

# Qu'en est-il de la Résonance Stochastique comme outil potentiel en Traitement du Signal ?

Steve ZOZOR, Pierre-Olivier AMBLARD

LIS, groupe Non-linéaire  
Domaine Universitaire, B.P. 46 38402 Saint Martin d'Hères, France  
Steve.Zozor@lis.inpg.fr, Bidou.Amblard@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous étudions dans ce papier le phénomène de résonance stochastique et discutons de son utilisation en traitement du signal. Ce phénomène a jusqu'à présent été étudié à temps continu et essentiellement dans le cadre d'une sinusoïde bruitée additivement. Nous rappelons les résultats obtenus à temps discret et présentons une extension au cas multiplicatif. Nous discutons alors de l'utilisation de la résonance stochastique en traitement du signal et proposons une extension au cas multidimensionnel.

**Abstract** – In this paper we study the physical concept of stochastic resonance. This phenomenon has already been studied in continuous time, in the context of a sine corrupted by an additive gaussian white noise. We recall the result we obtained in discrete time, with various white noises. We then present results in a multiplicative context. Finally we discuss the possible use of stochastic resonance in signal processing and propose an extension of the phenomenon to multidimensional context.

## 1 Introduction

La résonance stochastique est un phénomène physique apparaissant dans des systèmes bistables excités par une sinusoïde de faible amplitude, bruitée. Afin d'appréhender ce phénomène, imaginons une particule de masse nulle soumise à un potentiel bimodal. Soumise à une force sinusoïdale d'amplitude suffisamment faible, elle oscille au fond de l'un des puits mais ne peut en sortir. Si, en plus de l'excitation sinusoïdale, elle est soumise à un bruit, elle peut sauter d'un puits à l'autre, de façon plus ou moins synchrone avec la fréquence de la sinusoïde. En absence de bruit, la particule ne peut sauter, et si la puissance du bruit est très "grande", le système est complètement aléatoire. Entre ces deux extrêmes, il existe une puissance de bruit pour laquelle l'effet d'interaction entre le bruit et la sinusoïde est optimal : la particule saute d'un puits à l'autre à la fréquence de la modulation. Une caractérisation de ce phénomène se retrouve sur le rapport signal sur bruit local (RSBL) à la fréquence de la sinusoïde. Ce ratio, tracé en fonction de "l'amplitude" du bruit  $\sigma_b$ , présente un maximum (cf. figures 1 et 3).

Cette caractérisation a incité de nombreux chercheurs à étudier ce phénomène dans une optique de détection de signaux périodiques de faible amplitude noyés dans du bruit [4]. C'est également ce qui a motivé notre étude.

De nombreuses études de ce phénomène, à temps continu, ont été élaborées [1, 2, 5]. Le système étudié dans ce papier est à temps discret (cf. [7]) et s'écrit :

$$\begin{cases} x_n &= \Phi(x_{n-1}) + e_n \\ y_n &= c \operatorname{sign}(x_n) \end{cases} \quad (1)$$

où  $\operatorname{sign}$  désigne la fonction "signe". La fonction  $\Phi$  est impaire, bistable, de points d'équilibres stables  $\pm c$  et bornée par  $\pm ax$  au moins à partir d'une certaine valeur, où  $0 < a < 1$ , ce qui assure la stabilité du système [7]. Dans

[7] nous traitons le cas de ces systèmes attaqués par une sinusoïde bruitée additivement  $e_n = \varepsilon \cos(2\pi n \lambda_0) + b_n$ . Un certain nombre d'hypothèses est également émis sur le bruit. Il est blanc au sens strict, centré, de densité de probabilité paire en particulier. Enfin la sinusoïde est telle qu'en absence de bruit le système ne peut pas basculer : le bruit se charge d'engendrer le basculement.

