

# Exposants d'erreurs pour (quelques) canaux Markoviens, applications à Internet

Stéphane BOUCHERON<sup>1</sup>, Christoph GUENZEL<sup>2</sup>, Kavé SALAMATIAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LRI, UMR CNRS 8623

Bât. 490, Université paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup>Abt. V, Fachbereich Informatik

Universität Bonn, Roemer Strasse 164, 53177 Bonn, Allemagne

bouchero@lri.fr, salamat@lri.fr, guenzel@cs.uni-bonn.de

**Résumé** – La communication entre deux hôtes de l'Internet souffre de pertes de paquets, c'est-à-dire d'effacements de symboles. Lorsqu'on utilise un protocole de transport comme UDP, l'usage de codes correcteurs d'effacements est un moyen plausible d'assurer une transmission fiable. La simplicité de la compensation d'effacements permet même d'envisager l'utilisation de codes assez longs (plusieurs centaines voire plusieurs milliers de symboles). *Est-ce que le gain en fiabilité mérite le sacrifice en latence ?* Pour répondre à cette question, nous analysons les possibilités des codes correcteurs sur des canaux à effacements Markoviens. Dans sa plus simple version, le théorème de codage-canal affirme que les possibilités d'un canal sans mémoire sont caractérisées par les probabilités de transition entrée/sortie, et le débit maximal d'une communication fiable est identifié comme la solution d'un problème d'optimisation (la capacité). De plus, la vitesse avec laquelle la probabilité d'erreur au décodage décroît est précisément décrite par la *Random Coding Bound* et par la *Sphere Packing Bound*. Les canaux Markoviens sont des chaînes de Markov dont l'espace d'états est formé par des probabilités de transition entre symboles d'entrée et de sortie. Pour beaucoup d'applications (liaisons sans fils, réseaux à commutation de paquets sans garanties de qualité de service), les canaux Markoviens sont des modèles fidèles mais délicats à analyser. Pour la plupart de ces canaux, on ne connaît pas de *caractérisation à un symbole* de la capacité. Nous traitons ici du plus simple des canaux Markoviens en nous appuyant sur la relation entre les *Random Coding Bound*, *Sphere Packing Bound* et la théorie des Grandes Déviations. Ceci permet de calculer explicitement les exposants pour des canaux d'Elliot-Gilbert à effacements, d'évaluer les mérites des stratégies d'entrelacement et l'impact (négatif) de la mémoire sur les performances des codes correcteurs. Finalement nous confrontons ces spéculations à des traces de communications réelles sur Internet et nous observons que sur une classe de liaisons bruyantes, possédant un taux de pertes supérieur à 5%, les simples modèles Markoviens s'avèrent qualitativement corrects.

**Abstract** – End-to-end Internet connections are carried by a lossy packet-switched channel. If an unreliable transport protocol like UDP is used, Error-Control-Coding appears as a way to ensure reliable transmission. The simplicity of erasure correction allows to envision rather long codes (say several hundreds of symbols). *Is it reasonable to trade latency for reliability?* To answer such a question, we investigate the capabilities of Markovian erasure channels. In its basic version, the Channel Coding Theorem asserts that the capabilities of the discrete memoryless channel (DMC) are fully characterized by the input/output transition probabilities, the maximal rate of reliable communication is defined as the solution of an optimization problem (channel capacity). Moreover, up to the order in the exponents, the rate at which decoding error probability declines towards 0 which block length is precisely described by the Random Coding bound (upper bound) and by the Sphere Packing bound. Markovian channels (MC) are Markov chains which state spaces are constituted by input/output transition probability matrices (i.e. each state may be identified with the transition probability matrix of a DMC). For many applications (wireless channels, lossy channels as packet-switched computer networks) Markov Channels may be regarded more faithful but less tractable pictures of real systems than DMC. For most of those Markovian channels, despite the fact that Markov channels do have a concise description, no single letter characterization is known, and little is known about coding exponents. We deal here with the simplest Markovian channel: the erasure Markovian channel and single out the relationship between coding exponents and Large Deviation Theory. The simple Markovian Erasure Channel is described precisely : random coding and sphere packing exponents are described, and a (natural) large deviation interpretation is provided. This allows to assess the merits of interleaving strategies for coping with channel memory. Finally we assess those theoretical observations on traces of Internet connections, and we observe that for a class of noisy connections where loss rate exceeds 5% and may reach 30%, the simplest Markovian models prove to be qualitatively correct.

