grand nombre de sources indépendantes. Cette situation se rencontre par

exemple en acoustique sous-marine [3] [4].

Dans cet article, nous proposons un algorithme d'identification de  $H(z)$  dans le cas où l'on ne dispose pas d'information a priori sur  $\Sigma$ . Ce problème a été étudié dans le cas SIMO ( $p = 1$ ) dans [5], [6], et [7]. L'article [8] propose une solution dans le cas où  $p > 1$ , et [9] généralise les résultats de [8] au cas où  $H(z)$  est rationnelle.

Notre démarche est la suivante. Soit  $\{R_k\}$  (resp.  $\{R_k^u\}$ ) la fonction de covariance du signal reçu  $y$  (du signal non bruité  $y_n^u$ ). On a  $R_0 = R_0^u + \Sigma$ ,  $R_k = R_k^u$  pour  $0 \leq k \leq M$  et  $R_k = R_k^u = 0$  pour  $k > M$ .  $\Sigma$  étant inconnu,  $R_0$  ne contient pas d'information sur  $R_0^u$ . Par conséquent, notre problème consiste ici à identifier  $H(z)$  à partir de la seule connaissance de la séquence tronquée des  $\{R_k\}_{k=1}^M$ .

Cet article est organisé de la façon suivante. Le paragraphe 2 décrit le principe et propose un résultat général d'identifiabilité basé sur la notion d'espaces rationnels. Dans le paragraphe 3, nous en déduisons un algorithme d'identification; les hypothèses d'identifiabilité sur  $H(z)$  sont moins contraignantes que dans la solution proposée dans [8] ou [9]. Finalement, la mise en œuvre de l'algorithme est décrite dans le paragraphe 4 et des simulations sont proposées.

## 2 Un résultat d'identifiabilité

### 2.1 Principe d'identification

Notre méthode consiste à résoudre un problème de complétion. En effet,  $y_n^u$  n'est pas un processus vectoriel SSL

quelconque mais un processus MA. Comme  $\text{Rang}(S^u(z)) = p < q \forall z$ , cette information peut être exploitée efficacement via l'équation structurelle

$$H(z)H^T(z^{-1}) = S^u(z) = \sum_{k=-M}^M R_k^u z^{-k} . \quad (2)$$

Cette équation fournit une relation implicite entre les covariances  $\{R_k^u\}_{k=0}^M$  qui permet (sous certaines conditions) de calculer le coefficient central  $R_0^u$  à partir de  $\{R_k^u\}_{k=1}^M$ . Une fois  $R_0^u$  connu, nous sommes ramenés au calcul de  $H(z)$  à partir de  $H(z)H^T(z^{-1})$ ; ce problème classique peut être résolu par n'importe quel algorithme de réalisation stochastique.

Nos résultats sont basés sur l'observation suivante. Comme  $q > p$ , il existe des polynômes  $1 \times q$  de degré  $N$   $g(z) = \sum_{k=0}^N g_k z^{-k}$  vérifiant :

$$g(z)H(z) = 0 \text{ pour tout } z , \quad (3)$$

ou, de façon équivalente,  $g(z)H(z)H^T(z^{-1}) = 0 \forall z$ . Supposons par ailleurs que nous puissions calculer un ensemble de  $r$  polynômes  $g_i(z)$  vérifiant (3), et posons  $G(z) = [g_1^T(z), \dots, g_r^T(z)]^T = \sum_{n=0}^N G_n z^{-n}$  (les paramètres  $r$  et  $N$  seront spécifiés plus tard). Posons  $S(z) = R_0 + T(z)$ , où  $T(z)$  est supposé connu; il est clair que

$$G(z)R_0 = -G(z)T(z) . \quad (4)$$

En identifiant membre à membre le coefficient de  $z^{-k}$  pour  $0 \leq k \leq N$ , et en posant  $\mathcal{G} = [G_0^T, \dots, G_N^T]^T$ , on voit que l'on peut calculer la matrice  $\mathcal{G}R_0$  à partir des données. Si  $\mathcal{G}$  est de rang colonne complet,  $R_0$  est identifiable à partir de (4).

