

Estimation Spectrale Paramétrique de Modes Corrélés, Application à l'Héliosismologie

André FERRARI, François Xavier SCHMIDER, Miguel CERCOS, Bernard GELLY
UMR 6525 Astrophysique
Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose,
06108 Nice CEDEX 2, FRANCE
ferrari@unice.fr

Résumé – Cette communication porte sur l'estimation des paramètres de modes vibratoires ayant des excitations corrélées. L'application visée est l'analyse des modes vibratoires du soleil. Deux algorithmes d'estimation sont proposés. Le premier, qui est une extension de la méthode habituellement utilisée en héliosismologie, repose sur les propriétés asymptotiques du périodogramme. Cette méthode présente l'avantage de permettre une prise en compte immédiate des contraintes sur le profil des modes. Le second repose sur une modélisation temporelle du signal par une somme bruitée de processus autorégressifs ayant des excitations corrélées. Après une estimation des paramètres dynamiques la matrice de covariance des excitations est estimée par un algorithme EM. Les performances des deux méthodes sont évaluées par des simulations de Monte Carlo et comparées à la borne de Rao Cramèr. Enfin, des résultats sur des signaux mesurés par le satellite SOHO sont présentés.

Abstract – The purpose of this communication is the parameter estimation of vibration modes having correlated excitations. The focused application are the solar vibration modes. Two estimation algorithm are proposed. The first in an extension of the method classically applied in heliosismology and relies on the asymptotic properties of the periodogram. The advantage of this method is that it easily takes into account constraints on modes profiles. The second relies on the temporal modeling of the signal has a noisy sum of autoregressive processes having correlated excitations. After the estimation of the dynamical parameters, the excitations covariance matrix is estimated by an EM algorithm. The performances of the methods are evaluated by Monte Carlo simulations and compared to the Cramèr Rao bound. Finally, results obtained from SOHO satellite signal are presented.

1 Introduction

Cette communication porte sur l'analyse spectrale de données héliosismiques: l'onde stationnaire piégée dans une cavité à l'intérieur du soleil induit des variations de la vitesse radiale à la surface. L'amplitude de ces variations vérifie ainsi une équation différentielle stochastique du second ordre. La figure 1 représente le périodogramme du signal mesuré par l'instrument GOLF du satellite SOHO. L'objectif est d'analyser ce signal dans des bandes de fréquences contenant des modes de même degré.

L'analyse de ce signal a été jusqu'à présent réalisée en supposant que les excitations des différents modes étaient indépendantes. La densité spectrale de puissance (DSP) est alors modélisée par une somme de Lorentziennes dont les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance à partir du périodogramme, [4].

Nous proposons dans cette communication de lever l'hypothèse de décorrélation des excitations. Pour cela, deux méthodes d'estimation prenant en compte leurs coefficients de corrélation sont proposées. La première est une extension de la technique actuellement utilisée en héliosismologie. La seconde, qui constitue la contribution majeure de cette communication, est basée sur la représentation de chaque mode par un processus autorégressif du second ordre. Ces deux méthodes seront référencées dans la suite par approche «fréquentielle» et «temporelle». Après avoir présenté les deux algorithmes, leurs performances sont étudiées par des simulations et comparées à la borne

de Rao Cramèr.

2 Méthodes d'estimation

2.1 Modèle spectral

Chaque mode est individuellement solution d'une équation différentielle stochastique du second ordre. On imposera la contrainte, habituelle en héliosismologie, que à l'intérieur d'une bande de fréquence la puissance de l'excitation ainsi que les amortissements des différents modes sont constants.

