

Détection de structures dans le plan temps-fréquence à l'aide de graphes minimaux

Olivier MICHEL¹, Patrick FLANDRIN¹, Alfred O. HERO²

¹Laboratoire de Physique, ENS Lyon, UMR 5672
46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

²Dept of EECS, The University of Michigan
Ann Arbor, MI 48109-2122, U.S.A.

omichel@physique.ens-lyon.fr, flandrin@physique.ens-lyon.fr, hero@eecs.umich.edu

Résumé – Après avoir rapidement rappelé un ensemble de définitions, nous présentons quelques résultats récents montrant l'intérêt des graphes de représentation minimaux dans le cadre des problèmes d'estimation d'entropie, et de discrimination entre distribution de probabilité. Cette approche est appliquée ici au problème de détection de composante dans le plan temps-fréquence.

Abstract – In this paper, we present some recent results in non parametric entropy estimation, based on asymptotic properties of minimal spanning trees. Some definitions are recalled and the potential of this approach in the context of density discrimination and clustering is illustrated. Application are presented for the problem of component extraction in the time frequency plane.

1 Introduction

Dans des études récentes [1, 2], nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation robuste de l'entropie de Rényi d'une distribution multi-dimensionnelle à partir d'un ensemble de réalisations de cette distribution. Dans ce contexte, nous avons montré que les MST (Minimal Spanning Trees), graphes acycliques connectant entre eux l'ensemble des points d'un ensemble de réalisations du processus étudié, permet une estimation directe de cette entropie, avec un faible coût algorithmique. L'extension de ce travail [2, 3] à la détermination de k -MST, sous graphes ne connectant entre eux que k points parmi l'ensemble des réalisations observées, apporte une solution robuste possible à la séparation de mélange statistique. Dans cette étude nous présentons une application de ces outils issus de la théorie des graphes, à la détection et la séparation des composantes d'un signal non stationnaire bruité; cette étude s'appuie sur l'analyse des extrema relatifs d'une représentation temps-fréquence quadratique de ce signal. Dans une première partie, nous rappelons quelques définitions et propriétés des graphes acycliques minimaux (MST); l'exploitation des MST et k -MST pour l'estimation d'entropie et la séparation de mélange, illustrée par quelques exemples, fait l'objet de la deuxième partie. Dans la troisième partie enfin, nous présentons une méthode de détection de structures dans le plan temps fréquence, s'appuyant sur la structure des MST et/ou k -MST construits sur l'ensemble des ses maxima relatifs. Les résultats présentés sont calculés à partir du spectrogramme, mais peuvent facilement s'extrapoler à d'autres distributions.

2 MST et k -MST

Un graphe acyclique minimal (MST) est un graphe (ou arbre) \mathcal{T}_n connectant l'ensemble des réalisations $\mathcal{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'un processus ponctuel défini dans R^d . C'est donc une liste de sommets (les points x_i) et de connections $e_{i,j}$ entre ces sommets. La longueur totale d'ordre γ du graphe est la somme des longueurs (norme euclidienne) pondérées en loi de puissance d'ordre $\gamma \in]0, d[$, de l'ensemble des connections :

$$L_{n,\gamma} = \sum_{e_{i,j} \in \mathcal{T}_n} |e_{i,j}|^\gamma$$

Le MST est, parmi tous les graphes acycliques totalement connectés qu'il est possible de construire, le graphe dont la longueur est minimale :

$$\mathcal{T}_n^* = \text{Arg min}_{\mathcal{T}_n} L_{n,\gamma}$$

Ce dernier peut être calculé de façon exacte à partir d'algorithmes dont le coût varie comme $n \log n$. Cette définition est étendue aux sous graphes ne connectant qu'un sous ensemble de points dans R^d : les k -MST.