Notre méthode comporte donc 2 points: elle repose sur la possibilité effective de calculer des polynômes  $g(z)$  vérifiant (3); mais, de plus, ils doivent être « en nombre suffisant » et leurs degrés « suffisamment élevés ». En effet, les  $g_j(z)$  doivent permettre de construire une matrice  $\mathcal{G}$   $(N+1)r \times q$  de rang colonne complet; intuitivement, le nombre de lignes de  $\mathcal{G}$  doit donc être le plus grand possible. Les paramètres  $N$  et  $r$  (qui ne sont pas indépendants) jouent donc un rôle important dans la discussion. Pour préciser ce rôle, nous devons utiliser des propriétés de sous-espaces vectoriels rationnels (s.e.r.), qui constituent le cadre naturel des polynômes  $g_j(z)$  (pour l'étude de cet outil algébrique, nous renvoyons le lecteur à [10] et [11]).

## 2.2 Un résultat d'identifiabilité basé sur les sous-espaces rationnels

Notons tout d'abord qu'un polynôme  $g(z)$  vérifiant (3) appartient au dual d'un s.e.r. contenant  $\text{Im}(H(z))$ , où  $\text{Im}(H(z))$  est le s.e.r. engendré par les colonnes de  $H(z)$ . Soit donc  $\mathcal{S}$  un certain s.e.r. fixé, de dimension  $d$ , tel que  $\text{Im}(H(z)) \subseteq \mathcal{S}$ . Par hypothèse,  $H(z)$  est minimum phase, et donc de rang générique complet  $p$ ; donc  $\dim(\text{Im}(H(z))) = p$ , et  $p \leq d \leq q$ . Soit  $\mathcal{S}^\perp$  l'« orthogonal » de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les polynômes  $1 \times q$   $g(z)$  vérifiant  $g(z)f(z) = 0 \forall f \in \mathcal{S}$ , et soit  $0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_d$  (resp.  $0 \leq M_1^\perp \leq \dots \leq M_{q-d}^\perp$ ) les indices de Kronecker de  $\mathcal{S}$  (resp. les indices de Kronecker duaux de  $\mathcal{S}$ ).

Supposons maintenant que nous disposions d'un algorithme pour calculer l'ensemble  $\mathcal{S}_N^\perp$  constitué de tous les polynômes de  $\mathcal{S}^\perp$ , mais de degré inférieur ou égal à  $N$ . Alors nous devrions concaténer dans  $G(z)$  « autant » de polynômes  $1 \times q$   $g_j(z)$  que possible; cependant, il ne faut considérer que des polynômes linéairement indépendants sur le corps  $\mathbb{R}(z)$  des fractions rationnelles. En effet, soit  $\{g_j(z)\}_{j=1}^r$  un ensemble de  $r$  polynômes de  $\mathcal{S}_N^\perp$ , linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}(z)$ , et soit  $G(z) = [g_1^T(z), \dots, g_r^T(z)]^T$ . Ajouter une  $(r+1)^{\text{ème}}$  ligne  $g_{r+1}(z)$  à  $G(z)$  est inutile (en ce qui concerne  $\text{Rang}(\mathcal{G})$ ) si ce polynôme  $g_{r+1}(z)$  appartient au s.e.r. engendré par  $\{g_j(z)\}_{j=1}^r$ , car dans ce cas les  $N+1$  lignes apportées par  $g_{r+1}(z)$  à la matrice  $\mathcal{G}$  sont des combinaisons linéaires des  $r(N+1)$  précédentes.