Sous ces hypothèses et compte tenu de l'important facteur de sur-échantillonnage, la DSP du signal bruité s'écrit :

$$S(f) = \sigma_e^2 \left(\sum_{k=1}^L |H_k(f)|^2 + \sum_{k,l=1}^L r_{kl} H_k(f) H_l(f)^* \right) + \sigma_w^2, \quad (1)$$

avec :

$$H_k(f) = 1 / (1 - (f/f_k)^2 + j2\eta(f/f_k)), \quad (2)$$

où σ_e^2 désigne la puissance des excitations et r_{kl} , ($|r_{kl}| < 1$) leurs coefficients de corrélation. La figure 2 montre l'effet d'une variation de r_{12} sur $S(f)$ dans le cas $L = 2$ pour : $f_1 = 9.2$, $f_2 = 10.8$, $\eta = 0.015$, $\sigma_e^2 = 0.01$ and $\sigma_w^2 = 0.5$

Le processus mesuré étant supposé linéaire et la résolution fréquentielle recherchée nécessitant un très grand nombre d'échantillons ($\sim 10^6$), le périodogramme dans la

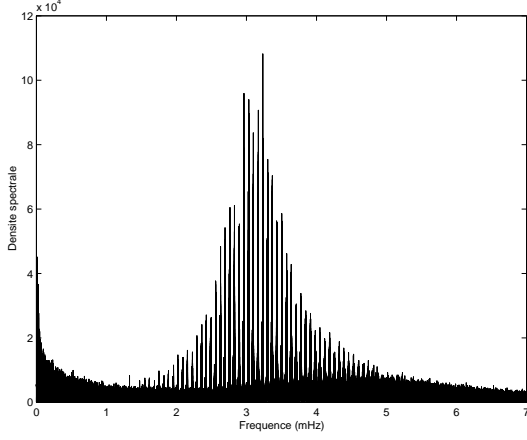


FIG. 1: Périodogramme de 600 jours, $T_e = 20s$. Chaque «pic» est un multiplet de 1,2 ou 3 composantes.

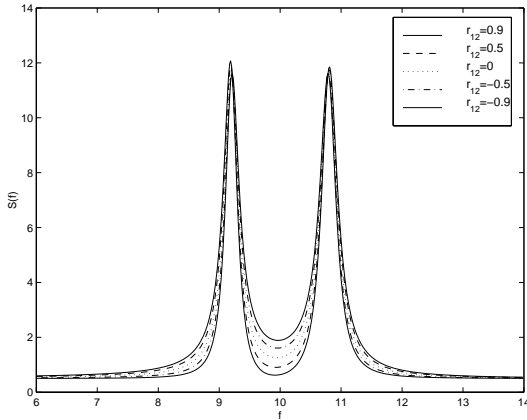


FIG. 2: Effet du coefficient de corrélation sur la DSP pour un mode double.

bande à analyser va vérifier les propriétés asymptotiques classiques d'indépendance et de distribution suivant une loi $S(f)\chi_2^2$, [6]. On propose donc d'estimer le vecteur de paramètres :

$$\theta = \{\sigma_e^2; \sigma_w^2; \eta; (f_k)_{k=1\dots L}; (r_{kl})_{\substack{k=1\dots L, \\ l=1, \dots, k-1}}\} \quad (3)$$

par maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=N_i}^{N_f} (\ln S(f_k) + I(f_k)/S(f_k)),$$

où les $I(f_k)$, $k = N_i, \dots, N_f$ désignent les valeurs du périodogramme des mesures sur l'intervalle de fréquence à analyser.

2.2 Modèle temporel

Nous allons supposer dans cette partie que chaque mode peut être représenté par un processus autorégressif du second ordre. Pour L modes, les mesures y_n peuvent donc s'écrire :

$$x_n^{(k)} = -a_1^{(k)} x_{n-1}^{(k)} - a_2^{(k)} x_{n-2}^{(k)} + e_n^{(k)}, \quad (4)$$

$$y_n = \sum_{k=1}^L x_n^{(k)} + w_n, n = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

où $e_n^{(k)}$ et w_n sont des bruits blancs. Il est important de souligner que les contraintes sur l'égalité des amortissements imposées dans le modèle précédent ne peuvent être utilisées ici, le signal étant obtenu en ramenant en bande de base la plage de fréquence étudiée.