**Mots clés** Théorie de l'Information, Codage Canal, Réseaux de communication, Grandes Déviations.

## 1 Introduction

**Avertissement** An english version of this text is available at <http://www.lri.fr/~bouchero/PUB/cemc.ps.gz>.

Sur un canal discret sans mémoire, de probabilité de transition générique  $W$  (cf. [4] pour plus amples définitions et motivations) la performance des codes correcteurs d'erreurs est décrite par le *random coding exponent*  $E_{rc}(\cdot, W)$

et par le *sphere packing exponent*  $E_{sp}(\cdot, W)$ . Pour une famille de codes  $(C_n)$  avec  $C_n$  de longueur  $n$  et de débit  $R$  (proportion de symboles de messages parmi les  $n$  symboles), la probabilité de décodage erroné  $e_n$  sur  $C_n$  satisfait

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln e_n \leq -E_{rc}(R, W) ,$$

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln e_n \geq -E_{sp}(R, W) .$$

Certains exposants simples peuvent être interprétés dans la théorie des Grandes Déviations [4] [5]. Mais nous n'avons pas été capables de trouver un traitement systématique de la relation entre les Grandes Déviations au sens de [5] et les exposants de codages de la théorie de l'Information. Les deux sujets partagent pourtant des traits communs: ils traitent tous les deux d'équivalents asymptotiques de logarithmes de probabilités d'événements rares et l'argument de canal déformé (*twisted channel*) utilisé pour prouver le *Sphere-Packing exponent* est de la même espèce que les changements de mesures des preuves de bornes inférieures en Grandes Déviations [4]. Nous utilisons cette relation pour mieux comprendre certains canaux Markoviens particulièrement simples.

Les canaux Markoviens sont définis par un alphabet d'entrée  $\mathcal{X}$  et un alphabet de sortie  $\mathcal{Y}$ , par un espace d'états  $\mathcal{S}$ , une probabilité de transition  $W_{s_k}(y|x)$  (avec  $y \in \mathcal{Y}$  et  $x \in \mathcal{X}$ ) associée avec chaque état  $s_k$  et une probabilité de transition entre états  $\Gamma$  où  $\Gamma(s_k, s_{k'})$  définit la probabilité d'atteindre l'état  $s_{k'}$  à partir de  $s_k$ . Dans ce texte,  $\Gamma$  est supposée irréductible et ergodique (il existe un  $n$  tel que pour toute paire d'états  $s_k$  et  $s_{k'}$ ,  $\Gamma^n(s_k, s_{k'}) > 0$ ).

Les réseaux à commutation de paquets fournissent un exemple concret de canal à effacements. Une connection entre hôtes distants est grossièrement modélisée par une file d'attente de capacité finie. Son état est le nombre de clients (paquets) dans la file, un seul paquet étant servi à la fois. Un processus stationnaire représentant le trafic global de l'Internet alimente la file alors que la connection entre les deux hôtes qui nous intéressent envoie périodiquement un paquet (un symbole d'entrée du canal). Ce paquet est effacé s'il arrive lorsque la file est pleine. Nous supposons que ce trafic n'influe pas sur l'état du canal. Ce modèle caricatural fournit un modèle grossier de connections Internet [2, 3]. Notre objectif est d'analyser l'impact de la mémoire sur des canaux à effacements dans leur version Markovienne.

La littérature contient peu d'informations quantitatives sur les exposants de codage des canaux Markoviens en général. Gallager propose une formule limite pour ces exposants, mais ne fournit pas de caractérisation à un symbole (*single letter characterization*) en dehors du cas certains canaux à évanouissement [6, pages 182-187]. Cette caractérisation est très proche de la formulation d'un Principe de Grandes Déviations pour les chaînes de Markov à la manière de Donsker and Varadhan [5, Chapter 3].

Nous montrerons que pour les canaux à effacement, les exposants de codage admettent une interprétation simple en termes de taux de Grandes Déviations et que cela

conduit à une caractérisation à un symbole des possibilités de ces canaux.

