

Egalisation aveugle au second ordre pour des signaux à bande limitée : Connaissance *a priori* sur le filtre

Philippe CIBLAT*

Philippe LOUBATON

Laboratoire Système de Communication, Université de Marne-la-Vallée
5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
ciblat@univ-mlv.fr, loubaton@univ-mlv.fr

Résumé – La plupart des algorithmes d'égalisation aveugle au second ordre basés sur le suréchantillonnage du signal reçu a des performances médiocres quand le signal reçu a une bande passante réduite. Or, le filtre à identifier provient de l'effet conjugué d'un filtre de mise en forme (connu) et d'un canal de propagation (inconnu). Nous analysons, ici, les conséquences de cette connaissance partielle du filtre dans le cadre de la méthode sous-espace introduite par Moulines et al.

Abstract – Most of the second order based fractionally sampled blind equalizers are known to perform poorly in the context of band limited signals. We know that, the filter comes from the conjugate effect of a shaping filter (known) and a multipath channel (unknown). In this paper, we analyse the consequences of this partial knowledge of the filter in the case of the subspace method introduced by Moulines et al.

1 Introduction

On suppose qu'une suite de symboles $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, centrée, i.i.d., circulaire, gaussienne, de variance 1 pour simplifier, est émise par le biais d'une modulation linéaire à travers un canal à trajets multiples. Le signal à temps continu $\tilde{y}(t)$ reçu au niveau du récepteur s'écrit sous la forme :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \tilde{h}(t \Leftrightarrow nT)$$

avec T la période symbole et $\tilde{h}(t)$ une fonction inconnue.

Pour reconstituer les symboles émis, il est nécessaire d'identifier ce filtre (en pratique, une version échantillonnée) afin de compenser l'interférence entre symboles introduit par ce filtre.

Ce problème nécessite l'utilisation soit des statistiques d'ordre supérieur à 2, soit de la cyclostationnarité du signal $\tilde{y}(t)$. Dans ce dernier cadre, Tong et al [1] ont récemment montré, sous des conditions théoriques peu restrictives, qu'il était possible de résoudre le problème d'identification aveugle en suréchantillonnant le signal $\tilde{y}(t)$ d'un facteur 2 pour simplifier l'exposé. En posant $y(n) = \tilde{y}(n\frac{T}{2})$ et $h_k = \tilde{h}(k\frac{T}{2})$, il apparaît que

$$y(n) = \sum_{k=0}^P h_k u_{n-k} = [h(z)]u(n)$$

où u_n est la suite définie par $u_{2n} = v_n$ et $u_{2n+1} = 0$ et où $h(z) = \sum_{k=0}^P h_k z^{-k}$. La suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc le signal $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont cyclostationnaires de fréquences cycliques 0 et $\frac{1}{2}$. Sous réserve que les polynômes $h(z)$ et $h(\Leftrightarrow z)$ n'ont pas de zéro commun, alors la donnée des deux cyclopectres permet d'identifier $h(z)$.

Divers algorithmes performants basés sur cette idée ont été proposés depuis Tong et al [1]. Dans de nombreux

systèmes de communication numérique, le filtre de mise en forme (connu) utilisé pour engendrer le signal modulé, a une bande passante réduite. En réception, lors du suréchantillonnage, la contraction de l'échelle des fréquences, rend le signal $y(n)$ à bande limitée. Et il a été observé que les performances de ces algorithmes sont d'autant plus décevantes que la bande du signal $y(n)$ est limitée. Dans une communication récente [5], les causes des mauvaises performances des algorithmes au second ordre, basés sur la méthode dite sous-espace introduite dans [2], ont été étudiées. Ces algorithmes, dans le cas de signaux à bande limitée, n'utilise aucune information fréquentielle sur un certain intervalle. Ceci conduit à avoir une indétermination sur $h(z)$ sur ce même intervalle. Cependant [5] montre aussi que cette perte d'information n'est pas irrémédiable si on utilise un estimateur du filtre approprié, de type « ajustement d'autocorrélation ». Cependant cette dernière approche est de mise en oeuvre très complexe. Dans [6], il a été montré qu'en combinant les méthodes d'« ajustement d'autocorrélation » et sous-espace, on simplifiait les algorithmes tout en conservant de bonnes performances asymptotiques. D'autres solutions, beaucoup moins complexes, sont envisageables ([7], [8]), en introduisant une connaissance *a priori* sur la structure du filtre $h(z)$. Notre but, dans ce papier, est de voir si cet apport d'information lève l'ambiguïté sur l'indétermination du filtre $h(z)$, estimé par la méthode sous-espace.

La suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est émis grâce à un filtre de mise en forme $\tilde{g}(t)$ (connu), de type cosinus surélevé de facteur d'excès de bande ρ et construit pour un débit de $\frac{1}{T}$. On obtient comme signal analogique émis :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{g}(t) * v_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \tilde{g}(t \Leftrightarrow nT) \quad (1)$$

Le signal reçu, $\tilde{y}(t)$, passe dans un canal (inconnu) à $L + 1$ trajets dont les atténuations et les retards sont notés

*titulaire d'une bourse DGA-CNRS

respectivement $\{\lambda_k\}_{k=0,\dots,L}$ et $\{\tau_k\}_{k=0,\dots,L}$. Il advient que

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^L \lambda_k \tilde{x}(t \Leftrightarrow \tau_k) \quad (2)$$

En utilisant (1) et (2), on obtient aisément, dans les domaines temporel et fréquentiel, les expressions suivantes du filtre :

$$\tilde{h}(t) = \sum_{k=0}^L \lambda_k \tilde{g}(t \Leftrightarrow \tau_k) \Leftrightarrow \tilde{H}(f) = \tilde{G}(f) \Lambda(f)$$

avec \tilde{H} et \tilde{G} les transformées de Fourier de $\tilde{h}(t)$ et de $\tilde{g}(t)$, et avec $\Lambda(f) = \sum_{k=0}^L \lambda_k e^{-2i\pi\tau_k f}$. On note $g(z)$ la fonction de transfert du filtre $\tilde{g}(t)$ échantillonné au débit $\frac{2}{T}$, supposée causale, sans engendrer de restrictions.

Comme $\tilde{G}(f)$, et donc $\tilde{H}(f)$, ont une largeur de bande inférieure à $\frac{2}{T}$, en utilisant la formule de Poisson à la période $T_e = \frac{T}{2}$, il apparaît que

$$\tilde{H}\left(\frac{f}{T_e}\right) = T_e h(e^{2i\pi f}) \quad \text{et} \quad \tilde{G}\left(\frac{f}{T_e}\right) = T_e g(e^{2i\pi f})$$

en fréquence normalisée. Du fait des propriétés de $\tilde{G}(f)$, il est clair $g(e^{2i\pi f})$ et $h(e^{2i\pi f})$ sont nuls hors de l'intervalle $\mathcal{W} = [\Leftrightarrow\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$. Il advient que

$$\begin{aligned} h(e^{2i\pi f}) &= g(e^{2i\pi f}) \Lambda\left(\frac{f}{T_e}\right) \\ \Rightarrow h(e^{2i\pi f}) &= g(e^{2i\pi f}) \mathbb{I}_{\mathcal{W}} \Lambda\left(\frac{f}{T_e}\right) \end{aligned}$$

avec $\mathbb{I}_{\mathcal{W}}$ l'indicatrice de l'intervalle \mathcal{W} . Comme $\mathbb{I}_{\mathcal{W}} \Lambda(\frac{f}{T_e})$ est à bande limitée, on sait qu'il existe sur \mathcal{W} , un polynôme¹ $c(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^K c_k e^{2i\pi k f}$, obtenu par la formule de Poisson, tel que $h(e^{2i\pi f}) \approx g(e^{2i\pi f}) c(e^{2i\pi f})$ pour $f \in \mathcal{W}$. Comme $g(e^{2i\pi f})$ est nul sur le complémentaire de \mathcal{W} , on peut étendre cette relation à tout l'espace des fréquences. Donc

$$h(e^{2i\pi f}) \approx g(e^{2i\pi f}) c(e^{2i\pi f}), \quad \forall f \in \left[\Leftrightarrow\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (3)$$

avec $g(z)$ connu et $c(z)$ inconnu.

