

# Discrimination des modulations monoporteuses et multiporteuses par un test de normalité basé sur les cumulants d'ordre 4.

Walter AKMOUCHE

CELAR/TCOM/GR  
BP 7, 35998 RENNES ARMÉES  
akmouche@celar.fr

**Résumé** – Cet article traite de la reconnaissance de modulation, notre objectif étant de discriminer les modulations monoporteuses (de type linéaire) des modulations multiporteuses de type OFDM. Du fait du caractère quasi-gaussien des modulations multiporteuses, nous proposons un détecteur reposant sur le test de normalité de G. Giannakis et M. Tsatsanis [8] en utilisant les connaissances *a priori* sur les modulations numériques. Ce détecteur permet d'atteindre une probabilité de détection  $P_d=0,99$  pour une probabilité de fausse alarme  $P_{fa}=10^{-2}$  dans le cas le plus défavorable rencontré (MAQ-256 filtrée contre OFDM-32).

**Abstract** – This paper deals with modulation classification. Our goal is to discriminate single-carrier (SC) modulations from multicarrier (MC) modulations of OFDM type. Because MC-modulations are asymptotically Gaussian, we propose here a detector using the statistical test of G. Giannakis and M. Tsatsanis [8] based on fourth-order cumulants. This test is here adapted to the specific case of digital modulations which allows to reduce the algorithm complexity. Simulations are provided and show that in the worst case (filtered QAM-256 versus 32-OFDM) the detector achieves a probability of detection  $P_d=0.99$  for a probability of false alarm  $P_{fa}=10^{-2}$ .

## 1 Introduction

Dans le cadre de la surveillance du spectre, il est important de déterminer le type de modulation utilisé par un signal. De nombreuses études ont été menées pour résoudre ce problème, pour des modulations analogiques ou numériques [6, 9, 10]. Les développements actuels nous conduisent à nous intéresser désormais aux modulations de type OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) qui sont de plus en plus utilisées (DAB, DVB, ...).

Nous cherchons ici à discriminer les modulations multiporteuses des modulations linéaires monoporteuses MDP (modulation de phase) et MAQ (modulation d'amplitude en quadrature). Nous proposons un détecteur basé sur le test de normalité de G. Giannakis et M. Tsatsanis [8] qui utilise les cumulants d'ordre 4 et conduit à décider entre deux hypothèses,  $\mathcal{H}_0$  (processus gaussien) et  $\mathcal{H}_1$  (processus non gaussien). Dans le cadre de notre étude, nous supposons disposer de l'observation  $r(t)$  d'un signal modulé  $x(t)$  noyé dans un bruit blanc gaussien centré additif.

Compte tenu de la convergence rapide de la loi de probabilité des modulations OFDM vers la loi gaussienne quand le nombre de porteuses augmente, le problème se ramène alors au test d'hypothèse suivant :

$\mathcal{H}_0$  :  $x(t)$  est une modulation multiporteuse

$\mathcal{H}_1$  :  $x(t)$  est une modulation monoporteuse linéaire

À partir des résultats établis dans [6], nous avons modifié légèrement le test [8] en ne retenant que les cumulants permettant la meilleure discrimination, ceci permettant une réduction importante du coût de calcul sans dégradation

des performances.

Le paragraphe 2 caractérise la convergence des signaux OFDM vers la loi normale. Le paragraphe 3 décrit le détecteur proposé et le paragraphe 4 son application pratique. Les performances sont données au paragraphe 5. Enfin, le paragraphe 6 conclut cet article.