La valeur *utile* maximale pour  $r$ , considérée comme une fonction  $r(N)$  de  $N$ , est donc égale à la dimension du s.e.r. engendré par  $\mathcal{S}_N^\perp$ . Mais cette dimension dépend de la position de  $N$  par rapport à  $\{M_j^\perp\}_{j=1}^{q-d}$ . Si  $N < M_1^\perp = \min_j M_j^\perp$ , alors  $g(z)f(z) = 0 \forall f(z) \in \mathcal{S}$  si et seulement si (ssi)  $g(z) = 0 \forall z$ . Si  $M_s^\perp \leq N < M_{s+1}^\perp$ , alors  $r(N) = s$ . Enfin, si  $N \geq M_{q-d}^\perp = \max_j M_j^\perp$ , on peut extraire de  $\mathcal{S}_N^\perp$  un ensemble de  $(q-d)$  polynômes formant une base de  $\mathcal{S}^\perp$ , et donc  $r(N) = q-d$ . Ceci constitue bien sûr la situation la plus favorable; il n'est donc pas étonnant que dans ce cas,  $R_0$  soit identifiable à partir de (4) sous une condition supplémentaire simple :

**Lemme 1** *Soit  $\mathcal{S}$  un s.e.r. de dimension  $d$ , d'indices de Kronecker  $0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_d$ , tel que  $\text{Im}(H(z)) \subseteq \mathcal{S}$ . Si  $M_1 \geq 1$ ,  $R_0$  est identifiable à partir de  $\mathcal{S}^\perp$ .*

**Preuve.** Soit  $G(z) = \sum_{n=0}^N G_n z^{-n}$  une matrice polynomiale  $(q-d) \times q$ , dont les lignes forment une base de  $\mathcal{S}^\perp$ . Alors  $G(z)$  vérifie (4). Considérons la matrice  $\mathcal{G} = [G_0^T, \dots, G_N^T]^T$  associée à  $G(z)$ . Soit  $v$  un vecteur constant de dimension  $q$  vérifiant  $\mathcal{G}v = 0$  ou, de façon équivalente,  $G(z)v = 0 \forall z$ . Cette condition est vérifiée ssi le polynôme constant  $v(z) = v$  appartient à l'espace dual de  $\mathcal{S}^\perp$ , c'est-à-dire à  $\mathcal{S}$ . D'autre part, l'hypothèse  $M_1 > 0$  signifie que  $\mathcal{S}$  ne contient pas de vecteurs constants non nuls, donc  $v = 0$ .  $\mathcal{G}$  est donc de rang colonne complet et  $R_0$  est identifiable à partir de (4). ■

## 3 Méthode sous-espace

Dans ce paragraphe, nous donnons le principe d'un algorithme de calcul de  $R_0$  à partir de  $\{R_i\}_{i=1}^M$ . Cet algorithme est une application pratique du lemme 1.

Au §2, nous avons considéré un s.e.r.  $\mathcal{S}$  de dimension  $d$  contenant  $\text{Im}(H(z))$ . Le choix le plus naturel pour  $\mathcal{S}$  est bien entendu  $\text{Im}(H(z))$  lui-même. Ce choix était implicite dans une méthode proposée dans [8, section III-B-3] qui s'inscrit en fait dans le contexte du lemme 1. Elle permet de calculer (sous des hypothèses assez fortes sur  $H(z)$ ), à partir d'une matrice block-Hankel associée à la séquence  $\{R_n^u\}_{1 \leq n \leq M}$ , l'ensemble de tous les polynômes de  $\mathcal{S}^\perp$ , mais de degré inférieur ou égal à  $M-1$ ; cette dernière contrainte constitue la plus grande limitation de la méthode, car la condition  $M-1 \geq M_{q-p}^\perp$  est restrictive.

Dans ce paragraphe, nous proposons une approche al-

ternative qui ne présente plus cet inconvénient. Nous allons chercher des polynômes dans l'espace dual d'un s.e.r.  $\mathcal{S}'$  contenant strictement  $\text{Im}(H(z))$ ; mais nous ne rencontrerons pas de limitation quant au degré de ces polynômes. Nous obtiendrons globalement des conditions d'identifiabilité moins sévères.