Cet article est organisé de la manière suivante :

Nous introduisons d'abord un outil [3] qui permet d'étudier la méthode sous-espace dans le cas de signaux à bande limitée. Après un bref rappel sur la méthode sous-espace, nous l'adaptions à notre connaissance *a priori* (3) du filtre. Ensuite nous analysons clairement cette nouvelle méthode sous espace avec contraintes. Enfin nous estimons les performances asymptotiques de ce nouvel algorithme et confirmons par là-même les analyses développées dans la précédente partie.

Notations On note $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_K]^T$. $h(e^{2i\pi f})$ étant numériquement nul sur le complémentaire de \mathcal{W} , on a :

$$h(e^{2i\pi f}) \approx 0 \quad \text{si} \quad f \in \left[\Leftrightarrow\frac{1}{2}, \Leftrightarrow\frac{\beta}{2}\right] \cup \left[\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (4)$$

On pose aussi $\mathcal{I}_1 = [\Leftrightarrow\frac{1}{2}, \Leftrightarrow\frac{\beta}{2}] \cup [\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}]$, $\mathcal{I}_2^+ = [\frac{1-\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$, $\mathcal{I}_2^- = [\Leftrightarrow\frac{\beta}{2}, \Leftrightarrow\frac{1-\beta}{2}]$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2^+ \cup \mathcal{I}_2^-$ et $\mathcal{I}_3 = [\Leftrightarrow\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2}]$.

¹ on peut toujours se ramener au cas $c(z)$ causal.

2 Les Suites Sphéroïdales

Les suites sphéroïdales aplaties de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ de taille N définies dans [3] sont les vecteurs propres (de norme 1) $\{\mathbf{k}_{N,j}\}_{j=1,N}$ de la matrice \mathcal{K}_N :

$$\mathcal{K}_N = \int_{\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \overline{D_{N-1}(e^{2i\pi f})} D_{N-1}^T(e^{2i\pi f}) df$$

avec $D_{N-1}(e^{2i\pi f}) = [1, \dots, e^{-2i\pi N f}]^T$. Il est bien connu que cette matrice est mal conditionnée, pour N assez grand et bien conditionnée pour N petit. Dans le cas N assez grand, aux $\{\mathbf{k}_{N,j}\}_{j=1,s}$ correspondant aux plus petites valeurs propres, on associe des filtres FIR $k_{N,j}(z)$ qui vérifient $k_{N,j}(e^{2i\pi f}) \approx 0$ si $f \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Il est possible de montrer que $s \approx (1 \Leftrightarrow \beta)N$. En d'autres termes, les filtres RIF $k_{N,j}(z)$ pour $j = 1, s$, associés aux s plus petites sphéroïdales de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, sont à bande limitée et de bande \mathcal{I}_3 .

3 La Méthode sous-espace

Par souci de simplicité, nous supposons que le degré P du filtre $h(z)$ est impair, et nous posons $P = 2M + 1$. A partir du signal cyclostationnaire $y(n)$, provenant de l'échantillonnage à $\frac{T}{2}$ du signal continu $\tilde{y}(t)$, on construit par « empilement » le signal vectoriel de dimension 2, $Y(n) = [y(2n+1) \ y(2n)]^T$. On constate que Y est stationnaire, et que $Y(n) = [H(z)v_n]$, où $H(z)$ est le filtre 1 entrée / 2 sorties dont les deux composantes sont les parties impaires et paires de $h(z)$, i.e.,

$$H_1(z^2) = \frac{h(z) \Leftrightarrow h(\Leftrightarrow z)}{2z^{-1}} \quad H_2(z^2) = \frac{h(z) + h(\Leftrightarrow z)}{2} \quad (5)$$

Soient $N \geq M$ et $Y_N(n) = [Y^T(n) \dots Y^T(n \Leftrightarrow N)]^T$. L'idée de la méthode sous-espace consiste à remarquer que, si $N \geq M$, alors $H(z)$ peut-être identifié de façon unique à partir du projecteur orthogonal Π_N sur le noyau de la matrice de covariance $R_N(h) = \mathcal{T}_N(h) \mathcal{T}_N^*(h)$ de $Y_N(n)$ si ses composantes sont premières entre elles, ($\mathcal{T}_N(h)$ étant la matrice de Sylvester de taille $2(N+1) \times (N+M+1)$ associée au filtre $H(z)$ défini par $h(z)$), i.e., si $h(z)$ et $h(\Leftrightarrow z)$ n'ont pas de zéro commun.

