

Minima du critère Module Constant pour un canal AR

Azzédine TOUZNI^{1*}, Inbar FIJALKOW²

¹School of Electrical Engineering, Cornell University,
324 Frank H.T. Rhodes, Ithaca, NY 14853, USA

²ETIS, CNRS URA 2235
6 av. du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France
touzni@ee.cornell.edu, fijalkow@ensea.fr

Résumé – Dans cette contribution on s'intéresse à la caractérisation des minima du critère Module Constant (MC) pour un canal Auto Régressif (AR) particulier. Le résultat principal montre la colinéarité stricte entre l'ensemble des minima du critère MC (locaux et globaux) et les solutions de Wiener de même retard. En montrant que les solutions sous-optimales ont pour origines un effet comparable à une sous-modélisation de l'égaliseur, nous pouvons ainsi unifier des résultats *a priori* contradictoires qui permettent d'expliquer la présence de minima locaux. Ce résultat intègre comme cas particulier l'exemple bien connu de minimum local décrit par Ding *et al* [1].

Abstract – In this contribution, we are interested in the characterization of Constant Modulus equalizers for an AR channel. Our main result shows that CM equalizers (local and global CM minima) are colinear to the Wiener solutions (which achieve MMSE equalization). We show that the sub-optimal solutions (local minima) are induced by an effect of undermodeling of the equalizer. This result includes, as a special case, the well-known example of local minima introduced by Ding *et al.* [1].

1 Introduction

Le critère Module Constant (MC) ou critère de Godard [3] est un critère bien connu en égalisation dite aveugle (*i.e.* qui n'utilise pas de séquence d'apprentissage pour l'estimation de l'égaliseur). De nombreuses études lui ont encore été récemment consacrées (cf. [4], par exemple). Néanmoins certains aspects de la caractérisation de ses minima (pour les filtres d'ordres fini) restaient obscurs.

Il a été montré récemment qu'en présence de bruit les minima globaux du critère MC, dans le cas d'un canal MA multivarié, sont très proches de la solution de Wiener [2] (en l'absence de bruit les solutions sont identiques et conduisent à une égalisation parfaite [5] malgré le caractère multi-modale du critère). Ce résultat est d'un intérêt pratique non négligeable dans la mesure où il montre que l'on peut approcher les estimateurs optimaux au second ordre sans séquence d'apprentissage. Toutefois, il n'existe pas d'intersection entre ces résultats et ceux donnés par Ding dans le cas d'un modèle AR particulier pour lequel il décrit un exemple de minimum local (à notre connaissance le seul clairement établi) [1]. Il semble dès lors qu'il existe une contradiction entre le fait d'affirmer l'absence de minima locaux parasites dans le cas MA multivarié (qui peut être inversé par un filtre d'ordre fini [2]) et la présence de minima locaux dans le cas d'un filtre AR scalaire pour lequel il existe également un inverse d'ordre fini. Dans ce cas d'où proviennent les minima locaux? s'agit-il réellement de minima locaux parasites? sont-ils liés au noyau de la matrice de convolution? existe-il une relation entre ces

minima et les solutions de Wiener par exemple? (comme dans le cas MA [7]).

Les résultats que nous exposerons dans la suite donnent les réponses suivantes :

- À partir d'une généralisation du modèle AR utilisé par Ding, nous montrons que les minima stables du critère MC se divisent en deux catégories: un ensemble de solutions idéales, qui conduit à une égalisation parfaite et un ensemble de solutions sous-optimales qui correspondent à des minima locaux,
- nous montrons que tous les minima du critère MC sont strictement colinéaires aux solutions de Wiener de même retards,
- nous montrons que les minima locaux proviennent d'une sous-modélisation de l'égaliseur lors de l'estimation du signal source pour des retards particuliers (voir (4)). La présence de minima locaux n'est donc pas imputable à la multimodalité du critère MC puisque la solution de Wiener (avec apprentissage) ne fait pas mieux.
- par ailleurs, nous montrerons que la présence d'un noyau non nul pour la matrice de convolution du mélange ne suffit pas à prouver l'existence de minima locaux parasites. Ce point est très important car nous obtenons la situation singulière suivante où les minima locaux du critère MC dans le cas d'un modèle AR (et en particulier l'exemple de Ding) peuvent être caractérisés à partir du noyau de la matrice de convolution du mélange, ces solutions restent cependant colinéaires aux solutions de Wiener,
- enfin, nous reprendrons le cas particulier donné par Ding, et nous donnerons les conditions pour une

*Ce travail a été effectué lors d'un séjour postdoctoral, financé par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique), Rocquencourt, France.