Un k -MST est un graphe minimal ne connectant que k points parmi n . C'est aussi le MST associé au sous ensemble $\mathcal{X}_{n,k}$ de \mathcal{X}_n ne contenant que ces k points. La minimisation porte alors à la fois sur la détermination de ce sous-ensemble et sur la longueur du MST connectant les points du sous-ensemble :

$$\mathcal{X}_{n,k}^* = \text{Arg min}_{i_1, \dots, i_k} \text{Arg min}_{\mathcal{T}_n} L_{n,k,\gamma}$$

où $\mathcal{X}_{n,k} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$. En pratique, la double minimisation est conduite conjointement; c'est le cas en particulier des algorithmes que nous avons développés [1, 2].

Il a été démontré que le problème d'estimation d'un k -MST dans R^2 est un problème NP-complet [4, 5]. Ravi *et al* ont proposé un algorithme d'approximations à coût polynomial dans le cas de distributions bidimensionnelles. Dans [2], nous avons étendu ce travail et proposé un algorithme d'approximation des k -MST dans le cas plus général d -dimensionnel, fournissant une solution dont le rapport d'approximation est majoré par $O(k^{\frac{d-1}{d}})$. Le détail de l'algorithme de calcul approché des k -MST, sa robustesse calculée à partir des courbes d'influence, et des éléments de preuve de sa convergence asymptotique sont étudiés dans l'article [2]. Cette partie, très technique, ne sera pas développée dans cette communication.

3 Propriétés

Soient L définie auparavant, fonction quasi-additive euclidienne d'ordre γ , et \mathcal{X}_n un ensemble de réalisations indépendantes du processus aléatoire de densité de Lebesgue $f(x)$, défini sur R^d . Steele [6] a démontré le théorème suivant, généralisant un résultat établi par Beardwood, Halton et Hammersley [7] :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\mathcal{X}_n)}{n^{\frac{d-\gamma}{d}}} = \beta(\gamma, d) \int_{R^d} f(x)^{\frac{d-\gamma}{d}} dx \quad (p.s.)$$

Soient $\nu \in]0, 1[$ défini par l'égalité $\nu = (d - \gamma)/d$, $\gamma \in]0, d[$, et

$$\hat{H}_\nu(\mathcal{X}_{n,k}^*) = \frac{1}{1-\nu} \ln(n^{-\nu} L(\mathcal{X}_{n,k}^*)) + \beta(\nu, d) \quad (1)$$

la statistique construite à partir de la longueur $L^\gamma(\mathcal{X}_{n,k}^*) = \sum_{e_{i,j} \in \mathcal{T}_{n,k}^*} |e_{i,j}|^{(1-\nu)d}$, associée au k -MST $\mathcal{T}_{n,k}^*$.

Nous avons établi dans [2] la propriété suivante :

Soit $\hat{L}(\mathcal{X}_{n,k}^*)$ la valeur approchée de $L(\mathcal{X}_{n,k}^*)$, obtenue par l'algorithme d'estimation des k -MST [2]. Si $k = \alpha n$, $\alpha \in [0, 1]$, en substituant $\hat{L}(\mathcal{X}_{n,k}^*)$ à $L(\mathcal{X}_{n,k}^*)$ dans (1), on obtient un estimateur consistant et robuste de l'entropie de Rényi de la densité f :

$$\hat{H}_\nu(\mathcal{X}_{n,k}^*) \rightarrow \min_{A: P(A) \geq \alpha} \frac{1}{1-\nu} \ln \int_A f^\nu(x) dx \quad (p.s.)$$

Dans cette expression, la minimisation est conduite sur tous les sous-ensembles boréliens A définis sur $[0, 1]^d$, dont la probabilité $P(A)$ vérifie l'inégalité $P(A) = \int_A f(x) dx \geq \alpha$.