En d'autres termes, si au polynôme $F(z) = \sum_{k=0}^M F_k z^{-k}$ on associe le polynôme scalaire $f(z) = F_2(z^2) + z^{-1} F_1(z^2)$ et le vecteur $\mathbf{f} = [f_0, \dots, f_{2M+1}]^T$ de ses coefficients, alors la forme quadratique

$$\mathbf{f} \rightarrow \text{Trace}(\mathcal{T}_N^*(\mathbf{f}) \Pi_N \mathcal{T}_N(\mathbf{f})) = \mathbf{f}^* Q \mathbf{f}$$

possède un noyau de dimension 1 engendré par le vecteur \mathbf{h} associé à $h(z)$.

En pratique $R_N(h)$, Π_N et Q sont évaluées à partir des données et on estime le vecteur associé à $H(z)$ par le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de l'estimée \hat{Q} de Q .

L'étude du cas bande limitée montre que la matrice Q est en fait très mal conditionnée, i.e., son noyau numérique est de dimension plus grande que 1. Il en résulte évidemment que l'estimation de $H(z)$ fournie par la méthode sous-espace est de très mauvaise qualité.

Nous redonnons ici une expression approchée de Q [5]. Pour ceci, on pose $\pi_N(e^{2i\pi f}) = \sum_{k=0}^{2N+1} \pi_{k,N} e^{-2i\pi k f}$ où les $\pi_{k,N}$ sont les colonnes élémentaires de Π_N .

$$Q \approx \int_{\mathcal{I}_1} \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f}) \mathcal{Q}_1^*(e^{2i\pi f}) df + \int_{\mathcal{I}_2^+} \mathcal{Q}_2(e^{2i\pi f}) \mathcal{Q}_2^*(e^{2i\pi f}) df$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f}) &= \overline{D_{2M+1}(e^{2i\pi f})} \pi_N^*(e^{-2i\pi f}) \\ \mathcal{Q}_2(e^{2i\pi f}) &= \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi f}) - \mathcal{Q}_1(e^{2i\pi(f+1/2)}) \end{aligned}$$

Compte tenu de la forme de Q , il est clair que

$$\mathbf{k}_{2(M+1),j}^* Q \mathbf{k}_{2(M+1),j} \approx 0$$

pour $j = 1, s$, avec $s = 2(1 \Leftrightarrow \beta)(M+1)$. Donc le noyau « numérique » de Q contient, outre le vecteur \mathbf{h} , les vecteurs $\{\mathbf{k}_{2(M+1),j}\}_{j=1,s}$. Par conséquent, on peut rajouter à $h(e^{2i\pi f})$ n'importe quel polynôme provenant d'une combinaison linéaire des plus petites suites sphéroïdales $\{\mathbf{k}_{2(M+1),j}\}_{j=1,s}$ sans pour autant modifier sensiblement la valeur de la forme quadratique associée à Q . La méthode sous-espace ne donne donc que fort peu d'indications sur les valeurs prises par $h(e^{2i\pi f})$ pour $f \in \mathcal{I}_3$.

