

# DETECTION DE RUPTURES DANS UN BRUIT MULTIPLICATIF PAR METHODES DES MOINDRES CARRES ET RECUIT SIMULE : APPLICATION AUX IMAGES RSO

Martial COULON, Jean-Yves TOURNERET

ENSEEIHNT/TéSA

2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 07, France  
coulon@len7.enseeiht.fr, tournere@len7.enseeiht.fr

**Résumé** — On étudie dans cet article la détection de ruptures multiples dans un signal perturbé par du bruit multiplicatif et additif à l'aide d'un critère des moindres carrés. Cette méthode permet de prendre en compte des bruits colorés et/ou de lois inconnues. Dans le cas d'un nombre de ruptures inconnu, on introduit un terme de pénalisation qui permet de régler la résolution du signal. Le critère est alors minimisé à l'aide de l'algorithme du recuit simulé. Cette technique est alors appliquée à la détection de contours dans les images Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO).

**Abstract** — This article deals with multiple abrupt change detection in signals corrupted by multiplicative and additive noise, using a least-square criterion. This approach does not require knowledge on the process statistics. Moreover, the noises can also be colored. In the case of an unknown number of changes, a penalizing term is introduced, which allows to adjust the signal resolution. The criterion is then minimized using the simulated annealing algorithm. This study is applied to edge detection in Synthetic Aperture Radar (SAR) images.

## 1 Position du problème

Nous nous intéressons dans cet article à la détection de ruptures pour des signaux constants par morceaux perturbés par un bruit additif et un bruit multiplicatif. La présence de bruit multiplicatif a été observée dans de nombreuses applications comme les télécommunications (phénomène d'évanouissement), ou en traitement d'images (bruit de scintillement dans les images RSO). Nous considérons plus particulièrement le problème de la détection de contours dans les images RSO.

Ce problème fait depuis quelques années l'objet d'une recherche intensive [1], [4]. Lorsque les lois des bruits additif et multiplicatif sont connues, la détection de ruptures peut être effectuée par inférence bayésienne [3]. Cependant, la loi a posteriori des paramètres inconnus n'est pas toujours simple à étudier, et de plus, la connaissance a priori des statistiques des bruits est souvent peu réaliste.

Cet article propose d'utiliser la méthode des Moindres Carrés (MC), qui permet de s'affranchir de toute connaissance sur la loi des bruits additif et multiplicatif. Elle est également adaptée au cas d'un bruit coloré. L'optimisation du critère des MC est effectuée à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC). Les résultats obtenus sont appliqués à la détection de contours dans les images RSO. Ce problème fait encore l'objet de nombreux travaux, car les méthodes usuelles comme celle du gradient sont assez peu efficace en présence de bruit multiplicatif. Un récent article [2] propose une détection

de ruptures ligne par ligne et colonne par colonne à l'aide d'un filtrage exponentiel symétrique infini. Le résultat de ce filtrage définit une carte de force qui, à l'aide de l'algorithme du bassin versant, permet d'extraire les contours de l'image.

Cet article présente une nouvelle méthode de détection de contours ligne par ligne et colonne par colonne plus performante que la méthode proposée dans [2], au prix d'un coût calculatoire plus élevé.

L'intensité d'une image RSO en un pixel donné, notée  $I$ , suit une loi exponentielle de paramètre  $m = E[I]$ . Afin de réduire la variance du bruit de scintillement (multiplicatif), il est d'usage de moyenner plusieurs prises de vue indépendantes. L'image d'intensité moyennée sur le pixel devient alors  $\tilde{I} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P I(i)$ , où  $P$  désigne le nombre de prises de vue. La variable  $\tilde{I}$  peut s'exprimer comme le produit de l'intensité du pixel considéré (i.e.  $m$ ) et d'une variable aléatoire  $B$  (modélisant le bruit de scintillement) qui suit une loi Gamma de paramètres  $(P, P)$  [7]. On a alors  $E[B] = 1$  et  $var(B) = 1/P$ , ce qui montre l'intérêt de moyenner différentes prises de vue. Une ligne (ou une colonne) de l'image peut alors se modéliser de la façon suivante :

$$y_n = b_n m_n + \nu_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

où  $b_n$ ,  $\nu_n$ ,  $m_n$  et  $y_n$  représentent respectivement le bruit multiplicatif, le bruit additif, la ligne exacte de l'image et la ligne bruitée.  $\nu_n$  est un processus aléatoire de loi indéterminée et de moyenne nulle. La ligne  $m_n$  est une fonction étagée comprenant  $K$  niveaux (soit  $K - 1$  ruptures) qui