## 2 Canaux à effacements et Principes de Grandes Déviations

Sur un canal à effacements, un symbole d'entrée est transmis fidèlement ou perdu. Le récepteur est informé des fautes de transmission. Contrairement au canal à évanouissement décrit dans [6], le récepteur ne connaît pas l'état du canal. Lorsque le canal est sans mémoire, il est défini par la probabilité de perte  $p$ , sa capacité est simplement  $C = (1 - p)$ , ses exposants au débit  $R$  sont<sup>1</sup>:  $E_{sp}(\tilde{R}) = h_2(\tilde{R}, C)$ , and  $E_{rc} = \min(E_{sp}(\tilde{R}), E_{sp}(\tilde{R}_{cr}) + (\tilde{R}_{cr} - \tilde{R}))$ , le débit critique étant  $\tilde{R}_{cr} = \frac{C}{C + (1-C)\#\mathcal{X}}$  où  $\#\mathcal{X}$  est la taille de l'alphabet d'entrée. La source qui maximise l'information mutuelle est sans mémoire et uniforme sur l'alphabet d'entrée. Le comportement d'un canal à effacement est complètement défini par le processus de pertes  $(Z_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ , où  $Z_i = 1$  si la  $i^{\text{ème}}$  transmission est une perte et 0 sinon. Le processus de pertes satisfait un principe de Grandes Déviations (PGD) de fonction de taux  $I$  si pour tout borélien  $A \subseteq [0, 1]$  de fermeture  $\bar{A}$  et d'intérieur  $A^\circ$ , nous avons:

$$\inf_{x \in \bar{A}} I(x) \leq -\frac{1}{n} \ln \Pr \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \in A \right\} \leq \inf_{x \in A^\circ} I(x).$$

Si le processus de pertes suit une PGD, alors un argument simple fondé sur le principe des pigeons montrer que le *sphere packing bound* coïncide avec la fonction de taux qui gouverne le PGD, et un argument de sélection aléatoire montre que le *random coding bound* coïncide avec la fonction de taux pour les débits supercritiques (qui peut être caractérisée en utilisant le comportement limite de la Log-transformée de Laplace du processus de pertes).

**Theorem 2.1** *Soit  $(Z^n)$  le processus de pertes d'un canal à effacement stationnaire  $W$ , si  $Z^n$  satisfait un PGD avec une fonction de taux convexe  $I(\cdot)$ , alors pour un entier  $n$ , et tout débit  $\tilde{R} > 0$*

$$E_{rc}(\tilde{R}, W) = \min [I(1 - \tilde{R}), I(1 - \tilde{R}_{cr}) + \tilde{R}_{cr} - \tilde{R}] \quad (1)$$

$$E_{sp}(\tilde{R}, W) = I(1 - \tilde{R}). \quad (2)$$

## 3 Canaux à effacements Markoviens

Pour les canaux à effacements Markoviens, l'approche par les grandes déviations fournit la caractérisation à un symbole suivante des exposants de codage.

**Theorem 3.1** *Pour un canal à effacements Markovien d'espace d'états  $s_1, s_2 \dots s_\ell$  de matrice de transition entre états  $\Gamma$ , et de probabilité de perte dans l'état  $s_i$  égale à  $p_{s_i}$ ,  $\sum Z_i/n$  satisfait un PGD avec la fonction de taux:*

$$I(1 - \tilde{R}) = \sup_t \{t(1 - \tilde{R}) - \log \lambda_0(\Gamma_t)\} ,$$

1.  $h_1(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$  est l'entropie d'une variable de Bernoulli. L'entropie relative entre deux variables de Bernoulli de probabilités de succès  $x$  et  $y$  est  $h_2(y, x) = y \log \frac{y}{x} + (1-y) \log \frac{1-y}{1-x}$ .

où  $\lambda_0(\cdot)$  est la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice de transition déformée  $\Gamma_t$  définie par :

$$\Gamma_t(s, s') = \Gamma(s, s') \exp(\Lambda_{s'}(t))$$

avec  $\Lambda_{s'}(t) \triangleq \ln[p_{s'}e^t + (1 - p_{s'})]$ .

Pour des canaux à grands alphabets d'entrée (cela dépend de la taille de la charge des paquets) les bornes décrites par ce théorème sont atteintes par les codes de Reed-Solomon, elles peuvent être pratiquement pertinentes.