4 Méthode sous-espace contrainte

Comme $h(z)$ provient d'un filtrage de $g(z)$ (connu) par $c(z)$ (inconnu), le lien entre les vecteurs associés à ces fonctions de transfert est le suivant :

$$\mathbf{h} = \mathcal{T}^T(g) \mathbf{c}$$

avec $\mathcal{T}(g)$ la matrice de Sylvester de taille $(K+1) \times (2M+2)$ associée au filtre $g(z)$. Notre but, maintenant, est d'estimer le vecteur \mathbf{c} de taille $K+1$ et grâce à la relation précédente, on obtiendra directement l'estimée du filtre \mathbf{h} . Puisque \mathbf{h} minimise la forme quadratique Q , il est clair que \mathbf{c} est le vecteur de taille $K+1$ qui minimise la forme quadratique Q_c qui s'écrit :

$$Q_c = \overline{\mathcal{T}(g)} Q \mathcal{T}^T(g)$$

Donc l'estimée du vecteur \mathbf{c} , notée $\hat{\mathbf{c}}$, sera le vecteur qui minimise l'estimée de Q_c . Et l'estimée du filtre \mathbf{h} , notée $\hat{\mathbf{h}}$, sera donnée par la relation suivante, $\hat{\mathbf{h}} = \mathcal{T}^T(g) \hat{\mathbf{c}}$. Il est facile de montrer que Q_c a une forme fréquentielle analogue à celle de Q et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_c &\approx \int_{\mathcal{I}_1} \mathcal{C}_1(e^{2i\pi f}) \mathcal{C}_1^*(e^{2i\pi f}) df + \int_{\mathcal{I}_2^+} \mathcal{C}_2(e^{2i\pi f}) \mathcal{C}_2^*(e^{2i\pi f}) df \\ \mathcal{C}_1(e^{2i\pi f}) &= \overline{D_{K+1}(e^{2i\pi f})} g^*(e^{2i\pi f}) \pi_N^*(e^{-2i\pi f}) \\ \mathcal{C}_2(e^{2i\pi f}) &= \mathcal{C}_1(e^{2i\pi f}) - \mathcal{C}_1(e^{2i\pi(f+1/2)}) \end{aligned}$$

En utilisant des raisonnements analogues au paragraphe précédent et les propriétés sur le noyau numérique de \mathcal{K} , il apparaît que, quand K est très petit (i.e. $K = 1$ ou $K = 2$), la matrice \mathcal{K} est parfaitement conditionnée et donc Q_c aussi, ce qui implique une estimation consistante du filtre \mathbf{h} . Par contre, quand K est assez grand, le noyau numérique de Q_c possède, outre le vecteur \mathbf{c} , les s plus petites sphéroïdales de taille $(K+1)$ de l'intervalle $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. Dans ce cas, cette mauvaise estimation de \mathbf{c} implique-t-elle

une mauvaise estimation de \mathbf{h} ? On considère $\hat{\mathbf{c}}$, l'estimateur du vecteur \mathbf{c} . $\hat{\mathbf{c}}$ est la somme du vecteur \mathbf{c} et d'une combinaison linéaire de suites sphéroïdales. Du point de vue fréquentiel, du fait que les spectres des filtres RIF associés à ces sphéroïdales sont numériquement nuls sur $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ et non nul sur \mathcal{I}_3 , il apparaît que $c(e^{2i\pi f})$ est bien estimé sur $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ et mal évalué sur \mathcal{I}_3 . Comme $h(z) \approx g(z)c(z)$ et que $g(e^{2i\pi f})$ est non nul sur \mathcal{I}_3 , la mauvaise évaluation de $c(e^{2i\pi f})$ sur cet intervalle se répercute automatiquement sur celle de $h(e^{2i\pi f})$. Donc, quand K est assez grand, on sait le vecteur \mathbf{h} est estimé à un sous-espace près de dimension $(1 \Leftrightarrow \beta)(K+1)$ et qu'on ne connaît que peu d'indications sur $h(e^{2i\pi f})$ pour $f \in \mathcal{I}_3$.

Les simulations qui suivent, confirment notre analyse sur Q_c . On a considéré un filtre de mise en forme en cosinus avec $\rho = \frac{1}{5}$, ce qui donne $\beta = \frac{3}{5}$ et $s = 3$. On choisit deux canaux de propagation dont les retards sont proportionnels à $\frac{T}{2}$ afin d'avoir une égalité parfaite dans (3). Les deux canaux possèdent des retards maximaux de $5T$ et $\frac{T}{2}$ ce qui donne respectivement pour $c(z)$ un polynôme de degré 9 et 1.