égalité stricte en fonction de la distribution de la source et/ou du canal entre les solutions de Wiener et tous les minima du critère MC.

2 Formulation du problème

2.1 Modèle de données

Nous considérons (une légère) généralisation du modèle de canal AR introduit dans [1], qui s'écrit :

$$y(n) + \beta y(n - \tau) = s(n) \quad (1)$$

où $0 < |\beta| < 1$ avec $\beta \in \mathbf{R}$ et $\tau > 1$. Nous supposons que le signal source $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un processus i.i.d de variance $\sigma_s^2 = E[s^2]$ représentant le signal d'intérêt. En regroupant les observations $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ dans le vecteur de régression $Y_N(n) = (y(n), \dots, y(n - N + 1))^\top$ de longueur N (avec $N > \tau$), nous pouvons écrire :

$$Y_N(n) = \mathcal{H}_\infty(\beta) S(n) \quad (2)$$

où, $S(n)$ représente un vecteur semi-infini contenant la séquence d'entrée. Il est défini par $S(n) = (s(n), s(n - 1), s(n - 2), \dots)^\top$. $\mathcal{H}_\infty(\beta)$ est une matrice inconnue de dimensions $N \times \infty$, fonction du paramètre β , qui prend la forme suivante :

$$\mathcal{H}_\infty(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & (-\beta)^1 & 0 & \dots & (-\beta)^2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & (-\beta)^1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & (-\beta)^1 & \dots \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.2 Égaliseur MA de degré fini

L'égalisation du canal (1), c'est-à-dire, l'estimation du signal d'entrée à l'aide d'un filtre RIF équivaut à caractériser un vecteur $g^{(\alpha)} = (g_0^{(\alpha)}, \dots, g_{N-1}^{(\alpha)})^\top$ de dimension N de sorte que :

$$v(n) = g_\star^{(\alpha)\top} Y_N(n) = \lambda s(n - \alpha) \quad (4)$$

où α désigne est un retard arbitraire et λ un facteur d'échelle non nul.

Nous considérons le problème de l'estimation des filtres $g^{(\alpha)}$ comme une solution minimisant le critère MC [6] [3] :

$$\Phi_{MC}(g) = E[(v(n)^2 - r)^2] \quad (5)$$

où $r = \frac{E[s^4]}{E[s^2]}$ désigne une constante de dispersion fixée. On note g_{mc}^α les minima de $\Phi_{MC}(g)$ et on introduit de façon parallèle la notation g_w^α pour les solutions de Wiener qui minimisent le critère $E[(v(n) - s(n - \alpha))^2]$ (pour lequel $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est supposé connu).

Dans la suite nous considérons le problème de l'estimation des égaliseurs $g^{(\alpha)}$ à partir du critère MC ainsi que la solution de Wiener qui fournit l'EQMM.

3 Résultats principaux

3.1 Solutions $g_w^{(\alpha)}$

Pour aller à l'essentiel, nous donnons directement les solutions de l'égalisation EQMM i.e. les solutions de Wiener

pour les retards $\alpha \in \{0, \dots, N - 1\}$. Nous montrerons ensuite que tous les minima de $\Phi_{MC}(g)$ sont colinéaires à ceux fournis par un filtrage de Wiener. Le premier résultat est donné dans le lemme suivant.

Lemme 1 Les filtres $g_w^{(\alpha)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k^{(\alpha)} z^{-k}$, qui fournissent l'EQMM de retard entrée/sortie α s'écrivent :

$$g_w^{(\alpha)}(z) = \begin{cases} (1 + \beta z^{-1})z^{-\alpha} & \text{pour } 0 < \alpha \leq N - \tau \\ (1 - \beta^2)z^{-\alpha} & \text{pour } N - 1 \geq \alpha > N - \tau \end{cases} \quad (6)$$