J. Bolot [2] a proposé de représenter les connections Internet comme des canaux d'Elliott-Gilbert qui perdent avec probabilité 1 dans l'état mauvais  $B$ , et probabilité 0 dans l'état bon  $G$  (cf. [3] pour des modèles plus sophistiqués).  $b$  (resp.  $g$ ) représente la probabilité de passer dans l'état  $B$  (resp.  $G$ ) en venant de  $G$  (resp.  $B$ ). Dans ce cas les exposants de codage possèdent une jolie interprétation en termes de théorie de l'Information en utilisant la mesure empirique qui compte les occurrences de chaque transition durant  $n$  itérations de la chaîne. Dans la suite  $q(\cdot, \cdot)$  dénote une probabilité sur  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ,  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) dénote la première (resp. la seconde) marginale de  $q$ , et  $q_f(i, j) \triangleq q(i, j)/q_1(i)$ . Alors, pour toute probabilité  $q(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  telle que  $q(s, s') > 0 \Rightarrow \Gamma(s, s') > 0$ , et  $q_2 = q_1$ , on définit la fonction suivante:  $I(q) = \sum_s q_1(s) H(q_f(s, \cdot) | \Gamma(s, \cdot))$ , où  $H$  est l'entropie relative. La probabilité que le temps passé dans l'état  $s$  dépasse  $\tau$  satisfait:

$$\lim_n -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\{\text{temps passé dans } s > \tau\} = \min_{q, q_1(s) > \tau, q_2 = q_1} I(q).$$

Appliquant ces formule au canal d'Elliott-Gilbert à effacements illustre l'effet de la mémoire sur les exposants de codage. Il est gratifiant de définir le canal en utilisant son trou spectral  $\delta = 1 - \lambda_1(\Gamma) = b + g$  où  $\lambda_1(\Gamma)$  est la seconde valeur propre de  $\Gamma$ , et sa capacité ( $\pi(G) = \tilde{C}$  pour la chaîne de référence, et  $\tilde{R}$  pour la chaîne déformée optimale). Le trou spectral  $\delta'$  de la chaîne déformée optimale de capacité  $\tilde{R}$  est

$$\delta' = \frac{\tilde{C}(1 - \tilde{C})\delta}{2\tilde{R}(1 - \tilde{R})(1 - \delta)} \left( \sqrt{\delta^2 + \frac{4\tilde{R}(1 - \tilde{R})(1 - \delta)}{\tilde{C}(1 - \tilde{C})}} - \delta \right). \quad (3)$$

Le *sphere packing exponent* vaut alors:

$$(1 - \tilde{R}) h_2(\delta' \tilde{R}, \delta \tilde{C}) + \tilde{R} h_2(\delta'(1 - \tilde{R}), \delta(1 - \tilde{C})). \quad (4)$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour évaluer les mérites de l'entrelacement. Pour le canal d'Elliott-Gilbert, l'entrelacement revient à modifier le trou spectral de la chaîne, si  $J$  mots de code sont entrelacés, le trou spectral devient  $1 - (1 - \delta)^J$ . Ceci améliore les exposants de codage (cf figure 3), mais hormis pour les petits entrelacements, le gain apporté par l'entrelacement est bien moindre que celui apporté par un accroissement de la longueur des blocs d'encodage.

## 4 Résultats empiriques

Comme les modèles de connections Internet sont encore un objet de débat et sont remarquablement difficiles