L'idée consiste à éliminer  $R_0$  en formant la différence  $Q_\alpha(z) = S(z) - S(ze^{i\alpha\pi}) = \sum_{k=-M}^M Q_k^\alpha z^{-k}$ , où  $\alpha$  est un nombre réel quelconque. À partir de (2) nous obtenons :

$$Q_\alpha(z) = [H(z) \ H(ze^{i\alpha\pi})] \begin{bmatrix} H^T(z^{-1}) \\ -H^T(z^{-1}e^{-i\alpha\pi}) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Nous supposons que  $H(z)$  est minimum phase. Nous supposons également que (C1)  $q > 2p$  et (C2) le rang générique de  $[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})]$  est égal à  $2p$ .

Appelons  $\mathcal{S}'$  le s.e.r. engendré par les colonnes de  $[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})]$ , et  $\mathcal{S}'^\perp$  son dual; grâce à (C2),  $\mathcal{S}'$  (resp.  $\mathcal{S}'^\perp$ ) est de dimension  $2p$  (resp.  $q-2p$ ). Les indices de Kronecker de  $\mathcal{S}'$  sont  $\{M'_i\}_{i=1}^{2p}$ , avec  $0 \leq M'_1 \leq \dots \leq M'_{2p}$ , et ceux de  $\mathcal{S}'^\perp$  sont  $\{M'_j^\perp\}_{j=1}^{q-2p}$ , avec  $0 \leq M'_1^\perp \leq \dots \leq M'_{q-2p}^\perp$ .

Puisque  $Q_\alpha(z)$  est connu, on peut extraire pour tout  $N \geq M'_1^\perp$  l'ensemble de tous les polynômes (de dimension  $1 \times q$ )  $g(z) = \sum_{k=0}^N g_k z^{-k}$ , de degré  $N$ , vérifiant  $g(z)Q_\alpha(z) = 0 \ \forall z$ ; en effet,  $g(z)Q_\alpha(z) = 0$  ssi le vecteur ligne  $g = [g_0, \dots, g_N]$  appartient au noyau à gauche de la matrice de Sylvester généralisée  $T_N(Q)$ , de dimensions  $q(N+1) \times q(2M+N+1)$ , associée à  $Q_\alpha(z)$  :

$$T_N(Q) = \begin{bmatrix} Q_{-M}^\alpha & \dots & Q_M^\alpha & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & Q_{-M}^\alpha & \dots & Q_M^\alpha \end{bmatrix}. \quad (6)$$

(C2) implique que les s.e.r. engendrés respectivement par les colonnes de  $Q_\alpha(z)$  et de  $[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})]$  sont égaux, et donc que  $g(z)Q_\alpha(z) = 0$  ssi  $g(z)[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})] = 0$ , ce qui implique  $g(z)H(z) = 0 \ \forall z$ . L'utilisation de la fonction  $Q_\alpha(z)$  permet donc de calculer des polynômes de  $\mathcal{S}'^\perp$  de degré  $N \ \forall N \geq M'_1^\perp$ . Le théorème suivant est une conséquence du lemme 1 :

**Théorème 1** *Soit  $\mathcal{S}'$  le s.e.r. engendré par les colonnes de  $[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})]$ . Supposons que (C1) et (C2) soient vraies. Soit  $\{M'_i\}_{i=1}^{2p}$ , avec  $0 \leq M'_1 \leq \dots \leq M'_{2p}$ , les indices de Kronecker de  $\mathcal{S}'$ . Supposons de plus que  $\mathcal{S}'$  ne contienne pas de vecteur constant non nul, c'est-à-dire que  $M'_1 > 0$ .*

*Soit  $N$  un entier tel  $N \geq 2 \sum_{i=1}^p \deg(h_i(z))$ , où  $h_i(z)$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $H(z)$ . Alors, si  $G(z) = \sum_{k=0}^N G_k z^{-k}$  est une matrice polynomiale  $(q-2p) \times q$  de degré  $N$  et de rang générique complet  $(q-2p)$  vérifiant  $G(z)H(z) = 0$ , la matrice  $\mathcal{G} = [G_0^T, \dots, G_N^T]^T$  est de rang colonne complet, aussi  $R_0$  est identifiable à partir de (4). En définitive,  $H(z)$  est identifiable à partir de la fonction de covariance complète  $\{R_i\}_{i=0}^M$ .*