représentent chacun une certaine réflectivité. Notons  $T$  la période d'échantillonnage, et  $l_i$  l'échantillon précédant la  $i^{\text{ème}}$  rupture (avec  $l_0 = 0$  et  $l_K = N$ ) : la rupture réelle a lieu à l'instant  $t_i = l_i T + \tau$ , avec  $0 < \tau < T$ . On a alors :

$$m_n = A_i, \quad n \in [l_{i-1}, l_i], \quad i = 1, \dots, K$$

où  $A_i$  représente l'intensité du  $i^{\text{ème}}$  niveau. D'après ce qui précède, la loi marginale de  $b_n$  est une loi Gamma de paramètres  $(P, P)$ . Cependant, la coloration du bruit implique que la loi jointe de la ligne n'a pas d'expression simple, même si l'on néglige la présence de bruit additif.

## 2 Approche par les moindres carrés

Lorsque le nombre de ruptures est connu, l'algorithme des moindres carrés consiste à déterminer les instants de ruptures  $l_i$  et les amplitudes  $A_i$  en minimisant le critère suivant :

$$J_K(l, A) = \sum_{i=1}^K \sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} (y_n - A_i)^2 \quad (2)$$

avec  $l = (l_1, \dots, l_{K-1})^T$  et  $A = (A_1, \dots, A_K)^T$ .

$A_i$  doit être remplacé par l'estimateur habituel de la moyenne de  $y_n$  sur le segment  $[l_{i-1} + 1, l_i]$  (obtenu en annulant la dérivée du critère par rapport aux amplitudes), c'est-à-dire :

$$\hat{A}_i(l) = \frac{1}{l_i - l_{i-1}} \sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} y_n \quad (3)$$

L'estimateur des moindres carrés de  $l$  s'obtient alors en minimisant  $J_K(l, \hat{A}(l))$  par rapport à  $l$ . Lavielle et Moulines étudient dans [5] le cas d'un signal constant par morceaux perturbé par du bruit additif. Un cas plus général de détection de ruptures est traité dans [6]. On peut vérifier que les résultats proposés dans [6] peuvent s'appliquer au modèle (1), c'est-à-dire que la solution  $(\hat{l}, \hat{A}(l))$  du problème (2) converge en probabilité vers la vraie valeur  $(l, A)$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , moyennant certaines hypothèses peu restrictives sur les propriétés statistiques des bruits multiplicatif et additif (en particulier, ces conditions sont vérifiées si les bruits sont des processus i.i.d. ou des processus ARMA stables).

Lorsque le nombre de ruptures est inconnu, Lavielle et Moulines proposent de pénaliser le critère  $J_K(l, A)$  [5], ce qui revient à minimiser

$$\tilde{J}(K, l, A) = \sum_{i=1}^K \sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} (v_n - A_i)^2 + \gamma(N)K \quad (4)$$

Afin d'assurer la convergence en probabilité des estimateurs  $(\hat{K}, \hat{l}, \hat{A})$  vers  $(K, l, A)$ , le paramètre de pénalisation  $\gamma(N)$  doit être réel positif tel que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma(N) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N^{2-h} \gamma(N) = +\infty,$$

où le paramètre  $h \in [1, 2]$  dépend de la structure statistique des processus  $b_n$  et  $\nu_n$  ( $h = 1$  si ce sont des processus

ARMA). Le choix de  $\gamma(N)$  est particulièrement important puisqu'il règle l'échelle suivant laquelle le signal est perçu. En effet, plus  $\gamma(N)$  est faible, plus l'algorithme détecte de ruptures. Dans le cas extrême où  $\gamma(N) = 0$ , on détecte une rupture à chaque instant  $n$ .

Notons que le problème (2) peut se généraliser à un problème bidimensionnel (2- $\mathcal{D}$ ) sur des images RSO constituées de champs rectangulaires. Cependant, cette méthode ne peut s'appliquer en pratique car il faudrait en fait minimiser un critère sur un ensemble de motifs élémentaires formant une partition de l'image, ce qui implique une très grande complexité algorithmique.