Il est remarquable que la valeur de β dans l'expression (1), est égale à l'entropie de Rényi d'une distribution de densité uniforme sur $[0, 1]^d$. β n'est par conséquent fonction que de ν et d . La variable k qui fixe la taille (en terme de nombre de sommets connectés) du graphe minimal cherché, joue un rôle identique au rôle tenu par le paramètre α dans les estimateurs de moyennes α -tronquées : en présence de points de bruit (outliers), k peut être ajusté de sorte à assurer une certaine robustesse à l'estimateur

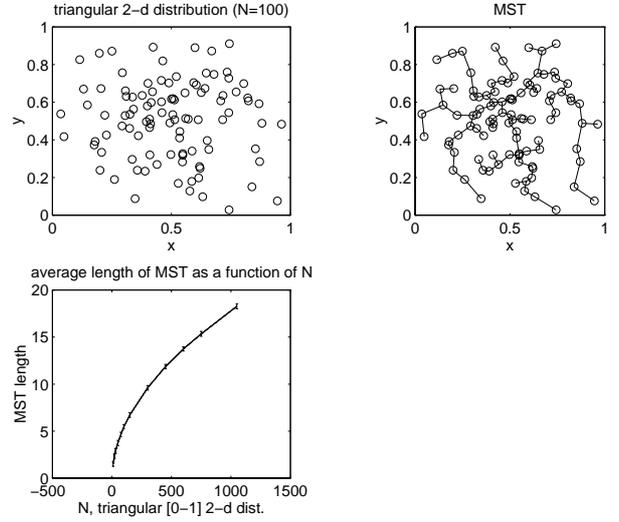


FIG. 1: Distribution pour $N = 100$ réalisations de la variables aléatoire, MST, et longueur des MSTs en fonction de N , pour une distribution triangulaire.

d'entropie [1, 2].

On peut noter enfin que la méthode proposée s'étend sans difficulté au problème d'estimation d'autre type d'entropies, par exemple l'entropie structurale de Havrda-Charvát, non additive, qui généralise l'entropie de Rényi.

4 Exemples

La figure (1) représente un exemple qui illustre l'intérêt des MST dans le cadre des problèmes de discrimination entre deux distributions. L'utilisation des MST dans le contexte de discrimination entre distributions n'est pas nouvelle (voir par exemple [9]).

La distribution considérée, définies sur $[0, 1]^d$ est une distribution séparable triangulaire, maximale en $(0.5, 0.5)$. La figure comporte trois graphiques : un exemple de distribution obtenu pour 100 réalisations de la variable aléatoire bidimensionnelle considérée, le MST construit sur cette distribution, et la représentation de l'évolution de la longueur moyenne des MST obtenus en fonction du nombre de réalisations considéré. Ce dernier graphe est calculé en reproduisant 256 constructions de MST pour chaque valeur N étudiée. La longueur utilisée ici est la longueur euclidienne usuelle, soit pour $\nu = 1/2$. La comparaison entre les résultats obtenus pour cette dernière distribution d'une part et la distribution uniforme bidimensionnelle d'autre part, est présentée sur la figure 2. Le graphe de gauche reproduit les longueurs L_N normalisées par \sqrt{N} , et transformées par la fonction $-2 \log(\cdot)$. Il apparaît clairement que ces valeurs transformées de la longueur des MSTs convergent vers des constantes différentes pour chacune des distributions. En fait, comme nous l'avons indiqué dans [3], les valeurs asymptotiques sont égales aux valeurs de l'entropie de Rényi d'ordre $1/2$ de chaque distribution.

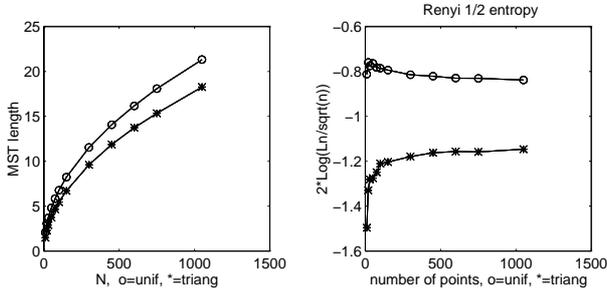


FIG. 2: Évolution de la longueur des MSTs pour des distributions uniformes ou triangulaires, en fonction du nombre de réalisations considéré. À gauche : longueur euclidienne; à droite : entropie de Rényi d'ordre 1/2.