Pour les retards $0 < \alpha \leq N - \tau$, les solutions $g_w^{(\alpha)}(z)$ conduisent à une égalisation sans erreur du canal. En effet, $v(n) = [g_w^{(\alpha)}(z)]y(n) = [z^{-\alpha}]s(n)$. Pour chaque retard α , les solutions $g_w^{(\alpha)}(z)$ sont obtenues par une « translation » de la solution idéale qui correspond au retard nul $g^\star(z) = h(z) = 1 + \beta z^{-1}$ dans la tramedes observations : $y(n), y(n - 1), \dots, y(n - N + 1)$ de dimension N . Pour un retard $\alpha > N - \tau$, il apparait un effet de sous-modélisation de l'égaliseur qui ne peut plus s'exprimer comme une combinaison linéaire de deux observations $y(n - k)$ et $y(n - k - \tau)$. Dans ce cas le filtre optimal (à un coefficient) vaut $(1 - \beta^2)z^{-\alpha}$. Nous ne donnons pas les détails de la démonstration de ce résultat par manque d'espace. On pourra en revanche consulter [7] pour plus d'informations.

Exemple: Afin de mieux visualiser le résultat du Lemme 2, nous donnons ci-dessous les solutions EQMM dans le cas particulier où $\tau = 2$ et $N = 3$. Pour ces paramètres nous obtenons une matrice de convolution de la forme :

$$\mathcal{H}_\infty(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta & 0 & \beta^2 \dots \\ 0 & 1 & 0 & -\beta & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\beta \dots \end{pmatrix} \quad (7)$$

La solution de Wiener est donnée par $g_w^{(\alpha)} = \sigma_s^2 R_Y^{-1} \mathcal{H}_\infty(\beta) \delta_\alpha$ (où δ_α est un vecteur canonique). Un calcul simple et direct nous permet d'obtenir d'une part,

$$R_Y = E[Y_N(n) Y_N(n)^\top] = \frac{\sigma_s^2}{1 - \beta^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

et d'autre part,

$$R_Y^{-1} = \frac{1}{\sigma_s^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 + \beta^2 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} g_w^{(1)} &= (1, 0, \beta) \\ g_w^{(2)} &= (0, 1 - \beta^2, 0) \\ g_w^{(3)} &= (0, 0, 1 - \beta^2) \end{aligned} \quad (10)$$

□

3.2 Colinéarité entre $g_{mc}^{(\alpha)}$ et $g_w^{(\alpha)}$

Lemme 2 Les minima stables du critère MC et les solutions de Wiener sont reliés par la relation suivante :

$$g_{mc}^{(\alpha)} = \pm \mu g_w^{(\alpha)}$$

où $g_w^{(\alpha)}(z) = (1 + \beta z^{-\tau})z^{-\alpha}$ pour $0 \leq \alpha \leq N - \tau$ et $g_w^{(\alpha)}(z) = (1 - \beta^2)z^{-\alpha}$ pour $N - 1 \geq \alpha > N - \tau$ et où le gain μ vaut,

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha \leq N - \tau \\ \frac{1}{(1 - \beta^2)\sqrt{1 - \beta^2 + 6\frac{\beta^2}{\rho}}} & \text{pour } \alpha > N - \tau \end{cases}$$

où ρ est le kurtosis de la source.

Les solutions associées aux retards $\alpha \leq N - \tau$ fournissent un ensemble de minima globaux qui conduisent à une égalisation parfaite. Les solutions pour $\alpha > N - \tau$ fournissent un jeu de minima locaux. On peut noter que si la solution EQMM dépend uniquement du canal (c'est-à-dire de β), les solutions $g_{mc}^{(\alpha)}$ pour $\alpha > N - \tau$ obtenues pour le critère MC dépendent conjointement du canal et de la distribution de la source par le biais notamment du kurtosis de ρ . Signalons que dans le cas d'un modèle AR le fait de considérer N très grand (mais fini) n'améliore pas les performances d'égalisation et en particulier ne fait pas disparaître les minima locaux $g_{mc}^{(\alpha)}$ associés aux retards $\alpha \leq N - \tau$. Comme dans le cas des solutions EQMM, ces minima proviennent d'une sous-modélisation de l'ordre de l'égaliseur.