TAB. 1: Valeurs propres de Q_c vs. $\deg(c(z))$

$\deg(c(z)) = 9$				$\deg(c(z)) = 1$
9,7e-02	5,7e-02	5,3e-03	3,1e-04	6,1e-05
8,1e-05	2,4e-06	6,0e-06	5,0e-07	3,3e-15
				3,3e-01
				1,4e-16

TAB. 2: Valeurs prises par la forme quadratique Q_c appliquée aux sphéroïdales de taille 10, avec $\deg(c(z)) = 9$

$\mathbf{k}_{K,j}^* Q_c \mathbf{k}_{K,j}$ avec $j < s$	$\inf \{\mathbf{k}_{K,l}^* Q_c \mathbf{k}_{K,l}, l \geq s\}$
1,6e-6 6,8e-5 3,5e-4	2,0e-2

Donc l'efficacité de la méthode sous-espace avec contraintes dépend fortement du degré du polynôme $c(z)$: plus le degré de $c(z)$ est grand et plus l'espace d'indétermination de $h(z)$ est grand. La méthode sous-espace avec contraintes a donc de piètres performances.

5 Performances asymptotiques

Ce phénomène peut aussi être analysé en terme de performances statistiques asymptotiques de l'estimateur du filtre $h(e^{2i\pi f})$, dans le cas où les observations sont bruitées par un bruit blanc, gaussien, circulaire, centré et de variance σ^2 . On note

- C , la matrice de covariance de l'estimateur de \mathbf{h} pour la méthode sous-espace sans connaissance *a priori* sur la structure du filtre.
- $C_{\mathbf{h}}$ la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du filtre \mathbf{h} , dans le cadre de la méthode sous-espace avec contraintes.
- C_c la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du vecteur \mathbf{c} .

Il est facile de constater que le lien associant ces deux dernières matrices est le suivant :

$$C_{\mathbf{h}} = \overline{\mathcal{T}}(g)C_c\mathcal{T}^T(g)$$

D'après [4] les matrices C et C_c s'écrivent comme suit :

$$C_c = Q_c^\# \overline{\mathcal{T}}(g) \mathcal{P}^* \mathcal{D}^* \Sigma_1 \mathcal{D} \mathcal{P} \mathcal{T}^T Q_c^\#$$

$$C = Q^\# \mathcal{P}^* \mathcal{D}^* \Sigma_1 \mathcal{D} \mathcal{P} Q^\#$$

avec

$$\mathcal{P} = Id_{M+1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \int_0^1 \overline{D_{M+N}(e^{2i\pi f})} D_M^T(e^{2i\pi f}) \otimes \Pi_N(e^{2i\pi f}) df$$

avec $\Pi_N = [\Pi_{0,N}, \dots, \Pi_{N,N}]$ où les $\Pi_{k,N}$ sont les blocs de taille $2(N+1) \times 2$ et avec $\Pi_N(z) = \sum_{k=0}^N \Pi_{k,N} z^{-k}$.

$$\Sigma_1 = \overline{\mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})} \otimes \Pi_N \Sigma_2 \mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})^T \otimes \Pi_N,$$

$$\Sigma_2 = \int_0^1 \overline{D_N(e^{2i\pi f})} D_N^T(e^{2i\pi f}) \otimes S^T(e^{2i\pi f}) \otimes D_N(e^{2i\pi f}) D_N^*(e^{2i\pi f}) \otimes S(e^{2i\pi f}) df$$

$S(e^{2i\pi f}) = H(e^{2i\pi f})H^*(e^{2i\pi f}) + \sigma^2 Id_2$, $\mathcal{T}_N^{-L}(\mathbf{h})$ l'inverse à gauche de $\mathcal{T}_N(\mathbf{h})$.