5 MST et temps-fréquence

L'intérêt des approches recourant aux MST ou k -MST pour l'analyse de composantes dans le cas des représentations temps-fréquence, fait l'objet de cette section. L'ensemble des maxima relatifs de la distribution est identifié dans une première étape. Chacun de ces maxima relatifs peut être considéré comme une réalisation d'un processus aléatoire tridimensionnel; les variables considérées sont du type $x = [t, \nu, E(t, \nu)]$, où $E(t, \nu) \in \mathbb{R}$ est la valeur prise par la distribution temps-fréquence à la date $t \in \Delta T$ et à la fréquence $\nu \in \Delta F$. Le problème de détection des composantes est alors reformulé comme un problème de séparation de mélange $f = (1 - \varepsilon)f_1 + \varepsilon f_2$, dans lequel $f_1 = g(x/\text{Bruit})$, $f_2 = g(x/\text{Signal})$ où $g(x/.)$ est la fonction de distribution des maxima de la distribution, conditionnellement à la présence de bruit ou de signal respectivement.

Un problème crucial rencontré dans ce contexte réside dans la définition nécessaire d'une norme dans l'espace $\Delta T \times \Delta F \times \mathbb{R}$. La définition d'une norme dans le seul plan temps fréquence (TF) doit conduire à une notion de distance qui soit indépendante de l'échantillonnage dans ce dernier : la distance entre deux 'paquets' d'énergie ne devrait pas dépendre de la fréquence d'échantillonnage de la série temporelle, ni du nombre de bins fréquentiels utilisés dans l'estimation de la distribution TF. Ceci peut être obtenu en imposant que le nombre de bins fréquentiels et le nombre de d'échantillons de la série temporelle soient de rapport constant K . En dehors de ce cas simple, la définition d'une norme dans le plan TF est un problème ouvert, qui sort du cadre de cette communication. On utilisera donc dans le plan TF la définition

$$D(P1, P2) = \sqrt{\left(\frac{f_1 - f_2}{F_e}\right)^2 + \left(\frac{(t_1 - t_2)F_e}{KN}\right)^2}$$

Dans la suite, on prendra $F_e = 1$ et $K = 1$, i.e. N bins fréquentiels pour N échantillons. La dynamique de la troisième variable, homogène à une énergie, est totalement arbitraire dans la représentation TF.

Deux approches sont discutées dans cette étude; la première est une transposition directe des méthodes proposées dans des travaux antérieurs, en dimension deux [8]. Cette méthode repose sur un algorithme d'élagage récursif du MST construit dans le plan TF, sur la distribution des

