

Suivi de raies spectrales avec un faible coût de calcul

François AUGER, Mickaël HILAIRET

GE 44, Bd de l'Université, BP 406, 44602 Saint Nazaire cedex, France

auger@ge44.univ-nantes.fr

Résumé – Cet article présente le principe et les premiers résultats de caractérisation d'un nouvel algorithme d'estimation de fréquence et de suivi de composantes sinusoïdales. Son principe s'appuie sur la technique de réallocation des représentations temps-fréquence, qui est modifiée pour pouvoir traiter économiquement des signaux à valeurs réelles. Les résultats obtenus ne semblent pas moins intéressants que ceux fournis par les approches récemment publiées.

Abstract – This paper presents the principle and some preliminary results of a new frequency estimator. Its principle is not far from the reassignment principle, which is modified to tackle real valued signals. Some results show that this approach is at least comparable to the most recent algorithms.

1 Introduction

Dans de nombreux phénomènes physiques, l'information recherchée réside dans la valeur de la fréquence "instantanée" [16, 17] d'une des composantes du signal observé. En génie électrique par exemple, ce problème se pose notamment dans la dépollution harmonique des réseaux électriques et dans la commande sans capteur mécanique des machines tournantes. Malheureusement, l'estimation au sens du maximum de vraisemblance de cette fréquence conduit à un critère fortement non-linéaire lorsque le signal comporte plusieurs composantes (dont il faut impérativement connaître le nombre) [13, 14]. Ceci rend difficile l'utilisation de ce type d'estimateur, et a conduit à l'émergence d'un nombre important de techniques d'estimation [5, 1], avec des principes, des caractéristiques et des champs d'application privilégiés très variés.

Cet article présente un nouvel algorithme d'estimation de fréquence et de suivi de composantes sinusoïdales. La particularité de cet estimateur est de ne faire appel à aucune fonction transcendante (de type arc-tangente ou arc-cosinus) et de ne nécessiter qu'un nombre assez réduit d'opérations, ce qui permet d'envisager son utilisation en tant que tâche supplémentaire d'un algorithme de commande d'une machine tournante ou d'un filtre actif. Enfin, malgré cette simplicité, il ne présente aucune erreur d'estimation lorsque le signal est constitué uniquement d'une sinusoïde et possède de bonnes caractéristiques statistiques.

2 Présentation de l'estimateur proposé

2.1 Principe théorique

Avant de présenter en détail l'estimateur proposé, il semble utile d'en exposer le principe, représenté figure 1. Cet estimateur est constitué de trois blocs successifs :

- Le premier est un filtre passe-bande de fréquence centrale λ_0 et de largeur de bande $\Delta\lambda$. L'objectif de ce filtre est de conserver la sinusoïde dont on veut estimer la fréquence, supposée voisine de λ_0 , et d'atténuer toutes les autres composantes du

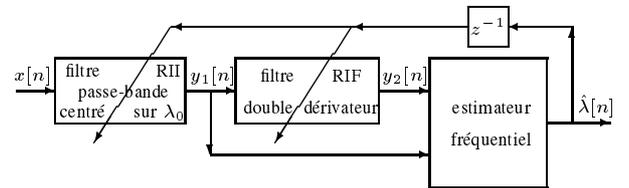


FIG. 1: Principe de fonctionnement de l'estimateur fréquentiel proposé.

signal.

- Le signal $y_1[n]$ obtenu en sortie du filtre passe-bande excite ensuite un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) dont la réponse fréquentielle au voisinage de λ_0 est très peu différente de celle d'un filtre double dérivateur (inverseur) idéal $H_2(\lambda) = -(j2\pi\lambda) = 4\pi^2\lambda^2$.
- Si $y_1[n] = A \cos(2\pi\lambda n + \varphi)$, alors le signal obtenu en sortie du filtre double dérivateur est $y_2[n] = 4\pi^2\lambda^2 y_1[n]$. Puisque les deux signaux $y_1[n]$ et $y_2[n]$ sont colinéaires, on pourrait envisager d'estimer λ en calculant

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{y_2[n]}{y_1[n]}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{y_1[n] y_2[n]}{y_1[n]^2}}$$

Mais la possibilité d'avoir $y_1[n] = 0$ rend irréaliste cette solution, qui serait également très sensible à un bruit additif. Le bloc fonctionnel d'"estimation fréquentielle" situé au bout de la chaîne de traitement de la figure 1 vise donc à construire une estimation $\hat{\lambda}[n]$ un peu plus pertinente de la fréquence de la sinusoïde.

