Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme

Gilles FAY[1], Eric MOULINES[1], Philippe SOULIER[2]

[1]Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, département TSI
46, rue Barrault, 75634 Paris cedex 13

[2]Département de Mathématiques, Université d'Evry-Val d'Essonne
Boulevard des coquibus, F-91025 Evry Cedex

{fay, moulines}@tsi.enst.fr, soulier@lami.univ-evry.fr

Résumé – Deux théorèmes de limite centrale sont énoncés pour des tableaux triangulaires de fonctionnelles non-linéaires du périodogramme. Le premier concerne un bruit i.i.d. Il s'obtient par une méthode de moments, évalués par des développements d'Edgeworth. Le second théorème, concernant les signaux linéaires, est une généralisation de résultats obtenus précédemment pour des signaux gaussiens (voir Chen et Hannan 1980, von Sachs 1994, Janas et von Sachs 1995). Il dérive du premier théorème et de la décomposition de Bartlett. Des applications à l'estimation spectrale non-paramétrique robuste et à l'estimation de paramètres par régression sur le log-periodogramme sont présentées.

Abstract – We state here two central limit theorems for triangular arrays of non-linear functionals of the periodogram. The first deals with i.i.d sequence. It is proved by the method of moments, which are evaluated by an Edgeworth expansion technique. The second is a generalization to linear processes of existing results in the Gaussian case (Chen and Hannan 1980, von Sachs 1994, Janas and von Sachs 1995). It follows from the first theorem and the Bartlett decomposition. Applications to non-parametric robust spectral estimation and least-square log-periodogram regression are presented

1 Introduction

Des tableaux triangulaires de fonctionnelles non-linéaires du périodogramme apparaissent dans de nombreuses applications : estimation de fonctionnelle non-linéaire de la densité spectrale (Chen et Hannan 1980, Janas et von Sachs 1995); estimation de paramètre par régression sur le log-periodogramme (Taniguchi 1979, 1980); estimation spectrale robuste (von Sachs 1994); estimation du paramètre de mémoire longue (Robinson 1994, Moulines et Soulier 1997, Velasco 1997).

Si des résultats de type «limite centrale» sont obtenus par ces auteurs, la structure de dépendance complexe du périodogramme les assujettit à l'hypothèse supplémentaire de gaussianité sur la série X, hypothèse qui permet l'utilisation de résultats généraux sur les fonctionnelles non linéaires de variables gaussiennes (Taqqu 1977, Arcones 1994). Ainsi, Chen et Hannan (1980) puis Janas et von Sachs (1995) ont obtenus des résultats de consistance pour de tels tableaux triangulaires et des séries linéaires (non nécessairement gaussienne), mais pas de principe de limite centrale.

Les notations et les hypothèses sont introduites dans la section 2. Dans la section 3, nous énonçons un principe de limite centrale pour une large classe de tableaux triangulaires du périodogramme d'une série i.i.d. (Théorème 1) et du périodogramme renormalisé d'une série linéaire stationnaire (Théorème 2). Parmi les nombreuses applications de ce dernier théorème, nous présentons en section 4 l'estimation de fonctionnelle non-linéaire de la densité spectrale et l'estimation spectrale robuste.

2 Notations et hypothèses

(A1) $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire strictement stationnaire :

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j Z_{t-j} + \mu, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

avec $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |ja_j| < \infty$ et la fonction de transfert du filtre $A(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j z^j$ non nulle sur le cercle unité.

(A2) $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ i.i.d, $\mathbb{E}Z_0 = 0, \mathbb{E}Z_0^2 = 1$ et

$$\exists q \geq 1, \mathbb{E}(e^{itZ_0}) \in L_q. \tag{2}$$

Remarques: Sous **(A1)**, la densité spectrale de X, $f(x) := |A(e^{ix})|^2/2\pi$, est continûment dérivable et ne s'approche pas de zéro. L'équation (2) de l'hypothèse **(A2)** valide le développement d'Edgeworth de la densité d'un mélange de variables Z_t (voir Bhattacharya et Rao 1976).