Démonstration :

En utilisant l'expression $y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\beta)^k s(n - k)$, on peut aisément établir que la r.i. du filtre $g_w^{(\alpha)}(z) = (1 + \beta z^{-1})z^{-\alpha}$ est solution de l'équation :

$$\nabla \Phi_{MC}(g) = E[((g^\top Y_N(n))^2 - r)(g^\top Y_N(n))Y_N(n)] = 0$$

pour $0 \leq \alpha \leq N - \tau$ ce qui permet d'affirmer que les $g_{mc}^{(\alpha)}$ sont des extrema de $\Phi_{MC}(g)$. La stabilité des solutions $g_{mc}^{(\alpha)}$ est vérifiée en vérifiant la positivité du Hessien (i.e. $\nabla^2 \Phi_{MC}(g_{mc}^{(\alpha)}) > 0$) en ces points. Ces solutions sont identiques aux solutions de Wiener pour les retards d'égalisation $\alpha \leq N - \tau$. Par ailleurs, nous pouvons établir que les vecteurs de la forme $g_{mc}^{(\alpha)} = \pm \sqrt{r E[y^2]/E[y^4]} \delta_\alpha$ sont des extrema de $\Phi_{MC}(g)$ pour $\alpha > N - \tau$. La stabilité de ces solutions est déduite d'un résultat donné par Ding [1]. D'après le résultat du lemme 1, nous savons également que $g_w^{(\alpha)} = (1 - \beta^2)\delta_\alpha$ pour $\alpha > N - \tau$. Autrement dit, nous avons $g_{mc} = \pm \mu g_w$ avec $\mu = (1 - \beta^2)^{-1} \sqrt{r E[y^2]/E[y^4]}$. En notant que $E[y^2] = E[s^2]/(1 - \beta^2)$ et que $E[y^4] = (E[s^4] + 3\beta^2 E[s^2]^2)/(1 - \beta^4)$, nous pouvons exprimer le gain μ à partir du paramètre de canal β et des moments d'ordre 2 et 4 de la source. Sachant que $r = \frac{E[s^4]}{E[s^2]}$, il vient

$$\frac{E[y^2]}{E[y^4]} r = \frac{1}{(1 - \beta^2) + 6\beta^2 \frac{E[s^2]^2}{E[s^4]}} \quad (11)$$

□□□

Exemple : Dans l'exemple de la figure 1, nous visualisons les contours du critère MC en fonction de l'égaliseur pour un modèle AR de paramètre $\beta = 0.4$ et $N = 2$. On peut voir qu'il existe deux minima différents : un minima global caractérisé par $g_{mc} = (1, 0.4)$ et son symétrique et un minima local $g_{mc} = (0, 0.74)$ et son symétrique. Ces minima sont à comparer aux solutions de Wiener : $g_w^{(0)} = (1, 0.4)$ et $g_w^{(1)} = (0, 0.84)$. Nous vérifions donc que les minima globaux sont identiques et que les minima locaux sont colinéaires.

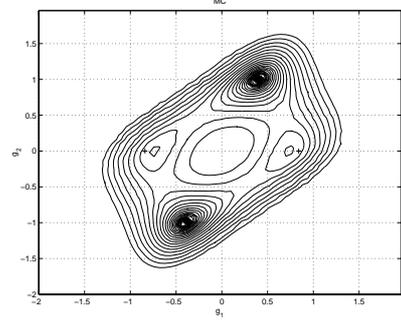


FIG. 1: Modèle AR: Contours du critère MC en fonction de l'égaliseur, $\beta = 0.4$, $N = 2$.

3.3 Relations entre g_{mc}^* et $\mathcal{Ker}(\mathcal{H}_\infty(\beta))$

Nous voudrions ici apporter quelques éclaircissements sur l'origine des minima locaux de $\Phi_{MC}(g)$ obtenus pour le modèle AR décrit dans (1). Etant donné que les minima du critère sont caractérisés par la relation :

$$\nabla \Phi_{MC}(g) = \mathcal{H}_\infty(\beta) E[((g^\top Y_N(n))^2 - r)(g^\top Y_N(n))S(n)] = 0 \quad (12)$$

Il est très simple de montrer que les solutions idéales, c'est-à-dire les minima globaux, sont solutions de l'équation $E[((g^\top Y_N(n))^2 - r)(g^\top Y_N(n))S(n)] = 0$. En effet, pour $g_{mc}^{\star\top} Y_N(n) = s(n - \alpha)$, pour $\alpha \leq N - \tau$, nous vérifions immédiatement que $E[((g^\top Y_N(n))^2 - r)(g^\top Y_N(n))S(n)] = E[(s(n - \alpha)^2 - r)s(n - \alpha)^2] = 0$ c'est-à-dire que $E[s^4] = rE[s^2]$ ce qui est vrai par définition de r . La caractérisation des minima locaux obtenue pour les solutions sous-optimales du critère MC est établie dans la proposition suivante.