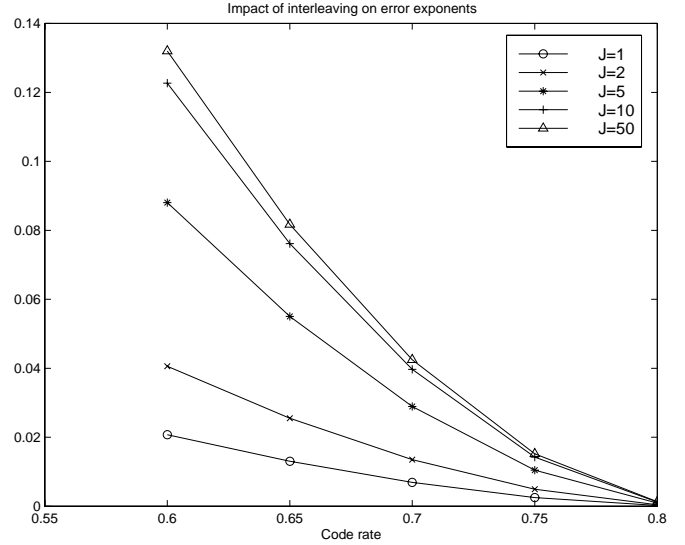


FIG. 1: Chaque courbe représente les exposants comme une fonction du débit pour un niveau donné d'entrelacement  $J$ . Les paramètres du canal d'Elliott-Gilbert sont  $\tilde{C} = .8$  et  $\delta = .296$ .

à analyser, nous avons mené une série de mesures pour évaluer la pertinence de nos calculs. En respectant une méthodologie déjà éprouvée [1, 2], nous avons envoyé des séries de paquets-sonde (de type UDP) de taille fixe (variant d'une expérience à l'autre entre 40 et 1000 octets) à intervalles réguliers compris entre 2 et 1000 millisecondes, entre des paires de stations situées aux USA, en Allemagne et en France, sur des sites académiques ou privés. UDP, le protocole de transport en mode datagramme n'est pas fiable. La durée des enregistrements varie entre une demi-heure et une journée. Les connections révèlent des profils de pertes très variables à l'échelle de la journée, le taux de pertes pouvant passer de 1% à 30%, ou de l'année en raison de la montée en puissance des dorsales. Néanmoins, il est généralement raisonnable de supposer que les séries de pertes sont stationnaires sur l'échelle d'une heure.

Ces séries de pertes ont été étudiées en utilisant les techniques classiques d'analyse des séries temporelles (détermination des corrélogrammes, périodogrammes, vérification de dépendances à long terme). Mais la pierre de touche consiste à déterminer des fréquences d'erreur de décodage empiriques. Nous avons supposés que des codes correcteurs de pertes idéaux (type Reed-Solomon) étaient appliqués aux séries observés: les paquets étaient considérés comme regroupés en blocs de longueur fixe  $n$  ( $n$  était typiquement pris entre 5 et 1000, et chaque bloc formait un mot de code. En supposant l'utilisation d'un code idéal de débit  $R$ , on obtenait une erreur au décodage si et seulement si la proportion de paquets perdus dépassait  $1 - R$ . Ce scénario n'est pas irréaliste. Nous avons déterminé la fréquence d'erreur au décodage pour différentes longueurs de blocs à différents débits (figure 4). Sur les connections très fiables comme celles que l'on observe entre les réseaux académiques allemands et français, l'utilisation de longs blocs n'apportait pas de bénéfices clairs. Cela pourrait être dû au fait que sur ces connections, la moitié des pertes apparaissent dans des rafales intenses. D'un

autre côté, sur les liaisons bruyantes comme la connection entre le réseau académique allemand et le cablo-opérateur parisien, ou entre les réseaux académiques américains et français avant février 1999, les pertes apparaissent faiblement dépendantes et notre approche Markovienne semble pertinente. A partir des courbes représentées dans la fi-

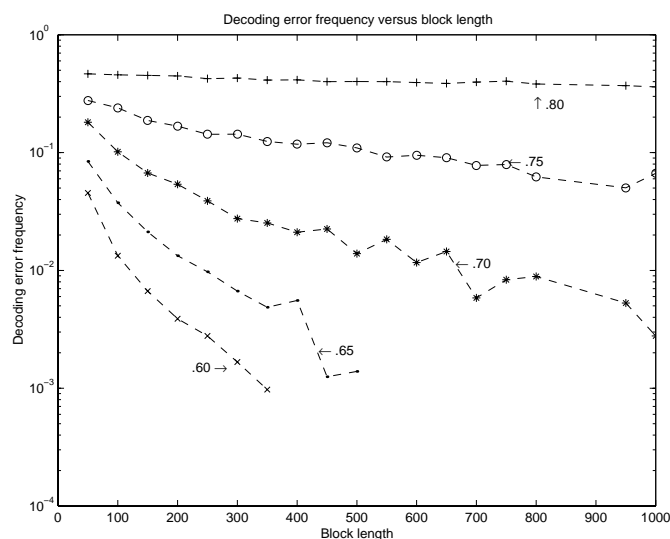


FIG. 2: Fréquence d'erreur de décodage pour différents débits, durant deux heures d'enregistrement entre l'Université de Bonn et une station raccordée au réseau de télévision câblée parisien à Paris. Des paquets UDP de 20 octets sont envoyés toutes les 20msec. Le taux de pertes moyen est de 19%.

