

Détection temps-échelle de ruptures dans un bruit multiplicatif à l'aide de prétraitement non-linéaire

Marie CHABERT, Jean-Yves TOURNERET, Francis CASTANIÉ

ENSEEIHHT/TéSA

2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 07, France

e-mail : chabert@len7.enseeiht.fr, tournere@len7.enseeiht.fr

castanie@len7.enseeiht.fr

Résumé – Cet article étudie la détection de ruptures dans les modèles multiplicatifs en associant des méthodes temps-échelle à des transformations non-linéaires. Deux détecteurs sous-optimaux basés sur des marginalisations de la *TOC* ont montré de bonnes performances lorsque le bruit est multiplicatif [5]. Cet article étudie l'influence d'un prétraitement quadratique sur les performances de ces détecteurs. Le cas d'un prétraitement quadratique est considéré par simplicité, cependant d'autres types de non-linéarités peuvent être étudiés similairement. Cet article montre qu'un prétraitement quadratique améliore le contraste temps échelle et par suite les performances de la détection, sous certaines conditions concernant les paramètres du bruit et de la rupture.

Abstract – The problem of Abrupt Change (*AC*) detection in multiplicative noise is addressed. Multiplicative *AC* have been considered in many applications. These applications include speckle noise in radar images and random communication models. This work associates time-scale signature-based detectors with a quadratic pre-processing. The Continuous Wavelet Transform (*CWT*) translation invariance leads to an *AC* signature. Then, the problem is signature detection in the time-scale domain. A second-order contrast criterion shows that a quadratic pre-processing can lead to signature enhancement. Moreover, the performance of two suboptimal signature-based detectors are clearly improved by this non-linear pre-processing under appropriate conditions regarding noise and signal parameters. This paper demonstrates that the quadratic pre-processing outperforms the linear method for *AC* detection in multiplicative Gaussian noise, under appropriate conditions.

1 Introduction

L'extraction de contours ou la segmentation nécessitent la détection et l'estimation de ruptures, c'est-à-dire de changements brusques dans les caractéristiques du processus observé [1]. Cet article envisage le problème de la détection de ruptures dans le contexte non-standard des modèles multiplicatifs. Les modèles multiplicatifs sont envisagés dans un nombre croissant d'applications telles que le traitement d'images issues de systèmes à éclairage cohérent (radar, laser) [2] et la modélisation de canaux de télécommunication [11]. Les transformées temps-échelle (basées notamment sur la Transformée en Ondelettes Continue (*TOC*)) et temps-fréquence, associées à des post-traitements ou des mesures de distances, se sont avérées efficaces pour la détection de ruptures dans les modèles additifs [7], [8]. Deux détecteurs sous-optimaux basés sur des marginalisations de la *TOC* ont montré de bonnes performances également lorsque le bruit est multiplicatif [5]. Cet article étudie l'influence d'un prétraitement non-linéaire sur les performances de ces détecteurs. Le cas d'un prétraitement quadratique est considéré par simplicité, cependant d'autres types de non-linéarités peuvent être étudiés similairement. L'association de la *TO* et de traitements non-linéaires a été utilisée avec succès dans certaines applications comme l'estimation des moments d'ordres supérieurs ou l'implémentation de filtres non-linéaires [9]. Le problème de détection s'exprime sous la forme d'un

test d'hypothèses simples :

$$H_0 : y(t) = x(t)$$

$$H_1 : y(t) = x(t)s(t) = x(t) \left[1 + Af \left(\frac{t - t_0}{a_0} \right) \right]$$

avec $t \in \Omega$, $t_0 \in \Omega$, Ω étant l'intervalle d'observation, $A \geq 0$ et $a_0 > 0$.

Sous l'hypothèse H_0 , le processus observé est un bruit de variance σ_x^2 et de moyenne m_x supposée non nulle. Par simplicité $\tilde{x}(t) = x(t) - m_x$ est supposé blanc.

Sous l'hypothèse H_1 , on observe le signal déterministe $s(t)$, de vecteur paramètre $\underline{\theta} = (A, t_0, a_0)^t$ (amplitude, instant, dilatation) modélisant une rupture, noyé dans le bruit multiplicatif $x(t)$. $s(t)$ correspond à une transition de 1 à $1 + A$. f caractérise la forme de la transition. f est supposée positive, bornée et vérifie : $f(t) = 0$ pour $t \leq -T$ et $f(t) = 1$ pour $t \geq T$. $s(t)$ tend vers un échelon d'amplitude A à l'instant t_0 quand $a_0 \rightarrow 0$. Ce type de processus correspond, par exemple en imagerie radar, à la frontière entre deux champs cultivés de réflectivités différentes.