## 2 Propriétés statistiques des multiporteuses

Le signal en bande de base d'une modulation OFDM s'écrit :

$$x(t) = \sqrt{\frac{P}{N_p}} \cdot \sum_k \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2} c_{n,k} \cdot e^{2i\pi(f_0+n\Delta f)t} \cdot g(t - kT_s) \quad (1)$$

où  $\{c_{n,k} = c_{r_{n,k}} + i \cdot c_{i_{n,k}}\}$  est la suite des symboles complexes émis, supposés centrés, indépendants et identiquement distribués,  $f_0$  le résidu de porteuse,  $N_p$  désigne le nombre de porteuses,  $\Delta f$  l'écart inter-fréquentiel,  $P$  la puissance du signal et  $g(t)$  la forme d'onde utilisée. De plus, nous posons  $T_s = T_u + T_g$ ,  $T_u$  étant le « temps utile » durant lequel l'information est émise,  $T_g$  est le « temps de garde » et  $T_s$  le temps du symbole OFDM complet.

En décomposant  $x(t)$  en parties réelle et imaginaire  $x(t) = x_r(t) + i \cdot x_i(t)$ ,  $x_r(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$x_r(t) = \sqrt{\frac{1}{N_p}} \cdot \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2} \sum_k x_{r_{n,k}}(t)$$

avec

$$x_{r_{n,k}}(t) = \text{Re} \left\{ c_{n,k} \cdot e^{2i\pi(f_0 + n \cdot \Delta f)t} \cdot g(t - kT_s) \right\}$$

Les lois de  $x_r(t)$  et  $x_i(t)$  convergent vers la loi gaussienne et le calcul de leur cumulants d'ordre 4 permet d'évaluer la vitesse de convergence. Nous calculons alors la valeur de ce cumulants dans le cas de la partie réelle à l'instant  $t = t_0$  :

$$\text{Cum}_4(x_r) = \text{Cum}_4 \left( \sqrt{\frac{1}{N_p}} \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2} \sum_k x_{r_{n,k}}(t_0) \right)$$

compte tenu de l'indépendance des symboles émis sur chaque porteuse et de la multi-linéarité du cumulants, nous avons :

$$\text{Cum}_4(x_r) = \sqrt{\frac{1}{N_p^4}} \cdot \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2} \text{Cum}_4 \left( \sum_k x_{r_{n,k}}(t_0) \right)$$

Le terme  $\text{Cum}_4(\sum_k x_{r_{n,k}}(t_0))$  est le cumulants d'ordre 4 de la modulation utilisée sur chaque porteuse et dont nous savons qu'il a une valeur finie, supposée identique pour tout  $-N_p/2 \leq n \leq N_p/2$ . Finalement, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \text{Cum}_4(x_r) &= \frac{1}{N_p^2} \cdot N_p \cdot \text{Cum}_4 \left( \sum_k x_{r_k}(t_0) \right) \\ &= \frac{1}{N_p} \cdot \text{Cum}_4 \left( \sum_k x_{r_k}(t_0) \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons que :

$$\text{Cum}_4(x_r) \rightarrow 0 \quad \text{en } 1/N_p.$$

La convergence est clairement identique dans le cas de la partie imaginaire  $x_i(t)$ . La décroissance du cumulants d'ordre 4 d'une modulation de type OFDM est inversement proportionnelle à son nombre de porteuses.

### 3 Détecteur proposé

Nous utilisons le test de normalité basé sur les cumulants 4 proposé dans [8], adapté ici au cas particulier des modulations numériques. Ce test consiste à ranger dans le vecteur  $\mathbf{c}$  l'ensemble des cumulants d'ordre 4 suivant :

$$\text{Cum}_{4,x_r}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \text{ avec } 0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \eta_3 \leq M - 1 < \infty$$

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , ce vecteur est nul de sorte que le récepteur revient à tester la nullité de la norme du vecteur  $\mathbf{c}$  ce qui se ramène à :

$$dG4 = \mathbf{c}^T \cdot \Sigma_{\mathbf{c}}^{-1} \cdot \mathbf{c} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{>}} s \quad (2)$$

où  $\Sigma_{\mathbf{c}}$  désigne la matrice de covariance de  $\mathbf{c}$  et  $s$  le seuil imposé. Le travail essentiel de [8] est de donner une manière simple et consistante d'estimer la matrice  $\Sigma_{\mathbf{c}}$  à partir d'une observation.