Pour $j = 1, \ldots, n$, soient $x_j := 2\pi j/n$ les fréquences de Fourier et

$$d_{n,j}^X := n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} X_t e^{ixt} \quad , \quad I_{n,j}^X := |d_{n,j}^X|^2,$$

$$d_{n,j}^Z = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} Z_t e^{ixt} \quad , \quad I_{n,j}^Z = |d_{n,j}^Z|^2,$$

la transformée de Fourier discrète et le périodogramme de la suite d'observations $(X_1, \ldots, X_n)$ et de la suite i.i.d $(Z_1, \ldots, Z_n)$. Comme proposé dans Robinson (1994), l'axe des fréquences est divisés en blocs de taille m où m est un entier positif *fixé*, sur lesquels le périodogramme est aggloméré:

$$\bar{I}^X_{n,k} = \sum_{j\in J_k} \bar{I}^X_{n,j}\ ,\ \bar{I}^Z_{n,k} = \sum_{j\in J_k} \bar{I}^Z_{n,j}\ ,\ k = 1,\dots,K_n$$

où $J_k = \{m(k-1)+1,\dots,mk\}$, $K_n = [n/2m]$ et y_k désigne la fréquence centrale du $k$ème bloc. Notons que cette opération d'agglomération ne rend pas le périodogramme consistant (il faudrait $m \to \infty$ et $m/n \to 0$ or ici m est fixé), mais modifie par contre sa distribution asymptotique en $\chi^2_{2m}/2$ pour tous les $\bar{I}^Z_{n,k}$, et en $2\pi f(y_k)\chi^2_{2m}/2$ pour $\bar{I}^X_{n,k}$. Ceci peut conférer des moments une variable aléatoire de la forme $\phi(\bar{I}^Z_{n,k})$ où ϕ présente une singularité en zéro, alors qu'elle n'en aurait pour $m = 1$.

On s'intéresse de fait aux tableaux triangulaires de la forme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{K_n} w_{n,k}\phi\left(\frac{\bar{I}^X_{n,k}}{2\pi f(y_k)}\right), \tag{3}$$

où la fonction ϕ à valeurs réelles et le tableau des poids $\{w_{n,k}\}$ satisfont respectivement les hypothèses **(A3)** et **(A4)** :

(A3) ϕ est deux fois continûment dérivable,

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi(|x|^2/2)e^{-|x|^2/2}dx = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2/2)e^{-|x|^2/2}dx < \infty,$$
$$\text{et} \qquad |\phi''(x)| \le C(x^{\alpha}\mathbf{1}_{\{x\ge 1\}} + x^{-\beta}\mathbf{1}_{\{x\le 1\}})$$

pour deux réels α et β.

(A4) En posant

$$\mu_n := \#\{k : 1 \le k \le K_n, w_{n,k} \ne 0\}$$
$$\text{et} \qquad b_n := \max_{1\le k\le K_n} |w_{n,k}|,$$

$$\sum_{k=1}^{K_n} w^2_{n,k} = 1,\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$
$$\forall\epsilon > 0,\ b_n = O(\mu_n^{-1/2+\epsilon}),$$
$$\exists\gamma > 0,\ \gamma = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k\ne l} w_{n,k}w_{n,l},$$

$|.|$ désigne ici la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{2m}$.

Remarque: Les deux premières équations de **(A3)** peuvent se reformuler en «$\phi(\bar{I}^Z_{n,k})$ est asymptotiquement centrée et de variance finie».