Toutefois d'autres types de résonance stochastique sont envisagés. Nous avons considéré le cas d'une sinusoïde bruitée multiplicativement en entrée d'un système  $\Phi = c \operatorname{sign}$ ,  $e_n = (1 + \varepsilon \cos(2\pi n \lambda_0)) b_n$  dans [8], et envisageons le cas de résonance stochastique multidimensionnelle.

Dans ce papier nous rappellerons brièvement les démarches théoriques dans le cas additif, multiplicatif. Nous présenterons alors quelques résultats de simulation. Enfin nous discuterons de l'utilisation de résonateur(s) stochastique(s) en traitement du signal et envisagerons l'extension au cas multidimensionnel.

## 2 Rappels de la théorie concernant le cas additif

Le système étudié est (1) où  $e_n = \varepsilon \cos(2\pi n \lambda_0) + b_n$ . La démarche que nous avons employé dans [7] consiste à étudier la densité de probabilité de  $x_n$ , donnée récursivement par l'équation intégrale  $f_x(x, n) = \int_{\mathbb{R}} f_b(x - \Phi(y) - \varepsilon_n) f_x(y, n-1) dy$  où  $f_b$  est la distribution du bruit  $b_n$ ,  $f_x(\cdot, n)$  celle de  $x_n$  et  $\varepsilon_n$  représente la sinusoïde.  $f_x$  s'écrit à partir d'un opérateur  $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_b(x - \Phi(y)) f(y) dy$$

sous la forme  $f_x(x, n) = \mathcal{K}(f_x(\cdot, n-1))(x - \varepsilon_n)$ . Un développement limité à l'ordre 1 de  $\mathcal{K}(f_x(\cdot, n-1))(x - \varepsilon_n)$

nous permet alors d'étudier  $f_x(\cdot, n)$ . Cette étude nous permet d'évaluer le vecteur de probabilité de  $y_n$ ,  $p_y(n)$  et la matrice de transition de  $y_n$  à  $y_{n+1}$ ,  $\overline{P_y}(n+1, n)$ . Le bruit  $b_n$  étant blanc au sens strict,  $y_n$  définit une chaîne de Markov à deux états. Son comportement est entièrement donné par  $\overline{p_y}(n)$  et  $\overline{P_y}(n+1, n)$ . La fonction de corrélation  $\Gamma_y(n, q) = E[y_{n+q}y_n]$  de  $y_n$  s'exprime ensuite facilement. Par un moyennage en  $n$  de cette fonction de corrélation nous obtenons enfin la corrélation à la fréquence cyclique nulle qui est de la forme

$$\Gamma_y(q) \approx c^2 \beta^{|q|} + \frac{\varepsilon^2}{2} |\chi(\lambda_0)|^2 \cos(2\pi q \lambda_0)$$

où les paramètres  $\beta$  et  $\chi(\lambda_0)$  dépendent du système  $\Phi$  et du bruit (densité  $f_b$ , variance  $\sigma_b$ ) (cf. [7])

$$\begin{cases} \beta &= 2 \int_0^{+\infty} (F_b(\Phi(x)) - F_b(-\Phi(x))) f_{\text{bruit}}(x) dx \\ \chi(\lambda_0) &= -2c \int_0^{+\infty} (\mathcal{I} - e^{2i\pi\lambda_0 \mathcal{K}})^{-1} \circ \mathcal{L}(f_{\text{bruit}})(x) dx \end{cases}$$

avec  $F_b$  fonction de répartition de  $b_n$ ,  $\cdot^{-1}$  et  $\circ$  désignant respectivement les opérateurs d'inversion et de composition, avec l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f'_b(x - \Phi(y)) f(y) dy$$

( $f'_b$  désigne la dérivée de  $f_b$ ), et avec  $f_{\text{bruit}}$  unique densité propre de  $\mathcal{K}$  (cf. [7]).

Dans le cas où  $\Phi = c \text{ sign}$ , les paramètres sont  $\beta = F_b(c) - F_b(-c)$  et  $\chi(\lambda_0) = \frac{2cf_b(c)}{1 - \beta e^{2i\pi\lambda_0}}$ .