gure 4, nous avons déterminé des exposants d'erreur empiriques pour différents débits de code. Ceci a été mené par une simple régression linéaire sur les diagrammes semi-logarithmiques. Sur la figure 4, ces exposants empiriques sont comparés avec des valeurs théoriques.

## 5 Conclusion

Ce papier peut être résumé selon deux perspectives. Théoriquement parlant, il illustre le fait que les canaux Markoviens devraient recevoir une caractérisation à un symbole et que cette caractérisation devrait s'interpréter dans le cadre des Grandes Déviations pour les fonctionnelles additives des chaînes de Markov. Pratiquement parlant, nous avons montré que en dépit de la faillite des modèles Poissoniens [8], la modélisation Markovienne peut encore fournir des prédictions qualitatives intéressantes. Bien que les dépendances entre pertes diminuent l'efficacité des codes correcteurs de pertes, ces codes ne souffrent pas toujours de la *malédiction de la latence* comme les routeurs souffrent apparemment de la *malédiction du dimensionnement des tampons* lorsqu'ils sont soumis à un trafic à dépendance à longue portée [7]. La probabilité d'erreur au décodage décroît toujours exponentiellement par rapport à la longueur des blocs et le coefficient dans l'exposant est du même ordre de grandeur que celui qui est calculé à partir du très primitif modèle d'Elliott-Gilbert.

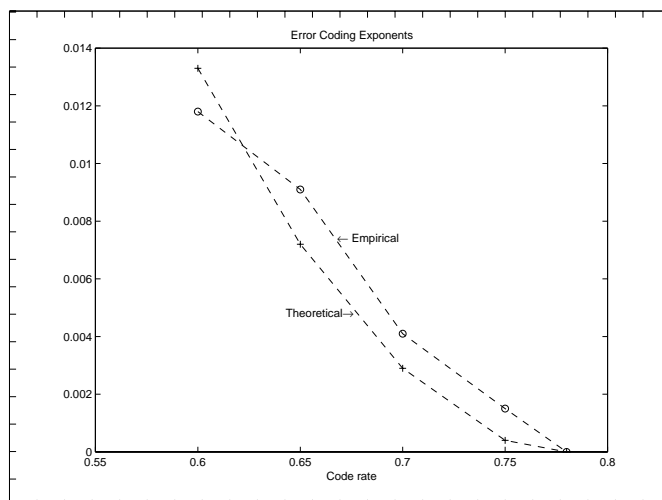


FIG. 3: Exposants de codage empiriques déterminés par régression linéaire sur les données décrites dans la figure 4. Les valeurs théoriques sont prédites en utilisant un modèle d'Elliott-Gilbert et les formules 3 et 4 en choisissant  $C = .78, \delta = .3$ .

**Remerciements** Cette étude a été financée par WG ESPRIT RAND II 21726, et le contrat CNET-Université Paris XI 96 1-B 212.

## Références

- [1] J. Andren, M. Hilding, and D. Veitch. Understanding end-to-end internet traffic dynamics. In *Proceedings of SIGCOMM'98*, 1998.
- [2] J. Bolot. Characterizing end-to-end packet delay and loss in the internet. *Journal of High-Speed Network*, 2(3), 1993.
- [3] I. Cidon, A. Khamisy, and M. Sidi. Analysis of packet loss processes in high-speed networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, pages 98–108, january 1993.
- [4] I. Csiszar and J. Korner. *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Channels*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, 1981.
- [5] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations and applications*. Jones and Bartlett publishers, 1993.
- [6] R. G. Gallager. *Information Theory and Reliable Communication*. John Wiley, 1967.
- [7] I. Norros. A storage model with self-similar input. *Queueing Systems*, 16:387–396, 1994.
- [8] V. Paxson and S. Floyd. Wide-area traffic: The failure of poisson modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 3(3):226–244, june 1995.