**Preuve.** Les lignes de  $G(z)$  appartiennent à  $\mathcal{S}'^\perp$ . Pour qu'elles engendrent  $\mathcal{S}'^\perp$ , il faut que  $N \geq M'_{q-2p}^\perp$  (voir §2.2). On sait que  $\sum_{j=1}^{q-2p} M'_j^\perp = \sum_{i=1}^{2p} M'_i$  [10] [11]. Or d'une part  $M'_{q-2p}^\perp \leq \sum_{j=1}^{q-2p} M'_j^\perp$ , et d'autre part  $\sum_{i=1}^{2p} M'_i \leq \sum_{i=1}^p (\deg(h_i(z)) + \deg(h_i(ze^{i\alpha\pi}))) = 2 \sum_{i=1}^p \deg(h_i(z))$ .

L'inégalité  $N \geq M'_{q-2p}^\perp$  est donc observée si  $N$  vérifie  $N \geq 2 \sum_{i=1}^p \deg(h_i(z))$ . L'identifiabilité est une application directe du lemme 1. ■

Ces conditions d'identifiabilité sont moins restrictives que celles de l'algorithme proposé dans [8] (qui requiert que  $H(z)$  soit irréductible, que toutes les colonnes de  $H(z)$  aient même degré  $M$ , que  $H_M$  soit de rang complet et que  $M-1 \geq M'_{q-p}$ ). Enfin, il est intéressant de constater que l'algorithme s'adapte sans difficulté au cas rationnel.

## 4 Simulations

Discutons tout d'abord de mise en œuvre pratique. En effet, la 1<sup>ère</sup> étape de l'algorithme consiste à trouver une matrice polynomiale  $G(z) = \sum_{k=0}^N G_k z^{-k}$ , de dimensions  $(q-2p) \times q$ , dont les lignes engendrent  $\mathcal{S}'^\perp$ ; ce point étant délicat, nous évoquons brièvement notre solution.

Remarquons tout d'abord que  $G(z)[H(z)H(ze^{i\alpha\pi})] = 0$  ssi  $[G_0 \dots G_N]T_N(Q) = 0$ , où  $T_N(Q)$  est définie en (6). Il est donc clair que le s.e.v. dans lequel nous devons chercher les lignes de  $[G_0, \dots, G_N]$  est le noyau à gauche de  $T_N(Q)$ . En pratique, cela signifie que nous allons minimiser une forme quadratique construite sur le Grammien d'une estimée empirique  $T_N(\hat{Q})$  de  $T_N(Q)$ ; une contrainte de non-trivialité doit évidemment être introduite.

Par ailleurs dans le Th. 1  $G(z)$  doit être une base polynomiale minimale de  $\mathcal{S}'^\perp$ . Nous choisissons donc la contrainte de façon à forcer cette exigence théorique. Puisque  $G(z)$  est polynomiale, elle est de rang générique complet  $(q-2p)$  ssi elle est de rang complet pour au moins une valeur  $z_0 \in \{\mathbb{C} \cup \infty\}$ . Or il existe des bases de  $\mathcal{S}'^\perp$  qui sont de rang complet à l'infini: par exemple, les bases polynomiales minimales sont irréductibles et vérifient donc cette propriété. Nous pouvons donc choisir  $G(z)$  de telle sorte que  $G_0 = G(z = \infty)$  soit de rang ligne complet. Enfin, nous pouvons supposer sans perte de généralité que les lignes de  $G_0$  sont orthogonales. Nous résolvons donc le problème d'optimisation suivant (notre solution ne peut être présentée ici faute de place) :

$$\begin{cases} \min. \text{Tr.}\{[\hat{G}_0 \dots \hat{G}_N](T_N(\hat{Q})T_N^T(\hat{Q}))[\hat{G}_0 \dots \hat{G}_N]^T\} \\ \text{sous la contrainte : } \hat{G}_0 \hat{G}_0^T = I_{q-2p} \end{cases}$$