## 3 Optimisation par les techniques MCMC

L'optimisation du critère des moindres carrés présenté précédemment nécessite un coût calculatoire qui devient vite rédhibitoire avec une méthode par énumération lorsque le nombre de points  $N$  et le nombre de ruptures  $K$  augmentent. Nous proposons dans cet article d'utiliser les techniques de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC), et en particulier l'algorithme du recuit simulé. Notons  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)^T \in \Omega = \{0, 1\}^N$  le vecteur défini par

$$\begin{cases} \omega_j = 1 & \text{s'il existe une rupture à l'instant } j \\ \omega_j = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Notons que  $\sum_{j=1}^N \omega_j = K - 1$ . Ainsi, les critères  $J(l, A)$  et  $\tilde{J}(K, l, A)$  peuvent s'exprimer en fonction de  $\omega$ . On peut alors construire une chaîne de Markov  $\Theta^n = (\Theta_i^n)_{i=1, \dots, N}$  sur  $\Omega$  grâce à l'algorithme du recuit simulé, converge en loi vers la loi uniforme sur l'ensemble des minima globaux du critère  $J$  à optimiser. Un élément de la chaîne est un vecteur  $\Theta^n(\omega)$ . La chaîne est construite de la façon suivante : 1) on choisit aléatoirement une configuration initiale  $\Theta^0 \in \Omega$ ; 2) une valeur  $z^{n+1}$  est calculée d'après  $q(z^{n+1} | \Theta^n)$ , où  $q$  est une densité de probabilité de transition sur  $\Omega$  arbitraire; 3)  $z^{n+1}$  est alors accepté comme  $\Theta^{n+1}$  avec la probabilité :

$$\alpha(\Theta^n, z^{n+1}) = \min(1, \exp(-\Delta J_n / T_n)) \quad (6)$$

où  $\Delta J_n = J(z^{n+1}) - J(\Theta^n)$  et  $T_n$  est un paramètre de température qui décroît lentement. En d'autres termes, si  $\rho$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ , on choisit :

$$\begin{cases} \Theta^{n+1} = z^{n+1} & \text{si } \ln \rho < \frac{1}{T_n} (-J(z^{n+1}) - J(\Theta^n)) \\ \Theta^{n+1} = \Theta^n & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Les échantillons  $\Theta^n(T)$  sont alors distribués suivant la loi  $\exp(-J(\Theta)/T)$ . La chaîne de Markov obtenue n'est pas homogène, car les probabilités de transition évoluent à chaque instant  $n$ . Il existe toutefois des conditions qui permettent d'assurer la convergence vers l'ensemble des minima globaux. Entre autres, on doit faire varier la température très faiblement. Il est d'usage de prendre  $T_{n+1} = \alpha T_n$  avec  $\alpha \approx 0.99$ . Après un temps de chauffage suffisamment long, on peut considérer que l'échantillon  $\Theta^n$  est une

bonne approximation de la solution du problème de minimisation, c'est-à-dire de l'estimateur des moindres carrés. Pour augmenter la vitesse de convergence, l'algorithme utilisé ici combine différents choix de probabilités de transition  $q : 1$ ) on a considéré l'échantillonneur indépendant défini par  $q(\Theta' | \Theta) = q(\Theta')$  (c-à-d que les candidats sont tirés indépendamment de la configuration courante  $\Theta$ ). Dans nos simulations,  $q$  est une loi de Bernoulli pour tout instant de rupture 2) des changements locaux peuvent également intervenir ("naissance" ou "mort" d'une rupture). 3) chaque rupture présente dans la configuration suivante est repositionnée à l'intérieur d'une petite fenêtre centrée sur la rupture considérée. Afin d'assurer la convergence, la chaîne de Markov associée à  $q$  est réversible pour ces deux procédures.

## 4 Application aux images RSO

On applique la méthode décrite précédemment sur chaque ligne et chaque colonne de l'image afin d'en restituer les contours. On suit pour cela une procédure analogue à celle donnée dans [2] en exhibant une carte de force. Pour ce faire, notons  $\bar{\Theta}_{l,i}^{NMC}(\cdot)$  (respectivement,  $\bar{\Theta}_{c,j}^{NMC}(\cdot)$ ) le vecteur estimé des probabilités de ruptures pour la  $i^{\text{ème}}$  ligne (resp.,  $j^{\text{ème}}$  colonne).  $\bar{\Theta}_{l,i}^{NMC}(j)$  (resp.,  $\bar{\Theta}_{c,j}^{NMC}(i)$ ) correspond donc à la probabilité estimée d'avoir une rupture ligne (resp., rupture colonne) au point de coordonnées  $(i, j)$ . On peut alors définir une carte de puissance de contour en posant [2] :

$$C_{i,j} = \sqrt{\left(\bar{\Theta}_{l,i}^{NMC}(j)\right)^2 + \left(\bar{\Theta}_{c,j}^{NMC}(i)\right)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