Enfin, pour assurer le suivi de la sinusoïde, la fréquence instantanée estimée $\hat{\lambda}[n]$ est utilisée à l'instant suivant comme fréquence centrale λ_0 du filtre passe-bande, et éventuellement comme fréquence autour de laquelle le filtre double dérivateur utilisé doit avoir une réponse fréquentielle proche de sa valeur idéale.

De par son principe, l'estimateur proposé est assez voisin de la technique de réallocation du spectrogramme. En suivant les notations de [2], l'opérateur de réallocation fréquentielle du spectrogramme calculé pour le signal $x(t)$ au point (t, ω) peut

en effet s'écrire sous la forme :

$$\hat{\omega}(x; t, \omega) = \mathcal{I}m \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} j\Omega X(\Omega) H^*(\omega - \Omega) e^{j2\pi\Omega t} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) H^*(\omega - \Omega) e^{j2\pi\Omega t} dt} \right\}$$

Il peut donc être interprété comme la partie imaginaire d'un rapport dont le dénominateur correspond au signal obtenu en sortie d'un filtre passe-bande centré sur ω , de réponse fréquentielle $H^*(\omega - \Omega)$, et dont le numérateur est la dérivée ($j\Omega$) de ce dernier signal. La seule différence entre le calcul de l'opérateur de réallocation fréquentielle et l'estimateur de fréquence proposé est l'utilisation d'un filtre double dérivateur au lieu d'un dérivateur simple, qui permet de traiter des signaux réels sans calculer leur projection analytique par une transformée de Hilbert.

Enfin, malgré une certaine similarité, ce principe ne s'apparente pas à une boucle à verrouillage de phase [15], dans la mesure où il ne cherche pas à synchroniser un oscillateur avec le signal à analyser, et où la rétroaction présente dans la figure 1 est uniquement d'ordre paramétrique.

2.2 Choix techniques

2.2.1 Choix du filtre passe-bande

Une façon simple de réaliser un tel filtre est de le déduire d'un filtre passe-tout à réponse impulsionnelle infinie (RII) du deuxième ordre [18] :

$$\mathcal{H}_{pb}(z) = \frac{\mathcal{Y}_1(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{H}_{pt}(z)) \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_{pt}(z) = \frac{r^2 - (1 + r^2)\beta z^{-1} + z^{-2}}{1 - (1 + r^2)\beta z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (2)$$

$$\text{avec } \beta = \cos(2\pi\lambda_0) \text{ et } r^2 = \frac{1 - \tan(\pi\Delta\lambda)}{1 + \tan(\pi\Delta\lambda)}$$

La bande passante $\Delta\lambda$ du filtre doit être choisie pour vérifier un compromis entre deux caractéristiques rendues antagonistes par l'inégalité de Heisenberg-Gabor [9] : la résolution de l'estimateur, et sa capacité de poursuite.

La principale justification du choix de ce type de filtre est l'existence d'une structure de réalisation (voir [18] et [3], p 99) à la fois efficace et robuste vis à vis des erreurs de troncature numérique, ce qui permet d'envisager sa réalisation sur des processeurs à virgule fixe.

La figure 2 montre la réponse fréquentielle d'un filtre de ce type pour $\lambda = 0.05$ et $\Delta\lambda = 0.001$. On peut remarquer que ce filtre atténue très fortement les fréquences situées en dehors de la bande passante. De plus, $H_{pb}(0) = H_{pb}(0.5) = 0$, comme le laissaient prévoir les expressions 1 et 2.

2.2.2 Choix du filtre double dérivateur

Pour choisir le filtre double dérivateur, une première approche consiste à utiliser un filtre qui n'est pas paramétré par la fréquence à estimer. Une telle approche n'est possible que dans certains cas, mais elle permet de réduire de manière conséquente le coût de calcul de l'algorithme, puisque ce dernier ne fait alors appel à aucun calcul de fonction trigonométrique.