La décomposition de Bartlett est la clé des résultats présentés ici. Elle relie $d^X_n(x)$ à $d^Z_n(x)$ et à la fonction de transfert du filtre linéaire $A(e^{ix})$:

$$d^X_n(x) = A(e^{ix})d^Z_n(x) + r_n(x) \tag{4}$$

où $r_n(x)$ est un reste stochastique qui a fait l'objet d'études précises, voir Bartlett (1955), Walker (1965), Brockwell et Davis (1991), chapitre 10. Cette décomposition se traduit facilement en terme de périodogramme aggloméré normalisé :

$$\frac{\bar{I}^X_{n,k}}{2\pi f(y_k)} = \bar{I}^Z_{n,k} + \bar{R}_{n,k} \tag{5}$$

Le «reste» $\bar{R}_n(x)$ de cette décomposition admet une expression explicite en $\{a_j\}$ et $\{Z_j\}$ et il tend vers 0 en probabilité (voir le commentaire sur sa vitesse dans le schéma de la preuve du Théorème 2). L'équation (5) suggère donc de relier la distribution limite de S_n défini en (3) à celle de :

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{K_n} w_{n,k}\phi(\bar{I}^Z_{n,k}) \tag{6}$$

qui est un tableau triangulaire du périodogramme d'un signal i.i.d. et dont la distribution asymptotique est donnée par le Théorème 1.

Soit finalement $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\cdots,\xi_{2m})^T$ un vecteur gaussien standard de dimension $2m$. On définit :

$$C_2(\phi) \ = \ \mathbb{E}[(\xi_1^2 - 1)\phi(|\boldsymbol{\xi}|^2/2)],$$
$$s^2_n = \mathbb{E}(\phi(|\boldsymbol{\xi}|^2/2)) + \tfrac{m^2\kappa_4 C_2^2(\phi)}{4n}\sum_{1\le k\ne k'\le K_n} w_{n,k}w_{n,k'}.$$

où κ_4 désigne le cumulant d'ordre 4 de la variable Z_1.

3 Théorèmes de limite centrale

Le théorème de limite centrale pour $\tilde{S}_n$ s'obtient sous des hypothèses plus faibles sur la fonction ϕ.

(A3')

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi(|x|^2/2)e^{-|x|^2/2}dx = 0,$$
$$\text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2/2)(1+|x|^2)^{-p}dx < \infty$$

pour un certain entier naturel p.

Théorème 1 *Supposons* **(A2)**, **(A3')** ,**(A4)** *et*

$$\mathbb{E}|Z|^{2p+3} < \infty.$$

Alors $\tilde{S}_n$ converge vers la distribution gaussienne centrée de variance

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} s^2_n = \mathbb{E}(\phi(|\boldsymbol{\xi}|^2/2)) + \gamma m^2\kappa_4 C_2^2(\phi)/4$$

La variance limite est composée de deux termes : le premier est la variance limite gaussienne, le second, proportionnel au cumulant d'ordre 4, s'annule lorsque $\mu_n = o(n^{1-\epsilon})$ pour un $\epsilon > 0$, ce qui est le cas lorsque l'on traite de tableaux «locaux». Notons que κ_4 est le seul cumulant d'ordre supérieur à contribuer à la distribution limite.

On trouvera dans Fay, Moulines et Soulier (1999) un théorème de limite centrale pour des tableaux $\tilde{S}_n$ plus généraux, ainsi que les preuve complètes de ce théorème et du suivant. Nous n'en donnons ici que des schémas.

SCHÉMA DE LA PREUVE: Lorsque le bruit i.i.d est gaussien, les ordonnées du périodogramme sont indépendantes. Le tableau (6) est donc un mélange de variable i.i.d. dont la normalité asymptotique s'établit classiquement sous des hypothèses de Lindeberg-Lévy. En non-gaussien, la normalité asymptotique s'obtient par la méthode des moments qui nécessite l'évaluation de toutes les quantités de type : $\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^u \phi(\bar{I}^Z_{n,k_j})^{\alpha_j}\right]$ où u est un entier positif quelconque, les α_j sont des entiers positifs et les k_j des entiers distincts de $\{1,\dots,K_n\}$. Cette évaluation, sous forme de développement asymptotique en puissances croissantes de $n^{-1/2}$, provient d'un développement d'Edgeworth multidimensionnel de la densité de probabilité ou de la fonction de répartition du vecteur aléatoire

$$\mathbf{W}_{n,j} = (2/n)^{1/2}\sum_{t=1}^{n} Z_t(\cos(tx_{j_1}),\sin(tx_{j_1}),\cdots,$$
$$\cos(tx_{j_{um}}),\sin(tx_{um}))^T.$$