L'ensemble des mesures sera noté $\mathcal{Y}_N = \{y_0, \dots, y_N\}$. On notera, $\vec{E}_n = (e_n^1, \dots, e_n^L)^t$ et $Q = E[\vec{E}_n \vec{E}_n^t]$. Le coefficient de corrélation de l'excitation des modes i et j est alors $r_{ij} = Q_{ij} / \sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}$. Le problème est d'estimer les coefficients autoregressifs notés θ , la matrice de covariance Q et la puissance du bruit de mesure σ_w^2 .

La première partie de l'algorithme consiste à estimer θ . Considérons pour cela le signal z_n obtenu en filtrant y_n par :

$$H(z) = \prod_{q=1}^L (1 + a_1^{(q)} z^{-1} + a_2^{(q)} z^{-2}). \quad (6)$$

Il est aisé de vérifier que $E z_n z_{n+l} = 0$ pour $|l| > 2L$. z_n possède donc une représentation MA et en conséquence, y_n une représentation ARMA où les coefficients du dénominateur sont ceux de $H(z)$.

On propose donc d'estimer $H(z)$ en appliquant à y_n un algorithme d'estimation ARMA. On utilise pour cela l'algorithme d'estimation par sous-espaces, [8, p.115]. Les filtres $1 + a_1^{(k)} z^{-1} + a_2^{(k)} z^{-2}$ sont ensuite obtenus en combinant les L paires de racines conjuguées de $H(z)$.

La seconde partie de l'algorithme consiste à remplacer θ par son estimée $\hat{\theta}$ afin d'estimer Q et σ_w^2 . Une solution efficace de ce problème nécessite un modèle faisant intervenir de façon explicite le vecteur \vec{E}_n . Nous proposons pour cela d'utiliser un modèle d'état. Chaque mode peut se modéliser par :

$$\vec{X}_{n+1}^{(k)} = F^{(k)} \vec{X}_n^{(k)} + G^{(k)} \vec{E}_n^{(k)}, x_n^{(k)} = H^{(k)t} \vec{X}_n^{(k)}, \quad (7)$$

avec :

$$F^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2^{(k)} \\ 1 & -a_1^{(k)} \end{pmatrix}, G^{(k)} = H^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ainsi, un modèle d'état de y_n est :

$$\vec{X}_{n+1} = F \vec{X}_n + G \vec{E}_n, y_n = H^t \vec{X}_n + w_n, \quad (9)$$

où F est une matrice $2L \times 2L$ bloc diagonale avec les $F^{(k)}$ sur la diagonale. H est un vecteur $2L \times 1$ obtenu par concatenation des $H^{(k)}$ et G est une matrice $2L \times L$ avec pour éléments non nuls $G(2k, 2) = 1$, $k = 1, \dots, L$. L'ensemble des états sera noté $\mathcal{X}_N = \{\vec{X}_0, \dots, \vec{X}_N\}$.

Nous allons considérer les estimations de Q et σ_w^2 obtenues en maximisant $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_N; \hat{\theta}, Q, \sigma_w^2)$ où $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_N; \theta, Q, \sigma_w^2)$ est la log-vraisemblance des observations. Nous utiliserons pour cela l'algorithme EM. Dans ce cas, \mathcal{Y}_N va jouer le rôle de «données incomplètes» et \mathcal{X}_N de «données complètes». Cet algorithme a été utilisé pour l'estimation de l'ensemble des paramètres d'un modèle d'état dans [1]. Nous présenterons ici pour le cas où seule la covariance de l'excitation et la puissance du bruit d'observation sont estimées. On pourra se référer à [3] pour plus de détails.

L'étape E réside dans le calcul de l'espérance de la log-vraisemblance de \mathcal{X}_N conditionnée à \mathcal{Y}_N et les valeurs courantes de Q et σ_w^2 , notées $\hat{Q}^{[k]}$, $\sigma_w^{2,[k]}$.