Compte tenu de l'ensemble des cumulants choisis, la dimension du vecteur  $\mathbf{c}$  est  $L = M(M + 1)(M + 2)/6$ . Ce test a été proposé avec la plus grande généralité sans faire

aucune hypothèse sur  $\mathcal{H}_1$ . Dans notre cas, nous supposons que l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  correspond aux modulations linéaires de sorte que d'après les résultats obtenus dans [6, 7], il nous est possible de choisir les cumulants les plus énergétiques pour maximiser la probabilité de détection à probabilité de fausse alarme constante. L'ensemble des cumulants retenus pour notre détecteur est l'ensemble

$$\left\{ \text{Cum}_4(0, \eta, \eta), 0 \leq \eta \leq 1,5 \cdot T_s \right\}$$

Le test [8] s'applique aux données réelles alors que nous sommes ici dans le cas complexe. Nous proposons d'utiliser le fait que sous  $\mathcal{H}_0$  les parties réelle et imaginaire de  $x(t)$  sont gaussiennes sous la forme du test suivant :

$$\sup \left( \mathbf{c}_r^T \cdot \Sigma_{c_r}^{-1} \cdot \mathbf{c}_r, \mathbf{c}_i^T \cdot \Sigma_{c_i}^{-1} \cdot \mathbf{c}_i \right) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{>}} s \quad (3)$$

$\mathbf{c}_r$  désigne le vecteur composé des cumulants d'ordre 4 de la partie réelle et  $\mathbf{c}_i$  le vecteur composé des cumulants d'ordre 4 de la partie imaginaire.

Ce test utilise de plus des relations démontrées dans le seul cas stationnaire, alors que nous étudions ici des signaux cyclostationnaires. L'application de ces relations ne fait pas l'objet de cette étude mais se justifie *a posteriori* par les performances obtenues.

### 4 Mise en œuvre du test

L'algorithme de détection est le suivant :

1. calculer les cumulants  $\text{Cum}_{4,r}(0, \eta, \eta)$  et  $\text{Cum}_{4,i}(0, \eta, \eta)$ , avec  $0 \leq \eta \leq M - 1 < \infty$ .  $M$  désigne le nombre de retards pris en compte, avec  $M \geq 1,5 \cdot T_s$ . Dans les deux cas :

$$\begin{aligned} \text{Cum}_4(0, \eta, \eta) &= \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-\eta-1} r^2(i)r^2(i+\eta) \\ &\quad - r^4(i) - 2 \cdot r^2(i) \cdot r^2(i+\eta) \end{aligned}$$

où  $T$  est le nombre d'échantillons disponibles. Former alors les vecteurs  $\mathbf{c}_r$  et  $\mathbf{c}_i$ .

2. Calculer les matrices de covariance  $\Sigma_{c_r}$  et  $\Sigma_{c_i}$  en appliquant les formules de Leonov-Shiryayev [2, pp. 21-22] :

$$\Sigma_{c_r}(p, q) = \text{Cov}\{\text{Cum}_{4,r}(0, \eta_p, \eta_p), \text{Cum}_{4,r}(0, \eta_q, \eta_q)\}$$

et

$$\Sigma_{c_i}(p, q) = \text{Cov}\{\text{Cum}_{4,i}(0, \eta_p, \eta_p), \text{Cum}_{4,i}(0, \eta_q, \eta_q)\}$$

3. Calculer les valeurs des normes dans les cas réel et imaginaire :

$$dG4_r = \mathbf{c}_r^T \cdot (\Sigma_{c_r})^{-1} \cdot \mathbf{c}_r$$

et

$$dG4_i = \mathbf{c}_i^T \cdot (\Sigma_{c_i})^{-1} \cdot \mathbf{c}_i$$

4. Imposer le seuil  $s$  et effectuer le test 3.

Le vecteur  $\mathbf{c}$  est seulement de dimension  $L = M$  et la matrice  $\Sigma_c$  est de taille  $(M \times M)$ . Nous avons donc réduit la dimension du vecteur d'un facteur  $(M + 1)(M + 2)/6$  et celle de la matrice d'un facteur  $(M + 1)^2(M + 2)^2/36$ , ce qui est particulièrement intéressant lors de l'inversion de la matrice.