Cette corrélation est composée de la corrélation d'une "partie bruit" de sortie (en  $\beta^{|q|}$ ) et de la "partie sinusoïde" de sortie (en  $\cos(2\pi q \lambda_0)$ ). Le spectre du signal  $y_n$  se calcule par transformée de Fourier de  $\Gamma_y(q)$ . Nous en déduisons alors le rapport signal sur bruit local (RSBL) à la fréquence  $\lambda_0$  comme étant le rapport entre la puissance "en  $\lambda_0$ " de la sinusoïde de sortie (poids du dirac) et la densité spectrale de puissance en  $\lambda_0$  du bruit de sortie. Nous montrons dans [7] que le RSBL tend vers 0 pour  $\sigma$  tendant vers 0 ou vers  $+\infty$  : il existe un  $\sigma_b$  pour lequel ce ratio atteint un maximum, c'est l'effet de résonance stochastique.

Les figures 1 et 3 représentent le RSBL pour le système le plus simple  $\Phi = c \text{ sign}$ , et pour des bruits blancs gaussien et uniforme ( $c = 10$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ). Si le phénomène de résonance stochastique existe bien, nous pouvons constater sur les courbes de gain 2 et 4 des résultats variés : dans le cas gaussien le gain ne dépasse pas 1...

### 3 Cas multiplicatif

Peut-on envisager de la résonance stochastique dans le cas de sinusoïde bruitée multiplicativement (entrée  $e_n = (1 + \varepsilon \cos(2\pi n \lambda_0))b_n$ ) ? Pour répondre à cette question, dans le cadre d'un système de type (1) où  $\Phi = c \text{ sign}$ , en suivant la démarche du paragraphe précédent, nous montrons dans [8] que la fonction de corrélation  $\Gamma(n, q)$  de  $y_n$  est en fait une fonction de covariance. Par un moyennage en  $n$  nous obtenons un spectre dépourvu de la moindre

raie et il est vain de chercher à évaluer un RSBL. La transformée de Fourier en  $(n, q)$  de la fonction de corrélation donne la corrélation spectrale du signal  $y_n$ . La fréquence résultante de  $n$  est la fréquence cyclique tandis que celle résultante de  $q$  est la fréquence harmonique "classique". Nous avons donc choisi d'étudier la corrélation spectrale à la fréquence cyclique  $\lambda_0$  (fréquence de la sinusoïde) et à la fréquence harmonique nulle  $\Gamma_{\text{ch}}(\lambda_0, 0)$ . Le module de cette corrélation cyclique, tracé en fonction de  $\sigma_b$ , exhibe un phénomène de type résonance stochastique. Mais contrairement au cas additif, dans le cas multiplicatif la sortie ne bascule pas de manière périodique à la fréquence de l'entrée, mais par paquets, périodiquement.

Les courbes 5 et 6 représentent la racine carré du rapport des corrélations spectrales d'entrée et sortie en  $(\lambda_0, 0)$ , sorte de gain du système ( $c = 10$ ,  $\varepsilon = .25$  et  $\lambda_0 = .02$ ). Nous pouvons voir que dans le cas gaussien comme dans le cas uniforme ce gain dépasse 1...

## 4 Discussions

### 4.1 Application potentielle en détection

Peu de tentatives d'utilisation de la résonance stochastique en traitement du signal ont été faites jusqu'ici, et quoi qu'il en soit sans beaucoup de réussite [3].