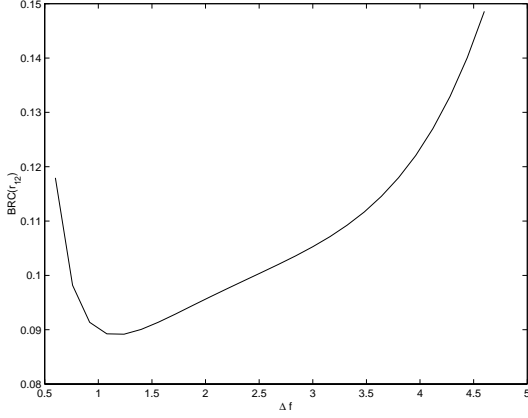


FIG. 3: BRC sur r_{12} en fonction de $\Delta f = f_2 - f_1$ pour un mode double.

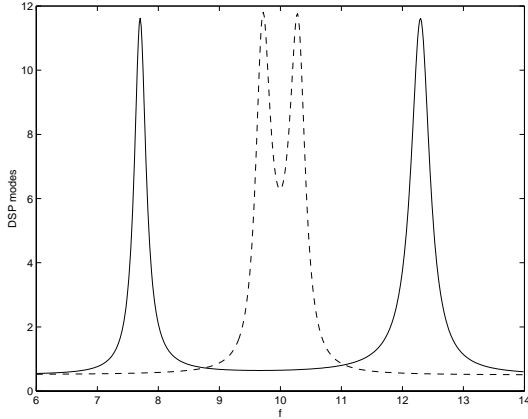


FIG. 4: DSP correspondant aux deux valeurs extrêmes de Δf pour le calcul de la BCR.

Dans notre cas, la log-vraisemblance de \mathcal{X}_N se calcule facilement en utilisant la propriété Markovienne du modèle d'état:

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}_N; Q) = -\frac{N-1}{2}(\log |Q| + \log \sigma_w^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (G^t \vec{V}_k^t Q^{-1} \vec{V}_k G + w_k^2 / \sigma_w^2),$$

$$\vec{V}_k = \vec{X}_k - F \vec{X}_{k-1}, \quad w_k = y_k - H^t \vec{X}_k.$$

La maximisation de l'espérance conditionnelle de l'expression précédente (étape M) donne alors:

$$\hat{Q}^{[k+1]} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G^t \mathbb{E} [\vec{V}_k \vec{V}_k^t / \mathcal{Y}_N, \hat{Q}^{[k]}, \sigma_w^{2,[k]}] G, \quad (10)$$

$$\sigma_w^{2,[k+1]} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E} [w_k^2 / \mathcal{Y}_N, \hat{Q}^{[k]}, \sigma_w^{2,[k]}]. \quad (11)$$

Les quantités intervenant dans la somme peuvent être calculées en utilisant un algorithme de lissage à interval fixe, [1]. On peut souligner que la structure de (10) garantit que $\hat{Q}^{[k]}$ est définie semi-positive. Par ailleurs, les estimateurs

par maximum *a posteriori* de Q est σ_w^2 sont, [7, 2]:

$$\hat{Q}_{MAP} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} G^t \hat{V}_{k/N} \hat{V}_{k/N}^t G, \quad (12)$$

$$\sigma_{w,MAP}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} w_k^2. \quad (13)$$

Une implantation itérative de ces estimateurs s'obtient en calculant les vecteurs d'état lissés à l'itération k à partir de $\hat{Q}_{MAP}^{[k]}$ et $\sigma_{w,MAP}^{2,[k]}$ et en calculant $\hat{Q}_{MAP}^{[k+1]}$ et $\sigma_{w,MAP}^{2,[k+1]}$ à partir de (12,13). Cet algorithme correspond à l'algorithme EM décrit plus haut si l'on considère que la mise à jour de Q et σ_w^2 se fait en supposant que les variance de $\hat{X}_{k/n}$ et les covariance entre $\hat{X}_{k/n}$ et $\hat{X}_{k-1/n}$ sont nulles. Un défaut majeur de cette solution par rapport à EM est bien sur qu'elle ne garantie pas une augmentation de la vraisemblance à chaque itération.