Malgré ces simplifications, la discrimination entre monoporteuses et multiporteuses reste possible avec de bons résultats, comme le démontre le paragraphe 5.

## 5 Performances

Les signaux simulés utilisent des modulations monoporteuses et sont supposés filtrés en Racine de cosinus sur-élevé (RCS) de roll-off 0,2. Les modulations OFDM sont elles simulées avec 32 porteuses, une modulations MDP-2 sur chaque porteuse, une fonction porte comme forme d'onde, avec un intervalle de garde (20 % du temps utile). Les simulations sont d'abord réalisées avec 5000 puis 512 échantillons, et dans chaque cas pour des rapports signal-à-bruit dans la bande du signal de 10 dB et 0 dB. Seul le bruit est ici pris en considération et nous ne simulons ni multi-trajets ni distorsions dans le canal.

La figure Fig. 1 représente la statistique suivie par le seuil  $dG4$  calculé à partir des parties réelle et imaginaire du signal  $r(t)$ , pour 100 tirages de 5000 échantillons dans le cas de l'OFDM-32, de la MAQ et de la MDP, pour un rapport signal-à-bruit de 10 dB. La figure Fig. 2 donne ce même seuil pour un rapport signal-à-bruit de 0 dB seulement.

Nous pouvons remarquer que ces statistiques sont bien séparées. Nous remarquons aussi que le bruit influe sur les résultats obtenus car d'une part il n'est pas rigoureusement gaussien, et d'autre part car nous ne disposons que d'estimations des cumulants.

Nous faisons le même type de simulations dans le cas particulièrement défavorable et difficile où nous ne disposons que de 512 points et pour un rapport signal-à-bruit de 0 dB. La figure Fig. 3 montre que la discrimination devient plus difficile. La figure Fig. 4 est un agrandissement sur quelques erreurs entre OFDM-32 et MAQ-256 filtrée.

Enfin, la figure Fig. 5 donne les performances du détecteur pour 512 échantillons à travers une représentation ( $P_d$ ,  $P_{fa}$ ),  $P_d$  étant la probabilité de détection et  $P_{fa}$  la probabilité de fausse alarme, en considérant la situation la plus difficile, OFDM-32 contre MAQ-256 filtrée.

## 6 Conclusion

Nous avons montré dans cet article que le test de normalité de G. Giannakis et M. Tsatsanis pouvait être adapté à la reconnaissance de modulations numériques avec de bonnes performances. Toutefois, ces performances seront fortement diminuées dans le cas de signaux réels en raison des autres perturbations liées au canal (trajets multiples, distorsion, ...). Néanmoins, l'écart entre les statistiques des seuils  $dG4$  pour les modulations monoporteuses et multiporteuses permet d'envisager une application pratique de ce test.