Ainsi, pour des fréquences à estimer faibles par rapport à la fréquence d'échantillonnage, on peut chercher les coefficients du filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) qui a le même

comportement à l'origine que le filtre idéal $G(\lambda) = 4\pi^2\lambda^2$. Pour un filtre d'ordre N (donc de "longueur" $N+1$) de fonction de transfert $\mathcal{H}(z) = \sum_{k=0}^N h_k z^{-k}$ et de réponse fréquentielle $H(\lambda) = \mathcal{H}(z = e^{j2\pi\lambda})$, la similarité des comportements s'obtient en imposant un point de contact d'ordre N en $\lambda = 0$ entre les deux réponses fréquentielles souhaitée $G(\lambda)$ et obtenue $H(\lambda)$:

$$\frac{d^n H}{d\lambda^n}(0) = \frac{d^n G}{d\lambda^n}(0) \quad \text{pour } n \in [0, N] \quad (3)$$

$$\text{avec } \frac{d^n G}{d\lambda^n}(0) = \begin{cases} 8\pi^2 & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

Ces relations conduisent à un système linéaire de dimension $N + 1$, qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^N h_k = \begin{cases} -2 & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Les coefficients h_k solution de ce système de Vandermonde sont des nombres rationnels, qui peuvent être calculés formellement (voir [11], §15.5) ou numériquement par un algorithme rapide (voir [10], p 187). Pour $N = 5$, on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{45}{12} & h_1 &= \frac{154}{12} & h_2 &= -\frac{214}{12} \\ h_3 &= \frac{156}{12} & h_4 &= -\frac{61}{12} & h_5 &= \frac{10}{12} \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient alors une réponse fréquentielle (voir figure 3.a) qui présente un comportement proche du filtre idéal pour $|\lambda| < 0.12$, donc pour environ $F_e > 10 f$. L'utilisation de filtres d'ordre plus élevés ne semble pas justifiée, dans la mesure où leur comportement n'est pas significativement meilleur.

Par contre, si la fréquence à estimer présente des variations importantes par rapport à la fréquence d'échantillonnage, il est nécessaire d'utiliser un filtre paramétré par une fréquence λ_0 autour de laquelle la réponse fréquentielle du filtre double dérivateur utilisé doit être la plus proche possible du gabarit $G(\lambda) = 4\pi^2\lambda^2$. Pour un filtre RIF d'ordre $N = 2M + 1$, cet objectif peut être atteint en imposant deux points de contact d'ordre M en λ_0 et $-\lambda_0$ entre la réponse fréquentielle du filtre et le gabarit. Le système d'équations linéaires obtenu, de dimension $N + 1$, est inversible si $\lambda_0 \neq 0$ (si $\lambda_0 = 0$, il faut utiliser le filtre obtenu par les équations 3 et 4), et peut être résolu formellement par pivot de Gauss. Par exemple, pour un filtre d'ordre $N = 5$, de fonction de transfert et de réponse fréquentielle

$$\mathcal{H}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_5 z^{-5} \quad (7)$$

$$H(\lambda) = h_0 + h_1 e^{-j2\pi\lambda} + \dots + h_5 e^{-j10\pi\lambda}, \quad (8)$$

ce principe conduit à imposer les 6 relations

$$\begin{aligned} H(\lambda_0) &= H(-\lambda_0) = G(\lambda_0) = 4\pi^2\lambda_0^2 \\ H'(\lambda_0) &= -H'(-\lambda_0) = G'(\lambda_0) = 8\pi^2\lambda_0 \\ H''(\lambda_0) &= H''(-\lambda_0) = G''(\lambda_0) = 8\pi^2 \end{aligned}$$

qui forment un système linéaire de dimension 6, dont la solution est :

$$h_5 = \frac{(1 + \sin(\theta)^2)\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)}{2\sin(\theta)^3} \quad (9)$$

$$h_4 = -\frac{\theta + \sin(\theta)(11 - 12\sin(\theta)^2)h_5}{2\sin(\theta)\cos(\theta)} \quad (10)$$

$$h_3 = \frac{\theta}{\sin(\theta)} - 4\cos(\theta)h_4 - 2(5 - 6\sin(\theta)^2)h_5 \quad (11)$$

$$h_2 = -4 \cos(\theta)h_3 - (10 - 12 \sin(\theta)^2)h_4 - 4 \cos(\theta)(5 - 8 \sin(\theta)^2)h_5 \quad (12)$$

$$h_1 = -2 \cos(\theta)h_2 - (3 - 4 \sin(\theta)^2)h_3 - 4 \cos(\theta)(1 - 2 \sin(\theta)^2)h_4 - (5 - 20 \sin(\theta)^2 + 16 \sin(\theta)^4)h_5 \quad (13)$$

$$h_0 = \theta^2 - \cos(\theta)h_1 - \cos(2\theta)h_2 - \cos(3\theta)h_3 - \cos(4\theta)h_4 - \cos(5\theta)h_5 \quad (14)$$

avec $\theta = 2\pi\lambda_0$. On peut vérifier que pour $\lambda_0 = 1/4$, on obtient