2.3 Bornes de Rao Cramèr

Le but de cette section est d'étudier les bornes de Rao Cramèr (BRC) des paramètres caractéristiques du modèle de modes corrélés contenu dans une bande de fréquence $[f_m, f_M]$. Nous proposons d'utiliser pour celà l'expression asymptotique (N grand) des termes de la matrice d'information de Fisher d'un processus Gaussien en fonction de sa DSP, [5, p. 77]. Si l'on modélise la DSP par (1), le terme $I_{k,l}$ de la FIM correspondant aux composantes k et l de (3) est alors donné par:

$$I_{k,l} = \frac{N}{2(f_M - f_m)} \int_{f_m}^{f_M} \frac{1}{S^2(f)} \frac{\partial S(f)}{\partial \theta_i} \frac{\partial S(f)}{\partial \theta_j} df. \quad (14)$$

Une fois les dérivées partielles calculées, les termes de la FIM sont alors obtenus par intégration numérique en utilisant la fonction `quad8.m` de MATLAB.

La figure 3 donne la BRC sur r_{12} pour $f_1 = 10 - \Delta f/2$, $f_2 = 10 + \Delta f/2$, $r_{12} = 0.5$, $\eta = 0.015$, $\sigma_c^2 = 0.01$, $\sigma_w^2 = 0.5$ et $N = 1024$ en fonction de Δf . La figure 4 représente les DSP correspondant aux deux valeurs extrêmes de Δf . L'allure concave de cette courbe est assez intuitive. Si Δf est petit, les deux excitations sont mélangées dans la même bande de fréquence et il est donc difficile de les «séparer» et si Δf est trop grand, les excitations sont décorélées par les filtres. Cette courbe montre également les faibles performances auxquelles on peut s'attendre. En effet le plus faible écart type que l'on peut obtenir pour r_{12} dans ce cas est 0.3: 15% environ de l'intervalle de variation de r_{12} .

3 Simulations

Cette première simulation a pour objectif l'évaluation des performances des approches temporelles et fréquentielles par une méthode de Monte Carlo dans le cas $L = 2$. Afin de pouvoir comparer les résultats, les paramètres des deux modèles ont été choisis de façon à ce que les DSP de chacun des modes aient dans les deux cas même: fréquence maximale, amplitude maximale et largeur à 3dB.

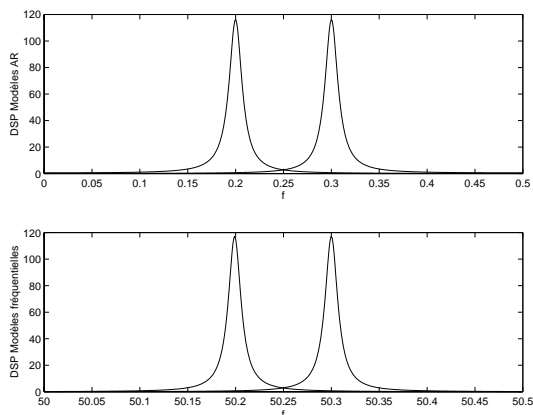


FIG. 5: DSP des modes pour les modèles autorégressifs et fréquentiels.

TAB. 1: Performance des deux approches.

	$\overline{r_{12}}$	$\sigma(r_{12})$	$\overline{f_1}$	$\sigma(f_1)$	$\overline{f_2}$	$\sigma(f_2)$
temp.	-0.46	0.14	0.20	3.2e-3	0.30	3.2e-3
fréq.	-0.53	0.16	0.20	2.1e-3	0.30	2.2e-3
BRC	-	0.18	-	2.0e-3	-	2.0e-3

Dans le second cas, $f_m = 50$ et $f_M = 50,5$. La figure 5 présente les deux modes correspondants aux deux modèles du signal. Le tableau 1 présente les moyennes, écarts types et racines carrées de la BRC pour r_{12} , f_1 et f_2 obtenues à partir de 256 réalisations d'un signal de 500 échantillons.