Les moments du premier et du second ordre de la *TOC*, éventuellement associée à un prétraitement quadratique, sont calculés sous les deux hypothèses dans la deuxième partie. La troisième partie propose la déflation complémentaire comme mesure de contraste temps-échelle. La comparaison des contrastes linéaire et quadratique obtenus avec l'ondelette symétrique de Haar montre que, sous certaines conditions concernant les paramètres du bruit et

de la rupture, un prétraitement quadratique améliore les performances de la détection.

2 Analyse temps-échelle

La *TOC* de $y(t)$ est définie par :

$$C_y(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \psi_{a, \tau}^*(t) dt, \quad a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

avec $\psi_{a, \tau}(t) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$. La famille de fonctions analysantes $\{\psi_{a, \tau}\}_{a \in \mathbb{R}^{+*}, \tau \in \mathbb{R}}$ est construite par dilatation et translation de la fonction ondelette mère ψ (a étant le paramètre de dilatation, τ le paramètre de translation). Si ψ satisfait la condition d'admissibilité (qui s'exprime par $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$ lorsque la transformée de Fourier de ψ est continue), la transformée admet une formule de reconstruction [6]. Cette étude considère des ondelettes normalisées de support borné et symétrique $\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right]$.

2.1 Signature temps-échelle

Notons :

$$\begin{aligned} m_{i,j}(a, \tau) &= E [C_{y^i}(a, \tau) | H_j] \\ \sigma_{i,j}^2(a, \tau) &= var [C_{y^i}(a, \tau) | H_j] \end{aligned}$$

avec $i = 1, 2$ ($i = 1$ sans prétraitement, $i = 2$ avec prétraitement quadratique) et $j = 0, 1$. La condition d'admissibilité implique :

$$m_{i,0}(a, \tau) = m_{x^i} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a, \tau}^*(t) dt = 0$$

L'invariance de la *TOC* par translation et dilatation permet de définir la signature temps-échelle de la rupture comme étant la moyenne de $C_{y^i}(a, \tau)$ sous l'hypothèse H_1 [7] :

$$m_{i,1}(a, \tau) = A m_{x^i} \int_{t_1}^{t_2} [s^i(t) - 1] \psi_{a, \tau}^*(t) dt \quad (1)$$

avec $t_1 = t_0 - a_0 T$ et $t_2 = \tau + a \frac{\Delta t}{2}$. Les signatures obtenues pour $i = 1, 2$, i.e. avec et sans prétraitement, pointent vers l'instant de la rupture t_0 , ce qui permet éventuellement d'estimer ce paramètre.

2.2 Variance temps-échelle

La signature de la rupture est noyée dans un bruit temps-échelle de variance :

$$\sigma_{i,j}^2(a, \tau) = \sigma_{x^i}^2 \left[1 + \int_{t_1}^{t_2} (s^{2ij}(t) - 1) |\psi_{a, \tau}(t)|^2 dt \right]$$

Considérons l'exemple du bruit $x(t)$ avec $m_x = 1$ et $\sigma_x^2 = 1$. La transition $f(t)$ est un échelon défini par $t_0 = 500$ (instant) et $A = 0.4$ (amplitude). Les figures 1 et 2 montrent les signatures obtenues sans puis avec un prétraitement quadratique. Dans les deux cas, les coupes à échelle fixe de la signature sont proportionnelles à l'intégrale de l'ondelette (les coupes sont triangulaires pour l'ondelette symétrique de Haar). Les figures 3 et 4 représentent les *TOC*

bruitées de $y(t)$ et $y^2(t)$. La *TOC* est calculée pour des échelles allant de 200 à 350 avec l'ondelette symétrique de Haar. Les signatures pointent sur l'instant de la rupture $t_0 = 500$. Ces signatures émergent du bruit pour de grandes échelles. Le choix de l'ondelette de Haar résulte de l'optimisation du contraste temps-échelle présenté dans la troisième partie.