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\pi^2-1}{4} & h_1 &= \pi & h_2 &= -\frac{1}{2} \\ h_3 &= \frac{3\pi}{2} & h_4 &= -\frac{1}{4} & h_5 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

qui constituent un nouveau filtre double dérivateur non-paramétré, qui peut être utilisé lorsque la fréquence à estimer est au voisinage du quart de la fréquence d'échantillonnage. Les figures 3.b et 3.c présentent les réponses fréquentielles des filtres obtenus respectivement pour $\lambda_0 = 0.25$ et $\lambda_0 = 0.175$.

Les principales opérations nécessaires pour le calcul de ces coefficients sont donc l'évaluation de $\beta = \cos(\theta)$, $\gamma = \sin(\theta)$, $\gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$, et trois divisions. Aucun autre calcul trigonométrique n'est nécessaire.

2.2.3 Choix de l'estimateur fréquentiel

Pour s'affranchir des problèmes de division par zéro, l'estimateur fréquentiel proposé calcule

$$\hat{\lambda}[n] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k y_1[n-k] y_2[n-k]}{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k y_1[n-k]^2}}, \quad (16)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$, qui correspond à la minimisation du critère quadratique $J(\lambda[n]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k (y_2[n-k] - 4\pi^2 \lambda[n]^2 y_1[n-k])^2$. Cette expression permet également de "régulariser" l'estimation de la fréquence lorsque le signal est bruité. Elle est bien sûr calculée récursivement:

$$\hat{\lambda}[n] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N[n]}{D[n]}} \quad (17)$$

$$\text{avec } N[n] = \alpha N[n-1] + y_1[n] y_2[n] \quad (18)$$

$$D[n] = \alpha D[n-1] + y_1[n]^2 \quad (19)$$

Le paramètre α doit satisfaire un compromis entre la capacité de poursuivre des variations rapides de fréquence et la diminution de la variance de l'erreur d'estimation, qui dépend du problème à résoudre. Des essais expérimentaux ont permis de constater que des résultats satisfaisants sont obtenus pour $\alpha = e^{-2\pi\Delta\lambda}$.

En supposant que $y_1[n]$ est un signal déterministe et que $y_2[n] = (2\pi\lambda)^2 y_1[n] + w[n]$, où $w[n]$ est une séquence centrée blanche et de variance σ^2 , alors

$$\hat{\lambda}[n] = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k y_1[n-k] w[n-k]}{4\pi^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k y_1[n-k]^2}} \quad (20)$$

$$\mathbb{E} [\hat{\lambda}[n]^2] = \lambda^2 \quad (21)$$

$$\text{Var} [\hat{\lambda}[n]^2] = \frac{\sigma^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k} y_1[n-k]^2}{4\pi^2 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k y_1[n-k]^2 \right)^2} \quad (22)$$

Mais lorsque le signal analysé $x[n]$ est bruité, $y_1[n]$ et $y_2[n]$ ont tous les deux des composantes aléatoires. L'étude des moments

statistiques de cet estimateur dans un contexte réaliste est donc plus difficile, et doit faire l'objet d'une étude complémentaire, s'appuyant notamment sur un travail précédant [6].

3 Éléments d'appréciation

Pour illustrer succinctement le principe de fonctionnement de l'estimateur, la figure 4 présente les courbes des fréquences instantanées (comparées aux fréquences instantanées exactes) d'un signal à valeurs réelles, échantillonné à 5 kHz, constitué de deux composantes à modulation sinusoïdale de fréquence (d'amplitude 1) et de deux composantes de fréquences constantes (et d'amplitude 0.5), noyées dans un bruit blanc d'écart type 0.1. Cette figure montre les bonnes capacités d'estimation et de poursuite de l'algorithme. L'erreur d'estimation de la composante à 500 Hz est due à l'utilisation d'un filtre double-dérivateur à coefficients constants. Elle disparaît lorsqu'on utilise un filtre dont les coefficients sont recalculés à chaque itération. À titre de comparaison, la figure 5 montre une représentation temps-fréquence (pseudo Wigner-Ville lissée) [9] de ce même signal. La figure 6 montre l'évolution au cours du temps de l'écart quadratique moyen (calculé sur 150 réalisations de bruit) pour l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde bruitée avec un RSB de 0 dB, avec $\lambda = 0.03$, $\Delta\lambda = 0.006$, $\Delta\lambda = 0.0025$ ou $\Delta\lambda = 0.001$. Elle montre la rapidité de convergence de l'algorithme proposé, qui semble inversement proportionnelle à $\Delta\lambda$. La figure 7 montre l'évolution en fonction du RSB de l'écart quadratique moyen au bout de 2000 points, dans ce même contexte. Cette figure montre un comportement satisfaisant de l'estimateur dès que le RSB dépasse -10 dB.