Le problème de détection est de choisir entre deux hypothèses : la sinusoïde est absente ou elle est présente dans le signal observé  $r_n$

$$\begin{cases} H_0 & r_n = b_n & n = 0, \dots, N-1 \\ H_1 & r_n = b_n + \varepsilon_n & n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons dont on dispose. Lorsque la fréquence  $\lambda_0$  de la sinusoïde à détecter est connue, le détecteur classique utilisé, issu d'une stratégie de Neyman-Pearson dans le cadre d'un bruit blanc gaussien est le détecteur d'enveloppe (LRT, cf. [6])

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{-2i\pi n \lambda_0} \right| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

Ses performances sont bien connues dans le cadre du bruit blanc gaussien et sont données par la probabilité de détection  $P_d$  en fonction de la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$

$$P_d = Q \left( \sqrt{2N RSB_{\lambda_0}}, \sqrt{-2 \ln(P_{fa})} \right)$$

avec  $Q$  fonction de Marcum [6]. Cette formule fait intervenir le RSBL  $RSB_{\lambda_0}$  qui est dans ce cas  $\frac{\varepsilon^2}{4\sigma_b^2}$ .

Lorsque le bruit n'est plus gaussien, le théorème de la limite centrale peut être invoqué et le calcul des performances de [6] reste valide. Lorsque le bruit n'est plus blanc, en général le théorème de la limite centrale peut encore être invoqué, et les calculs de [6] peuvent être adaptés pour aboutir à la même formule.

Le paramètre clé est donc le rapport signal sur bruit local. Or la résonance stochastique est capable de modifier ce ratio (contrairement à tout système linéaire) : nous nous tournons naturellement vers elle.

Dans le cas additif, nous montrons dans [7], pour le système  $\Phi = c$  sign que l'amplitude optimale du bruit ne dépend que du paramètre  $c$  et du type de bruit. Connaissant le type de bruit et sa variance, l'idée est de choisir la valeur du paramètre  $c$  telle que l'amplitude du bruit est l'optimale pour le système construit. Ne connaissant souvent ni l'un ni l'autre, l'idée est alors de mettre en cascade des résonateurs (pour différents  $c$ ), de renormaliser chaque sortie par la densité spectrale en  $\lambda_0$  de la partie bruit (qu'il faut donc estimer), et de choisir la sortie donnant le maximum. Cette stratégie est illustrée figure 7.

Si la fréquence n'est pas connue, on peut alors s'inspirer du GLRT [6] et du schéma 7 simultanément.

Jusqu'ici les tentatives d'utilisation de la résonance stochastique en détection se bornaient aux cas de bruit gaussien. Nous avons pu voir que dans ce cas, la résonance stochastique ne permet pas d'améliorer le RSBL (gain plus petit que 1). C'est sans aucun doute la raison des échecs cités. Toutefois, dans le cas uniforme par exemple, le gain dépasse 1 et l'utilisation de la résonance stochastique semble intéressante.

La figure 8 représente les performances du détecteur d'enveloppe basé sur le signal observé comparé au détecteur que nous préconisons, dans le cadre d'un bruit blanc uniforme ( $\sigma_b = 10$ ,  $\varepsilon = 0.25$ , 33 résonateurs,  $c$  variant de 10 à 18.25).

Concernant le cas de sinusoïdes bruitées multiplicativement, connaissant la fréquence de la sinusoïde recherchée, il est aisé d'estimer la corrélation spectrale en  $(\lambda_0, 0)$ . De la même manière que pour le cas additif, nous envisageons la construction d'une cascade de résonateurs.