3 Détection temps-échelle

3.1 Contrastes linéaire et quadratique

D'après (1), le problème de détection de ruptures peut être envisagé dans le domaine temps-échelle, la statistique de test faisant alors intervenir $C_{y^i}(a, \tau)$, $i = 1, 2$. Un critère de contraste permet d'ordonner l'ensemble des statistiques [10] et donc de mesurer l'influence d'un prétraitement non-linéaire sur les performances de la détection. Le contraste associé à la statistique $C_{y^i}(a, \tau)$, $i = 1, 2$, en tout point (a, τ) du plan temps-échelle peut être défini par [10] :

$$\Pi_\alpha(a, \tau) = \frac{|m_{i,1} - m_{i,0}|^2}{Var_\alpha [C_{y^i}(a, \tau)]} \quad (2)$$

où $Var_\alpha [C_{y^i}(a, \tau)]$ est la variance correspondant au mélange de distributions $p_\alpha(x) = (1 - \alpha) p_0(x) + \alpha p_1(x)$ avec $\alpha \in [0, 1]$, $p_0(\cdot)$ et $p_1(\cdot)$ étant les distributions de $C_{y^i}(a, \tau)$ sous les hypothèses H_0 et H_1 . Les critères obtenus pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ sont la déflation et la déflation complémentaire. La variance étant plus importante sous l'hypothèse H_1 que sous H_0 ($s(t) \geq 1 \forall t \in \Omega$), la déflation complémentaire est un critère plus contraignant que la déflation. Ce contraste correspond à un Rapport Signature à Bruit dans le domaine temps-échelle, sous l'hypothèse H_1 . Notons $\beta_i(a, \tau)$ la déflation complémentaire obtenue pour $C_{y^i}(a, \tau)$. Pour un échelon noyé dans un bruit blanc, les contrastes s'expriment par :

$$\begin{aligned} \beta_i(a, \tau) &= a \frac{\left((1 + A)^i - 1 \right)^2 m_{x^i}^2 I_\psi}{\sigma_{x^i}^2 \left(1 + \left((1 + A)^{2i} - 1 \right) J_\psi \right)} \\ I_\psi &= \left| \int_{\frac{t_0 - \tau}{a}}^{\frac{\Delta t}{2}} \psi(t) dt \right|^2 \quad \text{et} \quad J_\psi = \int_{\frac{t_0 - \tau}{a}}^{\frac{\Delta t}{2}} |\psi(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Ces contrastes sont proportionnels à l'échelle sur les droites du plan temps-échelle définies par $\frac{t_0 - \tau}{a} = \xi = \text{constante}$ et sont donc importants aux grandes échelles. Ceci montre l'intérêt de travailler dans le domaine temps-échelle. Une ondelette optimale, maximisant ces contrastes a été calculée sur l'ensemble des ondelettes normalisées et admissibles [4]. Cette ondelette peut être approchée par l'ondelette symétrique de Haar de support borné $\left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right]$, pour de faibles amplitudes de la rupture. Les contrastes linéaire et quadratique peuvent être comparés sur la courbe des maxima de la *TOC* ($\tau = t_0$) avec l'ondelette de Haar symétrique :

$$\frac{\beta_2(a, t_0)}{\beta_1(a, t_0)} = R(A + 2)^2 \frac{(A + 1)^2 + 1}{(A + 1)^4 + 1}$$

avec $R = \frac{\sigma_x^2 m_{x^2}}{\sigma_x^2 m_x^2}$. Pour R fixé, le rapport $\frac{\beta_2(a, t_0)}{\beta_1(a, t_0)}$ est une fonction croissante de A qui tend vers $4R$ lorsque $A \rightarrow 0$ et R lorsque $A \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

1) si $R \geq 1$ un prétraitement quadratique améliore le contraste quelle que soit l'amplitude A ,

2) si $R \leq \frac{1}{4}$ un prétraitement quadratique dégrade le contraste quelle que soit l'amplitude A ,

3) si $\frac{1}{4} < R < 1$ un prétraitement quadratique améliore le contraste pour de faibles amplitudes de la rupture ($A \leq A_0$)

Le rapport $\frac{\beta_2(a, t_0)}{\beta_1(a, t_0)}$ dépend de la distribution du bruit multiplicatif par l'intermédiaire de R . Pour un bruit multiplicatif gaussien par exemple, les moments de $x(t)$ et $x^2(t)$ vérifient $m_{x^2} = m_x^2 + \sigma_x^2$ et $\sigma_{x^2}^2 = 2\sigma_x^2 (2m_x^2 + \sigma_x^2)$.