Lemme 3 Pour les modèles du type (1) avec $\tau \in N^*$, les solutions

$$g_{mc}^{(\alpha)}(z) = \mu_{MC} z^{-\alpha} \quad \text{pour } \alpha > N - \tau \quad (13)$$

de réponses impulsionnelles $g_{mc}^{(\alpha)}$ minima stables de $\Phi_{MC}(g)$, avec $\mu_{MC} = \pm \sqrt{r \frac{E[y^2]}{E[y^4]}}$ vérifient

$$E[(v(n)^2 - r)v(n)S(n)] \in \mathcal{Ker}(\mathcal{H}_\infty(\beta)) \quad (14)$$

où $v(n) = g_{mc}^{(\alpha)\top} Y_N(n)$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans [7]. Les solutions sous-optimales du critère MC (qui fournissent les minima locaux), sont indirectement caractérisées par le noyau de $\mathcal{H}_\infty(\beta)$. Elles pourraient donc être *a priori* considérées comme des solutions indésirables qui annulent le gradient du critère. En fait, ces solutions ne peuvent pas être caractérisées de minima locaux parasites dans la mesure où ces elles sont également colinéaires aux solutions de Wiener (de même retard), et correspondent donc à l'estimation du signal source pour les retards $\alpha > N - \tau$. Autrement dit, par cet exemple nous montrons que la présence d'un noyau non nul pour la matrice de convolution du mélange ne suffit pas à prouver l'existence de minima locaux parasites. Les conclusions apportées par Z.Ding sur cette question sont donc incomplètes. On remarque enfin que dans la mesure où les solutions EQMM appartiennent à l'espace signal il en est de même pour les minima du critère MC. Notons qu'il existe des résultats similaires dans le cas d'un canal MA, [8][7].

TAB. 1: Valeurs admissibles pour β en fonction de ρ

$\rho = 1.5$	± 0.48209	± 1.19761
$\rho = 1$	± 0.66464	± 1.16544
$\rho = 0.5$	± 0.80599	± 1.12226
$\rho = 0.1$	± 0.92793	± 1.05924

β

4 Minima de Ding ($\tau = 1$)

A titre illustratif, nous considérons l'exemple de minimum local $g_{mc} = (0 \cdots 0\nu)$ décrit par Ding, pour un canal (1) avec $\tau = 1$. Notons que pour $\tau = 1$, il existe un minimum local et $N - 1$ minima globaux. Nous donnons, ci-dessous, les conditions qui conduisent à une égalité stricte entre le minimum local $g_{mc}^{(N-1)}$ et la solution de Wiener $g_w^{(N-1)}$ de même retard entrée/sortie. Pour cela on peut fixer soit la distribution *i.e.* ρ , soit le canal *i.e.* β . Nous considérons les deux cas.

Pour ρ fixé on obtient l'équivalence des performances lorsque

$$\{\beta = 0 \quad \text{ou} \quad p(\beta) = (\rho - 6)\beta^4 + 3(4 - \rho)\beta^2 + 3(\rho - 2) = 0\} \quad (15)$$

La première solution correspond au canal trivial $h(z) = 1$. La résolution de la deuxième équation $p(\beta) = 0$ permet de fournir une expression de β en fonction du kurtosis. On obtient les solutions

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{2(\rho - 6)(3\rho - 12 \pm \sqrt{3\rho(8 - \rho)})}}{2(\rho - 6)} \quad (16)$$

Dans le tableau 1, nous donnons les solutions numériques β , pour différentes valeurs (arbitraires) de ρ , à partir de l'expression ci-dessus. Les solutions admissibles, qui conduisent à un modèle AR stable, sont données en gras.