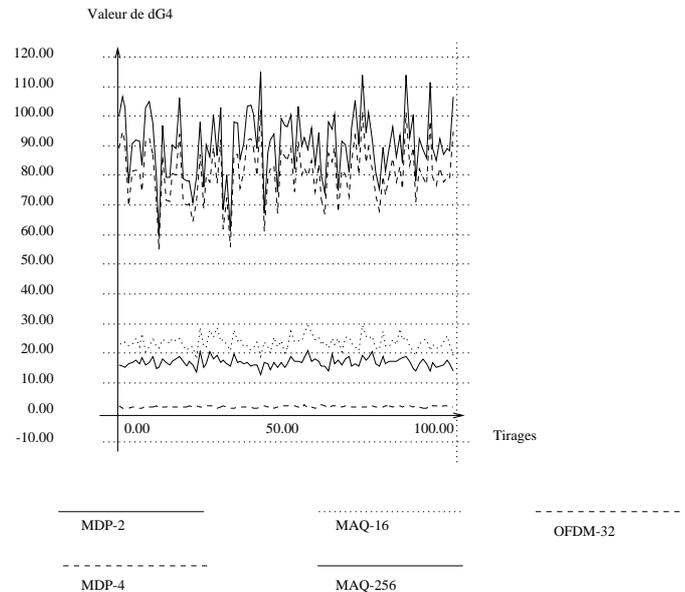


FIG. 1: *Seuil  $dG4$  pour 100 tirages.  $RSB = 10dB$ . Monoporteuses filtrées en RCS,  $\alpha = 0,2$ . 5,000 points.*

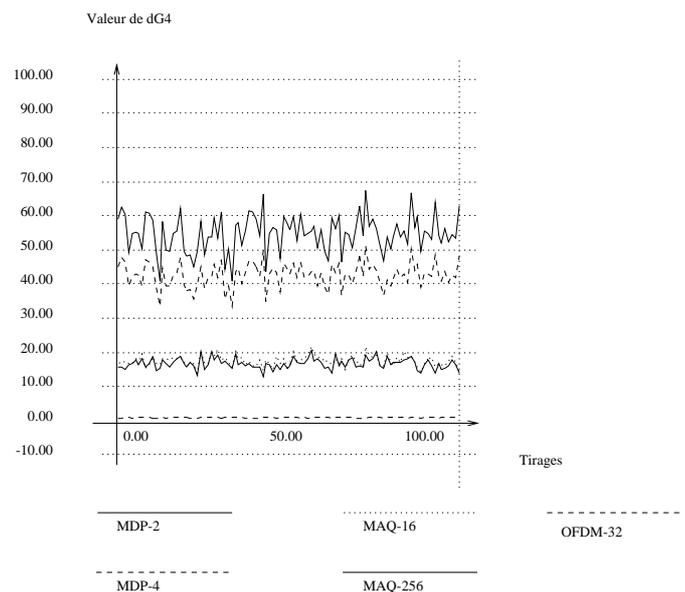


FIG. 2: *Seuil  $dG4$  pour 100 tirages.  $RSB = 0dB$ . Monoporteuses filtrées en RCS,  $\alpha = 0,2$ . 5,000 points.*

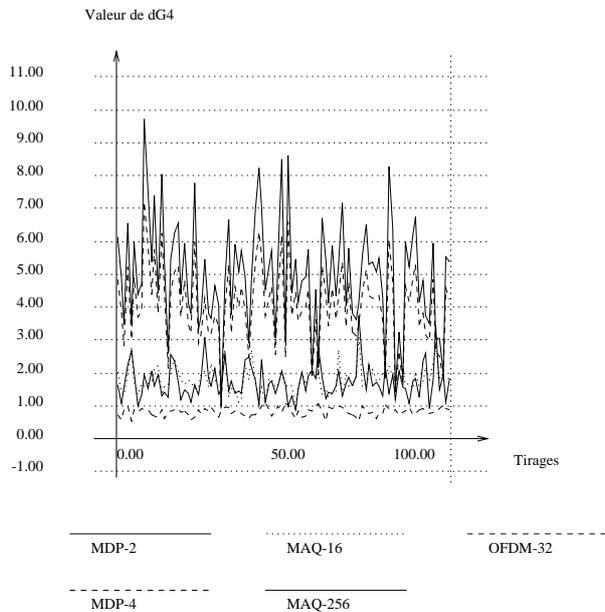


FIG. 3: *Seuil dG4 pour 100 tirages. RSB = 0dB. Mono-porteuses filtrées en RCS,  $\alpha = 0,2$ . 512 points.*