3.2 Détecteurs linéaire et quadratique

Des post-traitements de la *TOC* permettent de construire des détecteurs sous-optimaux [5]. Le premier détecteur considéré calcule la somme des coupes à échelle fixée de la *TOC*. Ce détecteur ne nécessite pas d'information *a priori* sur la rupture. Le deuxième détecteur calcule la somme des coupes à échelle fixée de la corrélation entre la *TOC* et une signature idéale construite à partir d'informations *a priori* sur la rupture. Notons $\Gamma_1(\tau)$ et $\Gamma_2(\tau)$ les statistiques correspondant à ces deux détecteurs :

$$\Gamma_1(\tau) = \sum_{i=1}^n C_{y^i}(a_i, \tau) \quad (3)$$

$$\Gamma_2(\tau) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} C_{y^i}(a_i, t) C_{ideal^i}(a_i, t - \tau) dt \quad (4)$$

Dans les deux cas, les statistiques de test sont approximativement gaussiennes et sont comparées à un seuil (fonction de la probabilité de fausse alarme *pfa*) calculé en fonction des informations *a priori* sous l'hypothèse H_0 . Les figures 5 et 6 représentent les courbes *COR*, (i.e. la probabilité de détection (*pd*) en fonction de *pfa*) obtenues avec ces deux détecteurs associés ou non à un prétraitement quadratique. Un prétraitement quadratique améliore visiblement les performances de la détection, pour les paramètres du bruit considérés ($m_x = 1$ et $\sigma_x^2 = 1$).

4 Conclusion

La détection de ruptures noyées dans un bruit multiplicatif a été étudiée par des méthodes temps-échelle avec un prétraitement non-linéaire. La déflation complémentaire offre une mesure du contraste temps-échelle adaptée à ce problème de détection. Ce critère montre qu'un prétraitement quadratique peut améliorer les performances de la détection, sous certaines conditions concernant les paramètres du bruit et de la rupture. Les courbes *COR* montrent clairement cette amélioration. Notons que l'algorithme de détection linéaire est inopérant lorsque le bruit multiplicatif est à moyenne nulle, la signature temps-échelle étant proportionnelle à la moyenne du bruit (1). L'étude visant à comparer les détecteurs linéaire et quadratique, nous l'avons restreinte à $m_x \neq 0$. Toutefois,

lorsque $m_x = 0$, un prétraitement non-linéaire permet d'envisager une stratégie de détection basée sur la signature temps-échelle [3].

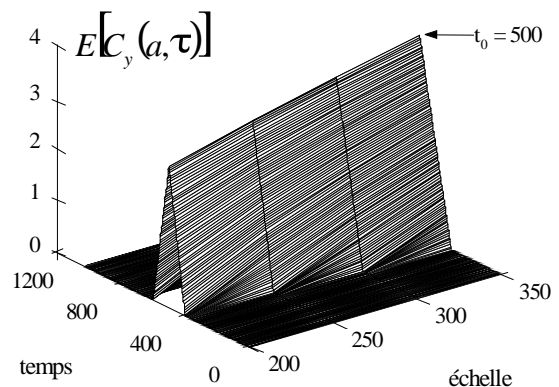


FIG. 1: Signature d'un échelon ($A = 0.4$, $t_0 = 500$) avec l'ondelette de Haar sans prétraitement

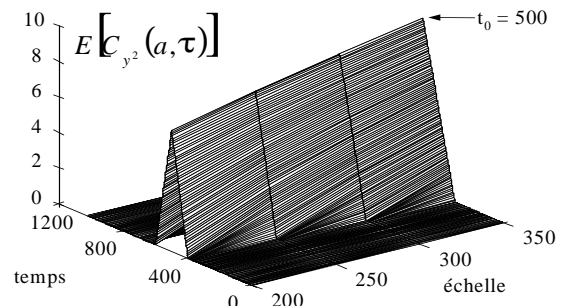


FIG. 2: Signature d'un échelon ($A = 0.4$, $t_0 = 500$) avec l'ondelette de Haar et prétraitement quadratique

Références

- [1] M. Basseville and I. V. Nikiforov, Detection of Abrupt Changes: Theory and Application. Prentice-Hall, 1993.
- [2] A. C. Bovik, "On detecting Edges in Speckle Imagery," IEEE Trans. A.S.S.P., vol. 36, n°10, Oct. 1988.
- [3] M. Chabert, J-Y. Tournet and F. Castanié, "Time-scale Analysis of Deterministic Signals Corrupted by Zero-Mean Multiplicative Noise," 1997 Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Michigan.