Venons en au modèle. Nous prenons  $p = 2$  et  $q = 7$ . Soit  $H(z) = [h_1(z) \ h_2(z)]$ ;  $\deg(h_1(z)) = 3$  et  $\deg(h_2(z)) = 4$ , donc  $M = 4$ . Les 63 inconnues de  $H(z)$  sont tirées de façon aléatoire sous une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Nous prenons  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ , avec  $\sigma_{ij} = (-\lambda)^{|i-j|}/(1-\lambda^2)$  et  $\lambda = 0.9$  (le bruit est donc un « processus stationnaire spatial AR d'ordre 1 »). Le paramètre  $\alpha$  du §3 est choisi égal à 1. La raison en est que dans  $Q_1(z)$ , tous les termes  $R_k$  d'indices pairs s'annulent, et n'ont donc pas besoin d'être estimés. Finalement, dans nos simulations, les résultats pour un canal donné sont moyennés sur 50 réalisations; puis ces résultats sont moyennés sur 20 canaux.

Dans la première expérience nous calculons  $\hat{\Sigma}$  comme  $\hat{R}_0^y - \hat{R}_0$ . La figure 1 montre l'erreur relative  $\eta = \|\Sigma - \hat{\Sigma}\|_{fro} / \|\Sigma\|_{fro}$  ( $\|\cdot\|_{fro}$  est la norme de Frobenius) en fonction de la taille de l'échantillon, pour des rapports signal

sur bruit égaux à 5 dB et à 10 dB. Notons que  $\eta$  est plus faible pour le bruit de plus grande puissance. On peut justifier intuitivement cette propriété: soit  $S^y(z) = H(z)H^T(z^{-1}) + \Sigma$ ; alors d'après (3), l'équation d'identification de  $\Sigma$  s'écrit aussi  $G(z)S^y(z) = G(z)\Sigma$ . Les erreurs d'estimation sur  $G(z)$  affectent donc plus l'estimation de  $\Sigma$  lorsque  $\Sigma$  est une matrice dont la norme est petite.

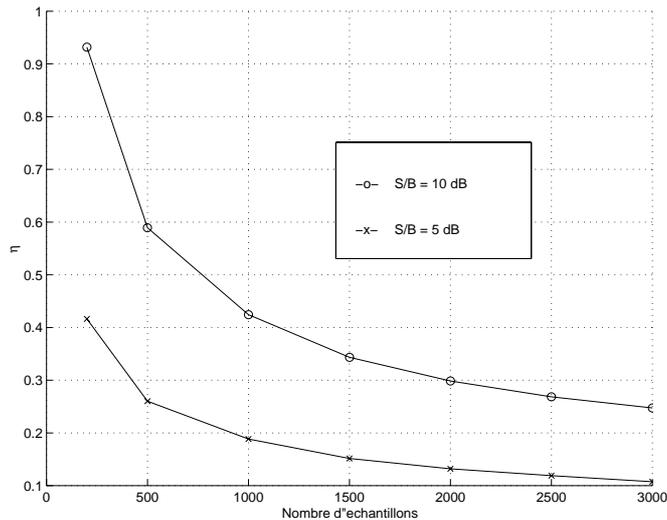


FIG. 1: Erreur relative sur  $\Sigma$

Nous mesurons ensuite l'erreur relative sur le processus d'identification global. Une fois  $R_0$  estimé, la dernière étape consiste en effet à identifier  $H(z)$  par un algorithme de réalisation stochastique. Pour les simulations, nous nous sommes placés sous l'hypothèse d'irréductibilité et avons utilisé un algorithme de « prédiction linéaire » [12] [13]. Cet algorithme du second ordre identifie  $F(z) = H(z)Q$  pour une certaine matrice constante orthogonale  $Q$ . Le critère d'erreur choisi est

$$\xi = \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} \|S(e^{i\omega}) - \widehat{S}^{(F)}(e^{i\omega})\|_{f_{ro}}^2 d\omega}{\int_0^{2\pi} \|S(e^{i\omega})\|_{f_{ro}}^2 d\omega}}$$

où  $\widehat{S}^{(F)}(z) = \widehat{F}(z)\widehat{F}^T(z^{-1}) = \sum_k \widehat{R}_k^{(F)} z^{-k}$ .