## 4.2 Extension aux systèmes multidimensionnels

Nous envisageons à présent l'utilisation de systèmes multidimensionnels. Le système en cours d'étude est du type (1) où pour  $x = [x^0 \ x^1]^t$ ,  $\Phi(x) = c [\text{sign}(x^0)h(x^1)\text{sign}(x^1)h(x^0)]^t$  avec  $h$  porte sur  $[-\alpha c; \alpha c]$  ( $\alpha$  paramètre supérieur à 1). Le signal  $x_n$  est 2-dimensionnel,  $x_n = [x_n^0 \ x_n^1]^t$ , l'entrée est un signal "elliptique"  $\varepsilon_n = [\varepsilon_0 \cos(2\pi n\lambda) \ \varepsilon_0 \cos(2\pi n\lambda)]^t$  bruité additivement par  $b_n = [b_n^0 \ b_n^1]^t$  (où  $b_n^0$  et  $b_n^1$  sont blancs temporellement et spatialement, de variances respectives  $\sigma_0^2$  et  $\sigma_1^2$ ). La fonction sign est appliquée composante à composante sur  $x_n$ . A l'image du cas monodimensionnel, la sortie est approximativement la somme d'un bruit de sortie et d'un signal elliptique de fréquence  $\lambda$ . Des premiers résultats nous semblent prometteurs. De façon schématique, les amplitudes (modules et phases) des composantes sinusoïdales de sortie divisées par celles des composantes sinusoïdales de l'entrée définissent les susceptibilités (ou "transferts" . . . non-linéaires)  $\chi_0(\lambda)$  et  $\chi_1(\lambda)$  du système sur chaque composante. Nous constatons en particulier sur les courbes 9, 10 et 11 ( $c = 10$ ,  $\alpha = 1.75$  et  $\lambda = 0.02$ ) que le bruit de la seconde composante est capable d'amplifier la première composante sinusoïdale. Les calculs sont trop longs pour figurer ici, toutefois on pourra se reporter à [9].

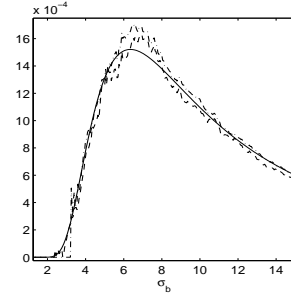


FIG. 1: Cas additif gaussien :  $RSB_{\lambda_0}$  fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

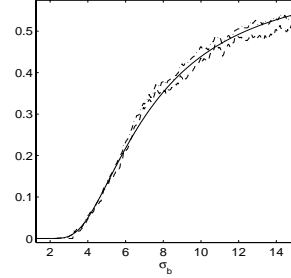


FIG. 2: Cas additif gaussien : Gain en fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

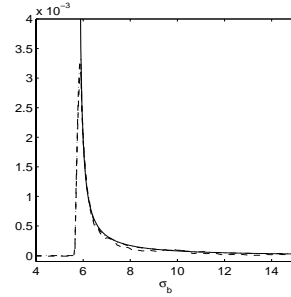


FIG. 3: Cas additif uniforme :  $RSB_{\lambda_0}$  fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

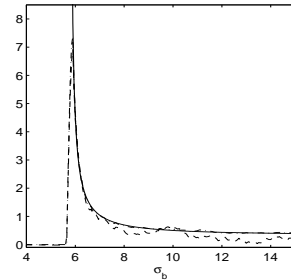


FIG. 4: Cas additif uniforme : Gain en fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

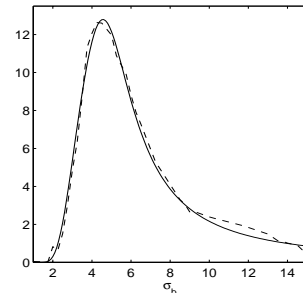


FIG. 5: Cas multiplicatif gaussien : gain en fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

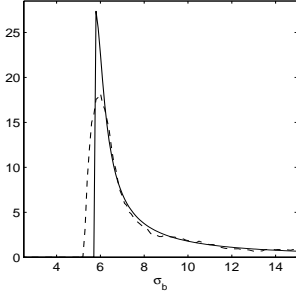


FIG. 6: Cas multiplicatif uniforme : gain en fonction de  $\sigma_b$ . Trait plein : allures théoriques ; tirets : allures expérimentales.