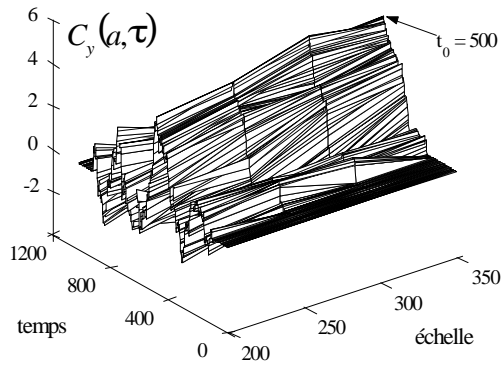


FIG. 3: TOC d'un échelon ($A = 0.4$, $t_0 = 500$) avec l'ondelette de Haar sans prétraitement

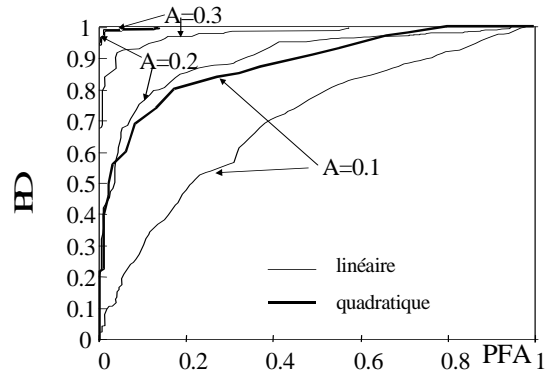


FIG. 5: Courbes COR - Somme le long des échelles de la TOC avec et sans prétraitement quadratique

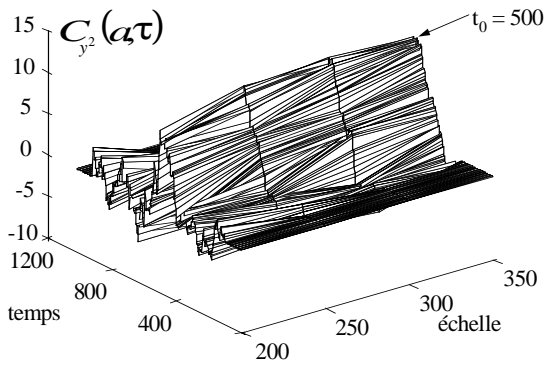


FIG. 4: TOC d'un échelon ($A = 0.4$, $t_0 = 500$) avec l'ondelette de Haar avec prétraitement quadratique

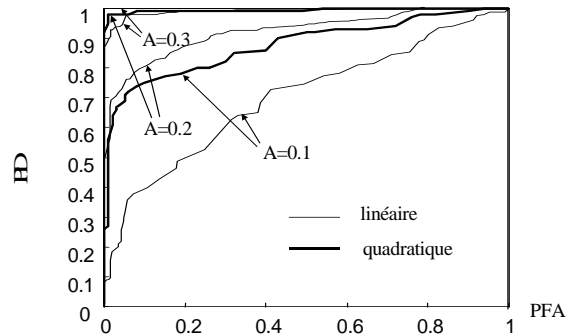


FIG. 6: Courbes COR - Somme le long des échelles de la corrélation temps-échelle avec et sans prétraitement quadratique

[4] M. Chabert, Détection et estimation de ruptures noyées dans un bruit multiplicatif - Approches classiques et temps-échelle, thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, décembre 1997, n° d'ordre 1395.

[5] M. Chabert, J-Y. Tourneret and F. Castanié, "Performance of an Optimal Multiplicative Jump Detector based on the Continuous Wavelet Transform," Proc. EUSIPCO'96, Trieste, 1996.

[6] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series In applied Mathematics, 1992.

[7] A. Denjean and F. Castanié, "Mean Value Jump Detection: a Survey of Conventional and Wavelet Based Methods," in Wavelet Theory, Algorithms and Applications, C. K. Chui, L. Montefuso and L. Puccio (eds.), Academic Press, Inc., 1994.

[8] H. Laurent and C. Doncarli "Stationarity Index for Abrupt Changes Detection in the Time-Frequency Plane," IEEE Signal Processing Letters, Vol. 5, n° .2, Feb. 1998.

[9] R. Nowak and R. Baraniuk, "Wavelet transforms for nonlinear signal processing," 1997 Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Michigan.

[10] B. Picinbono and P. Duvaut, "Detection and Contrast," Stochastic Processes in Underwater Acoustics, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Baker CR et Al (Eds), 1986.

[11] H. L. Van Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory, John Wiley & Sons, 1968.