L'erreur est comparée à celle obtenue par un algorithme de prédiction linéaire « classique », c'est-à-dire qui suppose (à tort) que  $\Sigma = \sigma^2 I_q$ . Il est clair que les estimées obtenues par un tel algorithme ne convergent pas vers la solution exacte. Nous avons observé que le bénéfice du nouvel algorithme apparaît d'autant mieux que  $\Sigma$  s'éloigne de  $\sigma^2 I$ .

## Références

[1] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, A new approach to blind identification and equalization of multipath channels, *Proc. 25<sup>th</sup> Asilomar Conference*, Pacific Grove, CA, 1991, pp. 856-860.

[2] E. Moulines, P. Duhamel, J.F. Cardoso and S. Mayrargue, Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters, *IEEE Trans. SP*, vol. 43, N. 2, Feb 1995, pp. 516-525

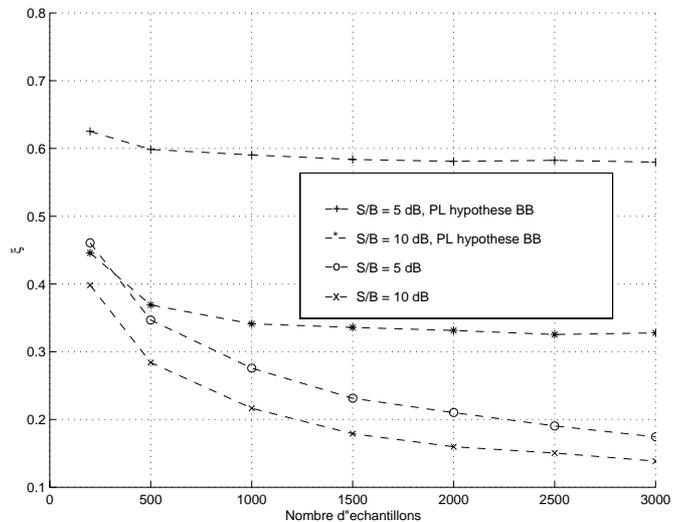


FIG. 2: Erreur relative  $\xi$

[3] W.S. Burdick, "Underwater Acoustic System Analysis", Prentice Hall, 1984.

[4] J.P. Lécadre, "Parametric methods for spatial signal processing in the presence of unknown colored noise fields", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, N. 7, pp. 965-83, 1989

[5] I. Fijalkow and P. Loubaton, Identification of rank one rational spectral densities from noisy observations: a stochastic realization approach, *System and Control Letters*, 24, 1995, pp. 201-205

[6] K. Abed-Meraim, Y. Hua, P. Loubaton and E. Moulines, Subspace method for blind identification of multichannel FIR systems in noise field with unknown spatial covariance, *IEEE SP Letters*, vol. 4, N. 5, May 1997, pp. 135-137

[7] P. Vandaele and M. Moonen, A Stochastic subspace algorithm for blind channel identification in noise fields with unknown spatial color, *Proc. ICASSP*, Phoenix, USA, pp 2619-2622, March 1999

[8] F. Desbouvries, I. Fijalkow and P. Loubaton, On the identification of noisy MA models, *IEEE Trans. AC*, Vol. 41, N. 12, December 1996, pp. 1810-14

[9] F. Desbouvries and P. Loubaton, On the identification of certain rational transfer functions from truncated autocovariance sequences, *IEEE Trans. AC*, May 1999.

[10] G. D. Forney, Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems, *SIAM J. Control*, vol 13-3, May 1975, pp. 493-520

[11] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980

[12] D.T.M. Slock, Blind fractionally-spaced equalization, perfect reconstruction filter banks and multichannel linear prediction, *Proc. ICASSP*, Adelaide, Australia, Vol. IV, May 1994, pp 585-588

[13] A. Gorokhov, P. Loubaton and E. Moulines, Second order blind equalization in multiple input multiple output FIR systems: A weighted least squares approach, *Proc. ICASSP*, Atlanta, 1996, pp. 2415-2418