4 Conclusion

Dans cet article, le principe d'un nouvel algorithme d'estimation de fréquence a été présenté, étayé de quelques résultats préliminaires encourageants. L'étude amorcée ici, dont la reproductibilité et l'accessibilité est facilitée par la disponibilité de fichiers MATLAB [4], doit être poursuivie par une évaluation précise du coût algorithmique de cet algorithme, par une comparaison avec des algorithmes similaires [7, 8, 12, 19], et par une caractérisation statistique plus approfondie de cet estimateur.

Références

- [1] F. Auger, I. Vincent, "Estimation optimale de la fréquence instantanée de signaux non-stationnaires," *proc Grets* 93, pp 367-370.
- [2] F. Auger, P. Flandrin, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol 43, No 5, pp 1068-1089, Vol 43, No 8, pp 2038, 1995.
- [3] F. Auger, "Introduction à la théorie du signal et de l'information - cours et exercices," *éditions Technip*, 1999.
- [4] <http://iut-saint-nazaire.univ-nantes.fr/~auger/publis.html>
- [5] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal", *Proc IEEE*, "Part 1: fundamentals", pp 520-539, "part 2: algorithms and applications", pp 540-568, Vol 80, No 4, 1992.
- [6] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin, "On the statistics of spectrogram reassignment vectors," *Multidimensional systems and signal processing*, Vol 9, No 4, pp 355-362, oct 1998.

- [7] K. Daeyoung, M.J. Narasimha, D.C. Cox, "An improved single frequency estimator," *IEEE SP Letters*, Vol 3, No 7, pp 212-214, july 1996.
- [8] L.B. Fertig, J.H. Mc Clellan, "Instantaneous frequency estimation using linear prediction with comparison to the DESAs," *IEEE Sig. Proc. Letters*, Vol 3, No 2, pp 54-56, feb. 1996.
- [9] P. Flandrin, "Temps-Fréquence", Hermès, 1993.
- [10] G.H. Golub, C.F. van Loan, "Matrix computations", Johns Hopkins University Press, 1996.
- [11] R.W. Hamming, "Numerical Methods for scientists and engineers", McGraw-Hill, 1973.
- [12] L. Hsu, R. Ortega, G. Damm, "A globally convergent frequency estimator," *IEEE Trans on AC*, Vol 44, No 4, pp 698-713, april 1999.
- [13] S.M. Kay, V. Nagesha, "Maximum likelihood estimation of signals in AR noise," *IEEE Trans. on SP*, Vol 42, No 1, pp 88-101, 1995.
- [14] V. Nagesha, S. Kay, "Spectral analysis based on the canonical autoregressive decomposition," *IEEE Trans. on SP*, Vol 44, No 7, pp 1719-1733, 1997.
- [15] Philips Semiconductors, "HEF4046 Phase-locked loop, product specification," jan 1995.
- [16] B. Picinbono, "On instantaneous amplitude and phase of signals," *IEEE Trans on Sig. Proc.*, Vol 45, No 3, pp 552 -560, 1998.
- [17] B. Picinbono, "Some remarks on instantaneous amplitude and frequency of signals," *proc IEEE-SP Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp 293-300, 1998.
- [18] P.A. Regalia, S.K. Mitra, P.P. Vaidyanathan, "The digital all-pass filter: A versatile signal processing building block", *Proc IEEE*, Vol 76, No 1, pp 19-37, 1988.
- [19] T.S. Sidhu, M.S. Sachdev, "An iterative technique for fast and accurate measurement of power system frequency", *IEEE Trans on Power Delivery*, Vol 13, No 1, pp 109-115, jan 1998.
- [20] T.S. Sidhu, "Accurate measurement of power system frequency using a digital signal processing technique," *IEEE Trans on Instrumentation and Measurement*, Vol 48, No 1, pp 75-81, feb 1999.