formé des $2mu$ coefficients de Fourier réels apparaissant dans les $\bar{I}_{n,k_j}$, $j = 1,\ldots,u$. Par des arguments de troncature de Z et d'approximation de ϕ par des fonctions lisses, on se ramène au cas où Z a tous ses moments finis et où ϕ est C^∞ à support compact. Le développement pour les moments considérés s'obtient par intégration, l'ensemble étant validé grâce à Bhattacharya et Rao (1976, chapitre 19) ou Götze & Hipp (1978), et Chen et Hannan (1980, Lemme 2). Enfin, les arguments combinatoires, de symétrie et d'annulation de cumulants qui apparaissent dans les coefficients du développement, proposés par Velasco (1997), montrent que tous les moments considérés tendent vers ceux de la loi gaussienne limite.

Théorème 2 *Supposons* **(A1-A4)**, *et*

$$\mathbb{E}|Z|^{\max\{8,2[2\alpha+1],[2(m-\beta)+1]\}} < \infty$$

$$m > (4\beta - 4) \vee 2\beta$$

Alors S_n converge vers la distribution gaussienne centrée de variance

$$\sigma^2(\phi) = \lim_{n\to\infty} s_n^2 = \mathbb{E}(\phi(|\boldsymbol{\xi}|^2/2)) + \gamma m^2 \kappa_4 C_2^2(\phi)/4$$

SCHÉMA DE LA PREUVE: L'hypothèse **(A3)** impliquant **(A3')**, ce théorème découle du précédent si l'on démontre que $S_n - \tilde{S}_n = o_P(1)$. Par développement de Taylor de ϕ à l'ordre de deux et la décomposition de Bartlett sous la forme (5), on obtient :

$$\begin{aligned} S_n - \tilde{S}_n &= \sum_{k=1}^{K_n} w_{n,k}\left[\phi\left(\frac{\bar{I}^X_{n,k}}{2\pi f(y_k)}\right) - \phi(\bar{I}^Z_{n,k})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{K_n} w_{n,k}\bar{R}_{n,k}\phi'(\bar{I}^Z_{n,k}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K_n} w_{n,k}\bar{R}^2_{n,k}\phi''(\bar{I}^Z_{n,k} + \theta_{n,k}\bar{R}_{n,k}) \end{aligned}$$

avec des $\theta_{n,k}$ dans [0,1]. Sous **(A1)**, $\mathbb{E}|\bar{R}_{n,k}| = O(n^{-1/2})$ uniformément en k. Cette décroissance n'est pas suffisante pour traiter $S_n - \tilde{S}_n$ par des inégalités de moments. Notons aussi que, comme l'a remarqué von Sachs et contrairement à ce qui est suggéré dans le théorème 6.2.2 de Priestley (1981), cette vitesse en $n^{-1/2}$ ne peut être améliorée par une décroissance plus forte des coefficients $\{a_j\}$. Une étude précise du reste de Bartlett $r_n(x)$ de l'équation (4) est nécessaire et permet de conclure avec les hypothèses sur ϕ et ses dérivées.

Remarque Le reste $S_n - \tilde{S}_n$ ne converge qu'en probabilité. Cette méthode ne permet aucun contrôle sur les moments de S_n (sauf hypothèse plus forte sur ϕ, par exemple «ϕ'' bornée»). Pour prouver la consistance d'un tableau de la forme S_n, Janas et Von Sachs calculent ses deux premiers moments par développement d'Edgeworth de la densité de probabilité des coefficients de Fourier du signal (fenêtré) linéaire X directement (sans passer par la décomposition de Bartlett), et ce en utilisant un résultat de Götze et Hipp (1983) pour les mélange de variables faiblement dépendantes (mais sous des hypothèses plus restrictives que $\sum |ja_j| < \infty$, puisque le coefficient de mélange y est supposé décroître géométriquement). A l'inverse, cette méthode ne mène pas à un principe de limite centrale, les moments d'ordre supérieur à 3 semblant inaccessibles, vue la complexité des développement d'Edgeworth dans le cas dépendant.