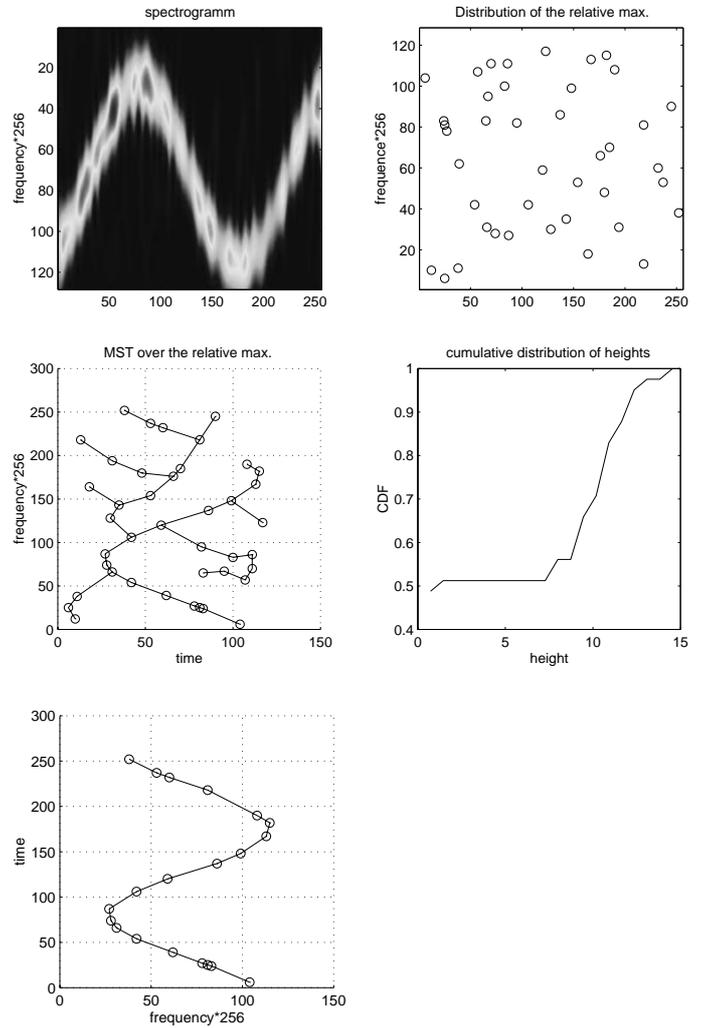


FIG. 3: Extraction automatique d'une modulation sinusoïdale de fréquence (RSB=5dB); En haut, à gauche: spectrogramme. En haut, à droite : carte des maxima locaux. Centre, à gauche : Projection du MST 3-D de la carte des maxima locaux. Centre, à droite: Fonction de distribution cumulative des longueurs (fdc) de segments du MST 3-D. En bas, à gauche : Structure extraite par seuillage de la fdc, et élagage.

maximas relatifs les plus forts. L'algorithme d'élagage utilisé a été proposé par Banks [10] dans un contexte de régression non paramétrique.

L'ensemble des maxima les plus forts est déterminé par seuillage sur l'énergie. Le seuil de réjection est fixé par un critère de détection de rupture de la dérivée seconde de la fonction de distribution cumulative hauteurs des maxima (figure (3)).

La seconde approche présentée est appliquée directement en trois dimension. L'énergie est normalisée de sorte que les dynamiques sur chacun des axes temps, fréquence et énergie sont numériquement identiques. Soit \mathcal{T}_n^* le MST construit sur la distribution des maxima relatifs de la distribution TF et $\{e_{i,j}\}$ l'ensemble de ses segments. Soit alors c une coupure sur ce MST, définissant deux sous-ensemble de points S_1, S_2 . On cherche c tel que

$$c = \text{Arg min}_{e_{i,j}} \text{Max}\{H(S_1), H(S_2)\}$$

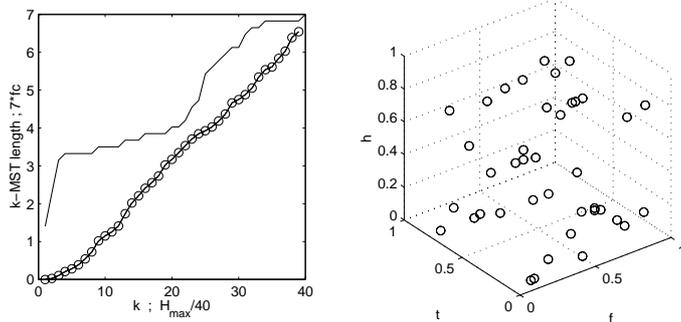


FIG. 4: Sur le graphique droit sont superposées deux courbes : la fonction cumulative de la distribution des hauteurs des maxima relatifs (l'échelle est modifiée à des fins de représentation), et la longueur des k -MST en fonction de k , pour la distribution des maxima relatifs considérés comme des variables définies dans R^3 , distribution représentée sur le graphique de gauche. Aucune de ces courbes ne permet de définir aisément un seuil.

où H est une fonction de coût. Si c est la coupure à appliquer pour obtenir deux distributions, sous contraintes de minimalité de l'entropie maximale des distributions résultantes, on choisit pour H l'entropie de Rényi, estimée par les MST. Cette approche reformule le problème de détection de composantes dans le plan TF comme un problème de 'clustering' sur l'ensemble des maxima relatifs. Les MST bidimensionnels sont alors appliqués sur chacun de ces sous ensembles (voir figure (5)). On peut noter que dans le cas présenté, l'utilisation de la norme euclidienne usuelle ($\gamma = 1$, cf sections précédentes) dans un espace de dimension $d = 3$ conduit à utiliser comme fonction de coût H , l'entropie de Rényi d'ordre $2/3$. La détermination du meilleur ordre à utiliser dans les problèmes de discrimination est, à notre connaissance, un problème totalement ouvert.