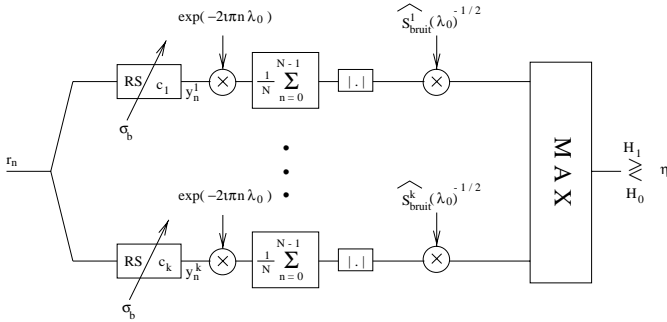


FIG. 7: Stratégie de détection en utilisant la résonance stochastique.

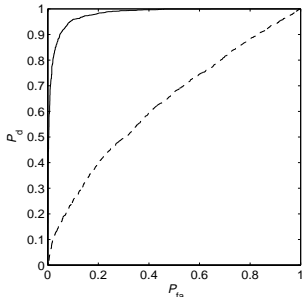


FIG. 8: Performances du détecteur basé sur la résonance stochastique (trait plein) comparé à celui basé sur le signal observé (tirets) : probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme.

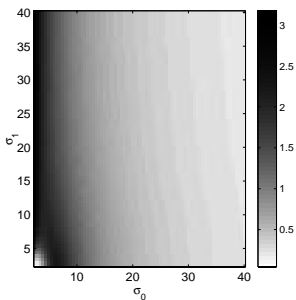


FIG. 9: Cas 2-dimensionnel gaussien :  $|\chi_0(\lambda)|$  fonction de  $(\sigma_0, \sigma_1)$ .

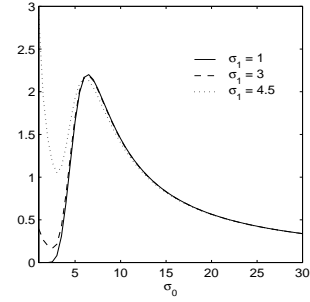


FIG. 10: Cas 2-dimensionnel gaussien :  $|\chi_0(\lambda)|$  fonction de  $\sigma_0$  pour divers  $\sigma_1$ .

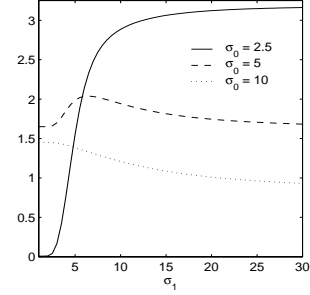


FIG. 11: Cas 2-dimensionnel gaussien :  $|\chi_0(\lambda)|$  fonction de  $\sigma_1$  pour divers  $\sigma_0$ .

## Références

- [1] M.I. Dykman *et al.*, *Phase Shifts in Stochastic Resonance*, Phys. Rev. Let., vol. 68, no. 20, 1992
- [2] G. Hu, *et al.*, *A study of stochastic resonance without adiabatic approximation*, Phys. Let. A, vol. 172, no. 1/2, 1992
- [3] M.E. Inchiosa and A.R. Bulsara, *Signal detection statistics of stochastic resonators*, Physical Review E, vol. 53, no. 3, pp. R2021-R2024, March 1996
- [4] Jung, P.; Hänggi, P. *Amplification of small signals via stochastic resonance*, Phys. Rev. A, Vol.44, no.12, 1991
- [5] McNamara, B.; Wiesenfeld, K. *Theory of stochastic resonance*, Phys. Rev. A, Vol.39, no.9, 1989
- [6] H.L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, part 1, John Wiley & Sons, New York, 1968
- [7] S. Zozor and P.O. Amblard, *Stochastic Resonance in discrete-time nonlinear AR(1) models*, IEEE trans. on SP, vol. 47, no. 1, 1999
- [8] S. Zozor and P.O. Amblard, *Stochastic Resonance in a Discrete Time Nonlinear System with Cyclostationary Inputs*, Int. conf. on Phys. in Signal and Image Proc., Paris, France, 1999
- [9] S. Zozor, rapport de thèse, en préparation