Les deux figures ci-dessous fournissent une étude spectrale des matrices de covariance asymptotique calculées à partir des filtres décrits dans la partie précédente et pour un Rapport Signal à Bruit de 60dB. Il apparait clairement que la matrice C est constamment mal conditionnée, puisque ces valeurs propres maximales sont très grandes. Par contre, pour la matrice $C_{\mathbf{h}}$, le conditionnement est différent car fonction du degré de $c(z)$. Pour $K = 9$, la matrice n'a pas été reconditionnée, même si l'espace d'indétermination du filtre a diminué de dimension et ce parce que K est toujours inférieur à M . Pour $K = 1$, la

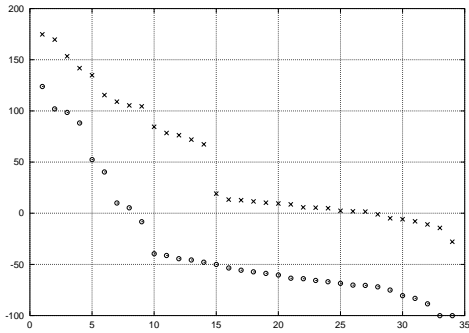


FIG. 1: Valeurs propres (en dB) de la matrice C (ligne \times) et de la matrice $C_{\mathbf{h}}$ (ligne \circ) pour $\deg(c(z))=9$.

matrice a été reconditionnée puisqu'il n'y a plus d'espace d'indétermination pour le filtre à identifier.

6 Conclusion

Dans [5] il a été montré que le filtre \mathbf{h} , à bande limitée, à identifier ne pouvait être déterminé qu'à un sous-espace près, dans le cadre d'algorithme de type méthode sous-espace introduite par [2]. Pour lever cette indétermination, il paraissait intéressant de rajouter des connaissances *a*

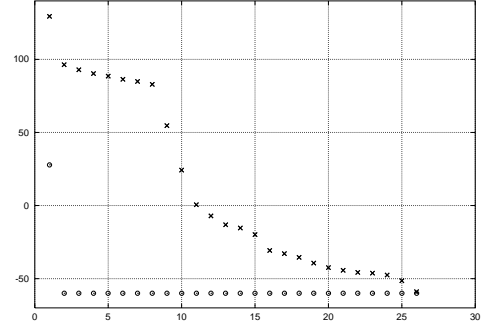


FIG. 2: Valeurs propres (en dB) de la matrice C (ligne \times) et de la matrice $C_{\mathbf{h}}$ (ligne \circ) pour $\deg(c(z))=1$.

priori sur la structure du filtre dans la méthode sous-espace. Ces connaissances se résumaient à dire que le filtre \mathbf{h} provenait de la contribution d'un filtre de mise en forme (connu) et d'un canal de propagation à trajets multiples (inconnu). Nous avons montré que l'indétermination du problème pouvait être soulevée quand le degré du canal de propagation était très faible. Dans l'autre cas, l'espace des indéterminations a certes été réduit en taille par rapport à la méthode sans contraintes, mais il existe toujours.

Références

- [1] L. Tong, G. Xu et T. Kailath : *A new approach to blind identification and equalization of multipath channels*, 25th Asilomar Conference, Pacific Grove, CA, pp. 856-860, 1991.
- [2] E. Moulines, P. Duhamel, J.F. Cardoso, S. Mayrargue : *Subspace method for the blind equalization of multichannel FIR filters*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 43, pp. 516-526, Février 1995.
- [3] D. Slepian : *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty*, The Bell System Technical Journal, vol. 57, N° 5, Mai-Juin 1978.
- [4] K. Abed-Meraim et al. : *On Subspace Methods for Blind Identification of Single-Input Multiple-Output FIR Systems*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, pp. 1-14, Janvier 1997.
- [5] Ph. Ciblat, Ph. Loubaton : *Second order blind equalization : the bandlimited case*, ICASSP'98, Seattle, Mai 1998.
- [6] H.H. Zeng, L. Tong : *Blind Channel Estimation using Second-Order Statistics : Algorithms*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, pp. 1919-2071, Août 1997.
- [7] Z. Ding : *Multipath Channel Identification Based on Partial system Information*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, pp. 235-238, Janvier 1997.
- [8] J. Ayadi, D. Slock : *Cramer-Rao bounds and methods for knowledge based estimation of multiple FIR channels*, SPAWC'97, Paris, Avril 1997.
- [9] V. Buchoux et al. : *Blind and semi-blind equalization : methods et algorithms*, à paraître dans les Annales des Télécommunications.