Il existe une rupture au  $(i, j)$  de l'image si  $C_{i,j}$  a une forte valeur ( $\sqrt{2}$  au maximum). Cette carte permet de restaurer les principales régions de l'image. Cependant, les frontières ainsi obtenues ne sont pas fermées et squelettisées, et ne définissent donc pas des *contours* à proprement parler. Il faut donc avoir recours à des techniques spécifiques au traitement d'images, comme l'algorithme du bassin versant ou le seuillage par dynamiques de contour [2]. Ces méthodes peuvent se décrire par analogie avec l'inondation d'une surface. Elles consistent en première approximation à considérer la carte de force comme une surface, et à faire monter de l'eau depuis le fond des vallées (c'est-à-dire les minima locaux). Les lignes de rencontre entre les différents bassins ainsi formés représentent alors les contours de l'image. Ceux-ci sont alors fermés et squelettisés. On ne peut cependant pas appliquer directement ces techniques à notre image de contour, car les nombreux trous présents dans les frontières impliquent que les bassins communiquent trop tôt. Pour remédier à ce problème, on a choisi d'appliquer à la carte de puissance de contour un filtre de lissage. Celui-ci épaissit les frontières, ce qui a pour effet d'effacer les trous. On peut alors appliquer les algorithmes de type bassin versant.

La figure 1 représente une image synthétisée, qui correspond à des champs de Gibbs et à un bruit multiplicatif obtenu avec  $P = 3$  prises de vue. La figure 2 montre l'image de puissance de contour obtenue avec l'estimateur

des moindres carrés appliqué aux lignes et colonnes de l'image. On peut voir sur la figure 3 le résultat de cette image filtrée par un filtre exponentiel de taille  $11 \times 11$ . On constate bien que les trous n'apparaissent plus. Enfin, la figure 4 représente la superposition des contours finalement obtenus et de l'image idéale.

On peut constater que les régions de l'image sont globalement bien restituées. Cependant, les contours ne sont pas très précis. On constate de plus parfois une certaine sur-(ou sous-)segmentation. Deux explications à ces inconvénients peuvent être apportées. D'une part, le lissage, s'il a permis de supprimer les trous, a rendu les contours assez flous et épais. L'algorithme du bassin versant peut alors difficilement en extraire des contours squelettisés parfaitement localisés. Ce constat met en lumière l'importance du bon choix de filtre. En effet, celui-ci doit suffisamment lisser l'image de contour afin d'éliminer les trous, mais il doit de plus donner les contours les moins flous possibles. La détermination d'un tel filtre est donc très délicate, car il faudrait tenir compte des propriétés locales de l'image de contours. Il reste donc à étudier plus attentivement la question. Pour nos simulations, nous avons déterminé le filtre de lissage expérimentalement. L'autre point à améliorer concerne la sur-segmentation (ou parfois la sous-segmentation). Cet inconvénient provient du fait que l'algorithme de seuillage de dynamiques de contour utilisé nécessite la détermination d'un seuil. En effet tous les contours correspondant à une dynamique inférieure à ce seuil sont éliminés. De fait, il faut choisir un seuil adéquat qui permette de conserver les contours principaux en éliminant les contours "parasites". Ce seuil correspond donc au paramètre de pénalisation  $\gamma(N)$  dans le critère des moindres carrés, car il permet de régler la résolution de l'image.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une technique de détection de ruptures dans un signal perturbé par un bruit multiplicatif. L'algorithme proposé, basé sur un critère des moindres carrés, permet de s'affranchir de la connaissance de la loi du bruit, et peut s'appliquer dans le cas d'un bruit coloré. Une pénalisation du critère des MC permet de traiter les cas réels où le nombre de ruptures est inconnu. Des résultats théoriques de convergence ont été énoncés. En pratique, la minimisation du critère des MC est alors effectuée à l'aide des méthodes MCMC. Cette technique de détection de ruptures a été appliquée à la détection de contours d'une image perturbée par du bruit de scintillement, à l'aide d'algorithmes de type bassin versant.

## Références

- [1] A. C. Bovik, "On detecting Edges in Speckle Imagery," IEEE Trans. on ASSP, vol. 36, n° 10, pp. 1618-1627, Oct. 1988.
- [2] R. Fjørtoft, A. Lopès, P. Marthon and E. Cubero-Castan, "An Optimal Multiedge Detector for SAR

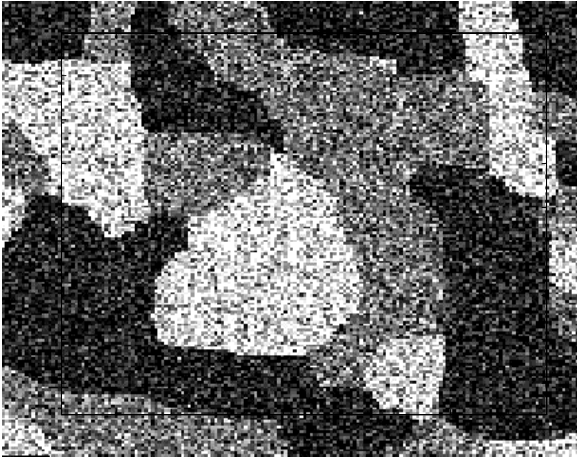


FIG. 1: Image de champs de Gibbs bruitée.