4 Applications

4.1 Estimation spectrale non-paramétrique robuste

Le périodogramme n'est pas un estimateur ponctuel consistant de la densité spectrale, il le devient si on le lisse par un noyau de convolution de largeur de bande h_n, avec des hypothèses adéquates sur h_n et la régularité de f. Cet estimateur à noyau présente le défaut de ne pas être robuste à la contamination du signal par des sinusoïdes. C'est le problème considéré par von Sachs (1995) : il propose de «robustifier» l'estimateur à noyau en définissant implicitement l'estimateur ponctuel $\hat{f}_n(x)$ de densité spectrale $f(x)$ comme la racine de l'équation (adaptée ici au périodogramme *aggloméré*) :

$$C_n(x,s) := K_n^{-1}\sum_{k=-K_n}^{K_n} W_{h_n}(x - y_k) H\left(\frac{\bar{I}_{n,k}}{2\pi m s} - 1\right) = 0. \quad (7)$$

La fonction H est une fonction de robustesse, W_{h_n} un noyau de largeur h_n. Von Sachs démontre la consistance de cet estimateur en présence de sinusoïdes et la normalité asymptotique si la série est gaussienne. Supposons

(C1) Le noyau W est une fonction de densité lipschitzienne, symétrique et à support compact.

(C2) La fonction H est C^3, $H(0) = 0$, $H'(0) > 0$ et

$$\mathbb{E}\left[H\left(\tfrac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2m} - 1\right)\right] = 0$$

$$\text{et} \quad \mathbb{E}\left[|\boldsymbol{\xi}|^2 |H'\left(\tfrac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2m} - 1\right)\right] > 0$$

pour $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(0, I_{2m})$

(C3) $nh_n^3 \to \infty$ et $nh_n^5 \to 0$.

L'hypothèse **(C2)** assure la consistance de l'estimateur robuste, et sa normalité asymptotique s'obtient grâce au Théorème 2:

Proposition 1 *Sous les hypothèses* **(A1-A4)** *et* **(C1-C3)**, *il existe une racine $\hat{f}_n(x)$ consistante à l'équation (7) pour tout n suffisamment grand et*

$$\sqrt{K_n h_n}\left(\hat{f}_n(x) - f(x)\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} \mathcal{N}(0, V(x))$$

avec

$$V(x) = \frac{\sigma_m^2}{\beta_m} f^2(x)(2\pi)^{-1}\int W^2(x)dx$$

$$\beta_m = \mathbb{E}\left[|\boldsymbol{\xi}|^2 |H'\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2m} - 1\right)\right]$$

$$\sigma_m^2 = \mathrm{var}\left[H\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2m} - 1\right)\right]$$

4.2 Régression sur le log-périodogramme

La régression sur le log-périodogramme a été abordée par de nombreux auteurs comme une alternative aux méthodes de moments ou de maximum de vraisemblance pour l'estimation de paramètres (voir Bloomfield 1973, Taniguchi 1979, 1991,et plus récemment Robinson 1994). On suppose que la densité spectrale f de X appartienne à un ensemble paramétrique $\mathcal{P} := \{f_\theta, f_\theta \in \mathcal{F}, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ soit $f := f_{\theta_0}$, et que l'estimation de θ_0 se fasse par la minimisation du critère de moindres carrés suivant :

$$T_n(\theta) := \sum_{k=1}^{K_n} \left(\log(\bar{I}_{n,k}^X) - \log(2\pi) - \psi(m) - l_k(\theta)\right)^2$$

où $l_k(\theta) := \log f(y_k; \theta)$. Ce critère est suggéré par la décomposition (5) qui implique

$$\log(\bar{I}_{n,k}^X) = l_k(\theta_0) + \log(2\pi) + \log(\bar{I}_{n,k}^Z) + \log(1 + \bar{R}_{n,k}/2\pi f(y_k)\bar{I}_{n,k}^Z)$$

où le dernier terme est petit en probabilité, et le fait que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\log(\bar{I}_{n,k}^Z)] = \mathbb{E}\, \log(|\boldsymbol{\xi}|^2/2) = \psi(m)$$

où ψ désigne la fonction *digamma*. On note $\hat{\theta}_n$ un minimum du critère $T_n(\theta)$.