Pour β fixé, nous pouvons exprimer ρ en fonction de β . Nous obtenons :

$$\rho = 6 \frac{1 - 2\beta^2 + \beta^4}{3 - 3\beta^2 + \beta^4} \quad (17)$$

compte tenu de la contrainte $\rho < 3$ sur le signal à l'entrée, qui garantit la stabilité de l'extremum $g_{mc}^{(N-1)}$ de $\Phi_{MC}(g)$, les solutions admissibles pour β sont comprises dans l'intervalle

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} < \beta < \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \quad (18)$$

la contrainte (18) sur β n'est donc pas restrictive dans la mesure où les conditions de stabilité du modèle AR (1) imposent $|\beta| < 1$ alors que $\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \simeq 1.2720$.

Exemple: Nous illustrons ce comportement pour une séquence source $s(n) = \pm 1$ (soit $\rho = 1$) et $\beta \simeq 0.66$. Dans ce cas $g_w^{(0)} = (1, 0.66)$ et $g_w^{(1)}(z) = (0, 0.56)$. Nous vérifions, sur la courbe de niveau donnée ci-dessous (figure 2), que ces solutions sont identiques aux minima du critère MC.

5 Conclusion

Dans cette contribution, nous avons considéré les minima du critère MC pour un modèle AR assez simple. L'objectif était, en particulier, de comprendre quel était la

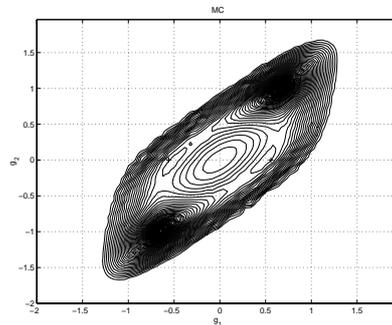


FIG. 2: Modèle AR: Contours du critère MC en fonction de l'égaliseur g , $\beta = 0.66$, $\rho = 1$, $N = 2$.

nature des minima décrits par Ding. La présence de ces minima s'emblait être en contradiction avec des résultats récents montrant l'absence de minima locaux lorsque le canal est inversible [5][4] (voir également [7]). Au terme de l'analyse, nous montrons que les minima obtenus (locaux et globaux) sont strictement colinéaires à ceux fournis par la solution optimale (au second ordre) EQMM c'est-à-dire la solution obtenue par un filtrage de Wiener. Les minima locaux, qui sont engendrés par une sous-modélisation de l'égaliseur, ne peuvent donc être considérés comme des solutions parasites indésirables du critère MC puisqu'elles contribuent (aux même titre que les solutions optimales) à l'estimation du signal source. Ainsi, toutes les techniques de régularisation du critère MC (motivées par l'exemple de Ding) qui s'appuient, par exemple, sur des idées de décorrélation de la sortie, auront également ici pour effet d'interdire (potentiellement) l'estimation de certaines entrées. Sans compter que de nouveaux attracteurs parasites peuvent *a priori* apparaître.

Références

- [1] Z. Ding, R.A. Kennedy, B.D. Anderson, C.R. Johnson, *Ill convergence of Godard blind equalizers in data communications systems*, IEEE Tans. on Com., vol. 39, no. 9, pp. 1313-1326, Sept. 1991.
- [2] I. Fijalkow, A. Touzni, J.R. Treichler, *Fractionally-Spaced Equalization using CMA: Robustesse to channel noise and lack of disparity*, in IEEE Tr. on SP, Jan. 1997.
- [3] D. Godard, *Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems*, IEEE Tr. on Com. vol. 28, pp. 1867-1875, 1980.
- [4] C.R. Johnson Jr., et al, *Blind equalization using the constant modulus criterion: A rievew*, Proceedings of the IEEE, Special Issue on Blind System Identification and Estimation, October 1998.
- [5] S. Mayrargue, *A blind spatio-temporal equalizer for a radio-mobile channel using the constant modulus algorithm (CMA)*, in Proc ICASSP, pp. II-317-320, Adelaide, Australia, April 19-22, 1994.
- [6] J.R. Treichler, and B.G. Agee, *A new approach to Multipath correction of constant modulus signals*, IEEE TR. on ASSP, vol. 31, no.2, pp.
- [7] A. Touzni, *Perfomance et robustesse en égalisation aveugle spatio-temporelle*, Thèse, UCP, Novembre 1998.
- [8] H. Zeng, and L. Tong, *Relationships between the CMA and MMSE receivers*, in Proc. CISS-96, March 1996.