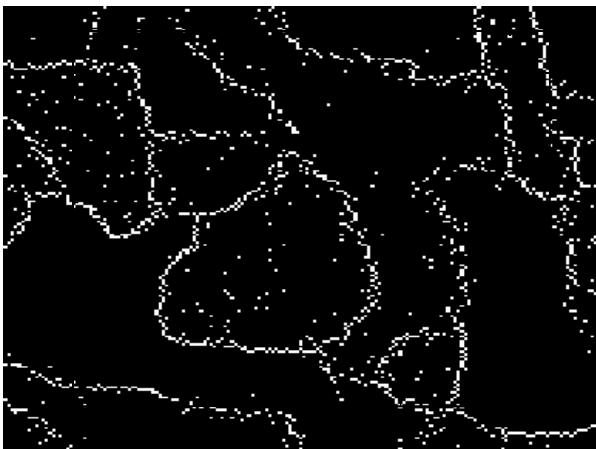


FIG. 2: Image de puissance de contours obtenue par l'estimateur des MC.

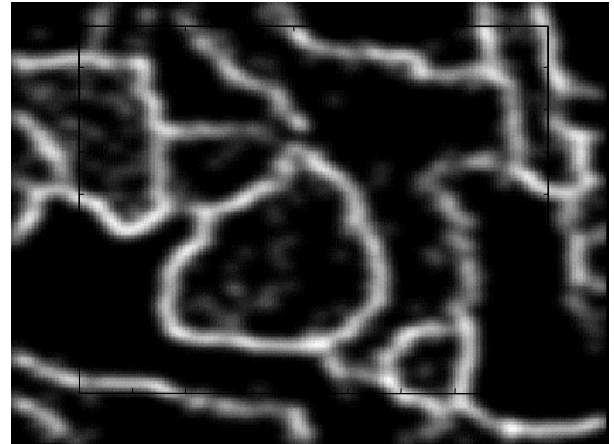


FIG. 3: Image de puissance de contours filtrée.

- Image Segmentation," IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing, vol. 36, n° 3, pp. 793-802, May 1998.
- [3] J.Y. Tourneret, M. Doisy et M. Mazzei, "Bayesian Estimation of Abrupt Changes Contaminated by Multiplicative Noise using MCMC", Proc. of ICASSP'99, Vol. 4, p. 2133-2136, Seattle, 12-15 Mai 1998.
  - [4] P. A. Kelly, H. Derin and K. Hartt, "Adaptive Segmentation of Speckled Images Using a Hierarchical Random Field Model," IEEE Trans. on ASSP, vol. 36, n° 10, pp. 1628-1641, Oct. 1988.
  - [5] M. Lavielle et E. Moulines, "Least Squares estimation of an unknown number of shifts in a time series," à paraître dans J. Time Series Analysis, 1998.
  - [6] M. Lavielle, "Detection of multiple changes in a sequence of random variables," disponible sur [www.math.upsud.fr/~biblio/html/ppo.html](http://www.math.upsud.fr/~biblio/html/ppo.html), 1996
  - [7] A. Papoulis, Probability Random Variables and Stochastic Processes, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.

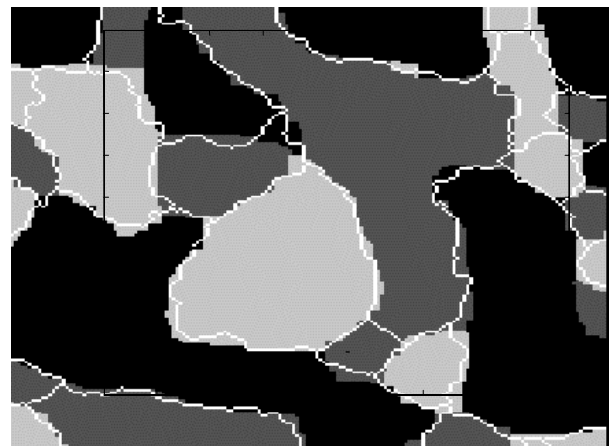


FIG. 4: Superposition de l'image idéale et des contours squelettisés fournis par le seuillage de dynamiques de contour.