En utilisant le Théorème 2 et les propriétés asymptotiques des moindres carrés non-linéaires établies dans Jennrich (1969), on prouve, sous des hypothèses techniques supplémentaires (voir Fay *et al.* 1999) la consistance faible de $\hat{\theta}_n$ et la normalité asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$. La matrice de covariance limite s'écrit

$$m\psi'(m) I^{-1}(\theta_0) + \frac{\kappa_4}{4} I(\theta_0)^{-1/2} J(\theta_0) I(\theta_0)^{-1/2}$$

avec

$$I(\theta_0) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l'(y;\theta_0) l'(y;\theta_0)^T dy$$

et $$J(\theta_0) = (2\pi)^{-2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} l'(y;\theta)dy\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} l'(y;\theta)dy\right)^T$$

On note que lorsque Z est gaussien, l'estimateur de régression aux moindres carrés sur le log-périodogramme est quasi-efficace, puisque $m\psi'(m)$ tend vers 1 rapidement avec m ($\psi'(1) = \pi^2/6 \simeq 1.64$, $2\psi'(2) \simeq 1.28$, $8\psi'(8) \simeq 1.06$).

5 Conclusion

Les applications non-traitées ici sont nombreuses : estimation de fonctionnelle non-linéaire de la densité spectrale, estimation ponctuelle par approximation polynomiale locale, etc. De plus, une partie des résultats énoncés ici peut être étendue aux séries à dépendance longue moyennant un fenêtrage des données (*data tapper*) pour le traitement du reste de Bartlett. On prouve ainsi complètement la normalité asymptotique de l'estimateur du paramètre de longue mémoire d de Velasco, 1997. Des théorèmes de limite centrale fonctionnelle (sur la fonction de répartition empirique du périodogramme i.i.d. par exemple) sont en cours d'étude.

Références

[1] M. Arcones, *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary gaussian sequence of vectors*, Annals of Probability **22** (1994), no. 4, 2243–2274.

[2] M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.

[3] R.N. Bhattacharya et R.R. Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.

[4] P. Bloomfield, *An exponential model for the spectrum of scalar time series*, Biometrika **60** (1973), no. 2, 217–226.

[5] P.J. Brockwell et R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.

[6] Z.-G. Chen et E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.

[7] G. Fay, E. Moulines, et Ph. Soulier, *Central limit theorems for non linear functionals of the periodogram of a non gaussian time series*, Prépublication de l'université d'Evry val d'Essonne, 1999.

[8] F. Götze et C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete (1978).

[9] ———, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete (1983), no. 64, 211–239.

[10] D. Janas et R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.

[11] R.I. Jennrich, *Asymptotic properties of non-linear least squares estimators*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 633–43.

[12] E. Moulines et P. Soulier, *Log-periodogram regression of time series with long-range dependence*, 1997.

[13] M.B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 1981.

[14] P.M. Robinson, *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics **22** (1994), 515–539.

[15] M. Taniguchi, *On estimation of parameters of gaussian stationary processes*, J. of Applied Probability **16** (1979), 575–591.

[16] ———, *On estimation of the integrals of certain functions of spectral density*, J. of Applied Probability **17** (1980), 73–83.

[17] ———, *Higher order asymptotic theory for time series analysis*, Lecture Notes in Statistics, no. 68, Springer-Verlag, 1991.

[18] M.S. Taqqu, *Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of gaussian variables that exhibit long range dependence*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40** (1977), 203–238.

[19] C. Velasco, *Non-gaussian log-periodogram regression*, 1997.

[20] R. von Sachs, *Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation*, Journal Of Time Series Analysis **15** (1994), no. 4.

[21] A.M. Walker, *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary times series*, J. Aust. Math. Soc. **5** (1965), 107–128.