Pour l'estimation des fréquences, les performances de la méthode fréquentielle sont légèrement supérieures à celles de la méthode temporelle. Les résultats sont en accord avec la BRC. Cette tendance est inversée pour l'estimation du coefficient de corrélation. Il est important de constater que les écarts types obtenus sont supérieurs à ceux donnés par la BRC, ce qui s'explique par le fait que, comme le montre la première colonne du tableau, les estimées de r_{12} sont légèrement biaisées dans les deux méthodes.

Enfin, les deux méthodes ont été appliquées à un signal de 600 jours échantillonné à 20s provenant de l'instrument SOHO. Pour la méthode temporelle, le signal correspondant aux bandes de fréquence analysées a été démodulé et décimé par transformée de Fourier directe et inverse. Le tableau 2 présente les résultats obtenus pour différentes bandes. Le nombre d'échantillons correspondants à chaque bande est environ 700. On constate, contrairement aux fréquences, une très mauvaise adéquation des résultats obtenus pour l'estimation du coefficient de corrélation.

La figure 6 présente les deux DSP estimées ainsi que le périodogramme pour la bande $[1746, 1752]\mu Hz$. Un facteur essentiel dans le résultat obtenu est le fort *a priori* imposé sur l'amplitude des modes dans l'approche fréquentielle. Cette contrainte qui a peu d'effet sur l'estimation des fréquences a une influence fondamentale sur le coefficient de corrélation. Le problème crucial est donc la validation de cette hypothèse qui au vu de la figure 6 ne semble pas acquise.

TAB. 2: Résultats obtenus sur le signal Golf.

bande (μHz)		\hat{r}_{12}	\hat{f}_1	\hat{f}_2
[1611,1614]	temp.	-0.38	1612.32	1613.22
	fréq.	0.96	1612.32	1613.14
[1746,1752]	temp.	-0.63	1748.85	1749.79
	fréq.	-0.65	1748.85	1749.70
[1882,1888]	temp.	-0.75	1884.76	1885.55
	fréq.	0.44	1884.71	1885.48

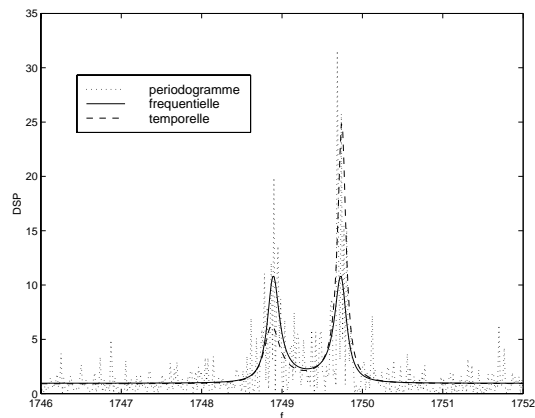


FIG. 6: Résultat sur un mode double du signal GOLF.

Références

- [1] L. Deng and X. Shen. Maximum likelihood in statistical estimation of dynamic systems: Decomposition algorithm and simulation results. *EURASIP Signal Processing*, 57:65–79, 1997.
- [2] G. Favier, G. Alengrin, and P. Guillermin. Algorithmes de filtrage adaptatif, estimation des covariances de bruit dans un système linéaire stochastique. Technical report, Laboratoire de Signaux et Systèmes, 1979.
- [3] A. Ferrari, F.-X. Schmider, B. Gelly, and G. Alengrin. Parametric representation of helioseismic data. part 1: a method for estimation of mode correlation. *Astronomy and Astrophysics*, 1999. à paraître.
- [4] D. Fierry Fraillon. *Étude des densités spectrales des modes acoustiques solaires: une modélisation des modes de bas degrés*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1999.
- [5] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1993.
- [6] M. B. Priestley. *Spectral Analysis And Time Series*. Monographs and Textbooks. Academic Press, 8th edition, 1994.
- [7] A.P. Sage and J.L. Melsa. *System Identification*, volume 80. Academic Press, 1971.
- [8] Petre Stoica and Randolph Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Prentice Hall, 1997.