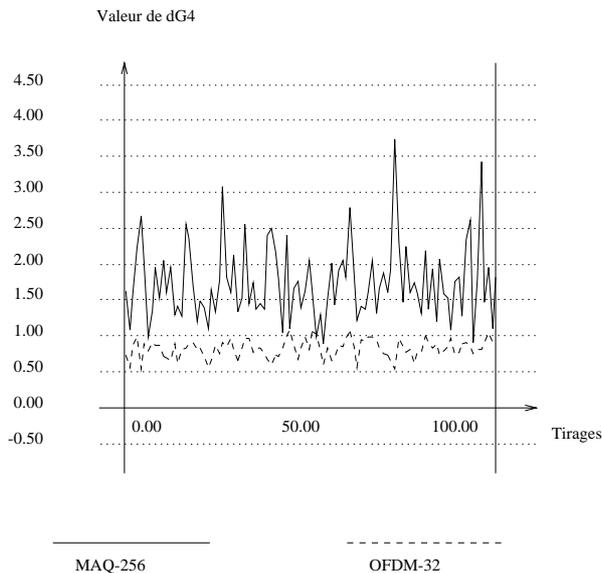


FIG. 4: *Seuil dG4 pour 100 tirages. RSB = 0dB. Agrandissement sur la discrimination entre MAQ-256 et OFDM. 512 points.*

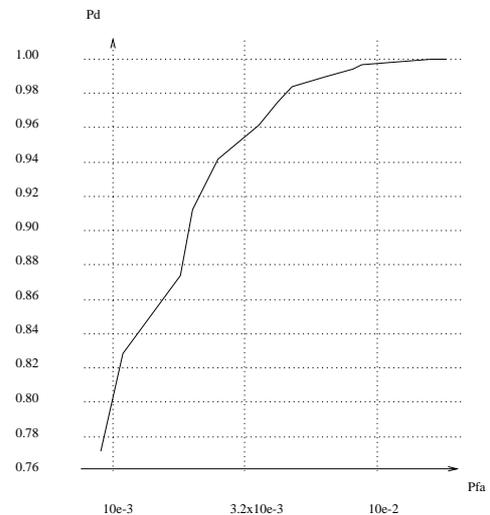


FIG. 5: *Représentation de Pd comme fonction de Log(Pfa) pour 512 points.*

## Références

- [1] G. Saporta *Probabilités, analyses des données et statistique*. ed. TECHNIP, 1990.
- [2] D. R. Brillinger *Time series, data analysis and theory*. ed. Holden-Day, expanded edition, 1974.
- [3] K. V. Mardia *Tests of univariate and multivariate normality*. Handbook of statistics, Vol. 1, North-Holland Publishing Company, 1980, pp. 279-320.
- [4] T. W. Epps *Testing that a stationary time series is gaussian*. The annals of statistics, Vol. 15, No. 4, 1987, pp. 1683-1698.
- [5] E. Moulines, K. Choukri *Time-domain procedures for testing that a stationary time-series is gaussian*. IEEE Trans. On Signal Proc., Vol. 44, No. 8, Aug. 1996, pp. 2010-2025.
- [6] C. Le Martret, D. Boiteau *Modulation Classification by mean of different orders statistical moments*. IEEE MILCOM'97, Monterey, Nov. 2-4 1997.
- [7] P. Marchand *Détection et reconnaissance de modulations numériques à l'aide des statistiques cycliques d'ordre supérieur*. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, septembre 1998, 190 pages.
- [8] G. B. Giannakis, M. K. Tsatsanis *Time-domain tests for Gaussianity and time-reversibility*. IEEE Trans. Autom. Control., Vol. 35, No. 1, Jan. 1990, pp. 18-26.
- [9] F. Lifdtke *Computer simulation of an automatic classification procedure for digitally modulated communication signals with known parameters*. Signal Processing, Vol. 6, 1984, pp. 311-323.
- [10] C.-Y. Huang, A. Polydoros *Likelihood methods for MPSK modulation classification*. IEEE Trans. On Comm., Vol. 43, No. 2/3/4, Feb./Mar./Apr 1995.
- [11] J.G. Proakis *Digital Communications*. New York: McGraw-Hill, 3rd ed., 1995.