La figure (4), montre que dans le cas étudié, ni les longueurs des k -MST [8], ni la fonction de distribution cumulative des hauteurs des maxima ne permettent de séparer les maxima de signal des maxima de bruit.

Références

- [1] A.O.Hero, O.Michel : "Robust Entropy Estimation Strategies Based on Edge Weighted Random Graphs.", SPIE'98, San Diego, CA, 1998.
- [2] A.O.Hero, O.Michel : "Asymptotic theory of greedy approximations to minimal K-points random graphs." accepté à *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999.
- [3] A.O.Hero, O.Michel : "Robust estimation of point process intensity features using k-minimal spanning tree.", Proc. of ISIT 1997, Ulm, Germany, pp.74.

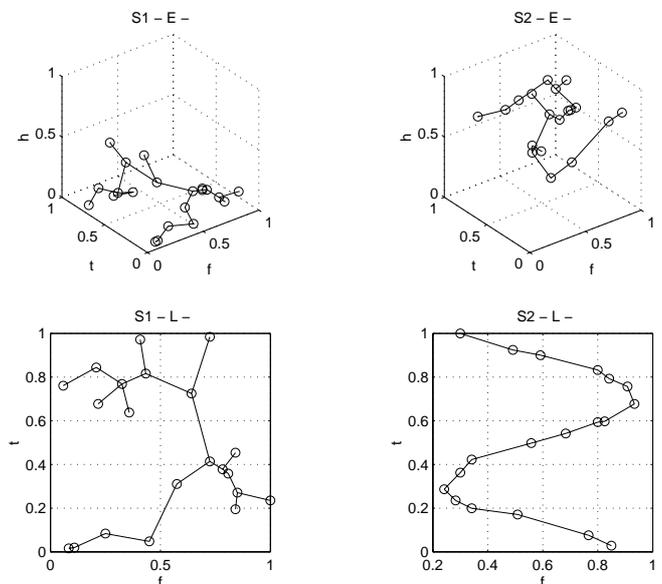


FIG. 5: Graphiques supérieurs : représentation dans R^3 des composantes identifiées S1 et S2, par le critère de séparation entropique défini dans le texte. Graphiques inférieurs : MST calculés dans le seul plan temps-fréquence (la composante 'énergie' est négligée), pour chacune des composantes identifiées S1 et S2.

- [4] R.Ravi, M.Marathe, D.Rosenkrantz, S.Ravi, "Spanning trees short or small," in *Proc. 5th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algo.*, pp.546-555, 1994.
- [5] A. A. Zelikovsky and D. D. Lozevanu, "Minimal and bounded trees," in *Proc. of Tezele Congres XVIII Acad. Romano-Americaine*, pp. 25-26, Kishinev, 1993.
- [6] J. M. Steele, "Growth rates of euclidean minimal spanning trees with power weighted edges," *Ann. Probab.*, vol. 16, pp. 1767-1787, 1988.
- [7] J. Beardwood, J. H. Halton, and J. M. Hammersley, "The shortest path through many points," *Proc. Cambridge Philosophical Society*, vol. 55, pp.299-327, 1959.
- [8] O.Michel, A.O.Hero : "Pruned MST's for Entropy estimation and outlier rejection.", IEEE-IT workshop on Detection, Classification and Imaging, Santa-Fe, NM, USA., Feb 99.
- [9] R. Hoffman and A. K. Jain, "A test of randomness based on the minimal spanning tree," *Pattern Recognition Letters*, vol. 1, pp. 175-180, 1983.
- [10] D.Banks, M.Lavine, H.J.Newton, "The MST for non-parametric regression and structure discovery," in *Comp. Science and Stat. Proc. of the 24th Symp. on the Interface*, pp.370-374, 1992.