

Séparation de sources non-circulaires

Jérôme GALY¹, Claude ADNET², Eric CHAUMETTE², Guillaume GELLE³

¹LIRMM, UMR CNRS 5506
165 rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 05, France

²Thomson-Csf Airsys
7 rue des mathurins 92223 Bagneux Cedex, France

³Laboratoire d'automatique et de Microelectronique
Faculté des sciences de Reims, BP 1039, 51687 Reims Cedex 2
galy@lirmm.fr, claude.adnet@airsys.thomson-csf.com
guillaume.gelle@univ-reims.fr

Résumé – Depuis de nombreuses années, les travaux sur la séparation de sources nous ont permis d'apprécier l'importance de l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur. En effet, dans ce cas, aucune information a priori sur le système n'est nécessaire pour permettre la séparation des sources présentes (les seules hypothèses à considérer étant l'indépendance statistique et la non-gaussianité des signaux). Il est intéressant maintenant de pouvoir utiliser uniquement les statistiques d'ordre deux pour réaliser la séparation. Cependant, il est nécessaire de connaître des informations a priori sur ces signaux. Nous exploitons dans cet article, la notion de non-circularité des signaux utiles afin de permettre une séparation à l'ordre 2.

Abstract – Blind Source Separation is now a well known problem. When a priori informations about the propagation or the geometry of the array are not available, the model can be generalized to a blind source separation model. It supposes the statistical independence of the sources and their non-gaussianity. In this paper, we focus on an algorithm, called Canonical Correlation Analysis, based on the use of second order statistics.

1 Analyse en Corrélation Canonique

L'Analyse en Corrélation Canonique est une méthode de traitement qui permet d'étudier la corrélation entre deux jeux de données.

On forme un jeu de données k fonction des observées dont on dispose.

$$k = g[x] \quad (1)$$

En séparation de sources, et notamment lorsqu'on s'intéresse à l'antibrouillage on décompose les signaux reçus en signaux utiles et en signaux de nuisances. Ce second jeu de données k est obtenu à partir d'une transformation des observations de la sortie de l'antenne x . Cette transformation est choisie de façon à privilégier le signal utile :

$$\begin{aligned} x &= x_{\text{utile}} + x_{\text{nuisances}} \\ k &= k_{\text{utile}} + k_{\text{nuisances}} \\ R_{xk} &= E[xk^H] = E[x_{\text{utile}}k_{\text{utile}}^H] \end{aligned} \quad (2)$$

L'analyse en corrélation canonique se décompose en plusieurs étapes.

La première étape consiste à écrire les deux jeux de données blanchies.

$$\begin{aligned} \Xi_x &= R_x^{-1/2} x \\ \Xi_k &= R_k^{-1/2} k \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{avec : } E[\Xi_x \Xi_k^H] = R_x^{-1/2} R_{xk} R_k^{-1/2}$$

On peut trouver la décomposition de cette matrice en valeurs singulières de la forme :

$$E[\Xi_x \Xi_k^H] = U \Sigma^2 V^H \quad (4)$$

Si l'on forme deux nouvelles matrices de la forme :

$$\alpha = U^H \Xi_x \quad (5)$$

et

$$\beta = V^H \Xi_k \quad (6)$$

on peut alors dire que α contient toute l'information sur Ξ_k qui peut être obtenue à partir de Ξ_x et réciproquement, β contient toute l'information sur Ξ_x qui peut être obtenue à partir de Ξ_k .

On résout donc $E[\alpha\beta^H] = \Sigma^2$ sous les conditions : $E[\alpha\alpha^H] = I = E[\beta\beta^H]$.

Supposons que nous disposons de deux jeux de données x et k .

L'Analyse en Corrélation Canonique consiste donc à définir deux jeux de pondérations W_x et W_k telles que les combinaisons linéaires $W_x^H x$ et $W_k^H k$ soient les plus corrélés possibles.

On pose alors :

$$\begin{aligned} \alpha &= W_x^H x \\ \beta &= W_k^H k \end{aligned} \quad (7)$$

En d'autres termes, l'Analyse en Corrélation Canonique consiste en une minimisation du critère suivant :

$$\Phi(W_k, W_x) = E[|W_k^H k - W_x^H x|^2] \quad (8)$$

sous les contraintes :

$$W_k^H R_k W_k = 1 \quad (9)$$

et

$$W_x^H R_x W_x = 1 \quad (10)$$

L'équation de minimisation du critère peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(W_k, W_x) = \text{trace} \left[\begin{array}{c} W_k^H R_k W_k + W_x^H R_x W_x - \\ W_k^H R_k W_x - W_x^H R_x W_k \end{array} \right] \quad (11)$$

Pour minimiser $\Phi(W_k, W_x)$, il faut dériver par rapport à chaque composante de W_k, W_x et passer par des opérateurs Lagrangiens Λ et Δ que nous n'explicitons pas ici.

On arrive ainsi à deux équations de la forme :

$$R_{xk} W_k = R_x W_x \Lambda \quad (12)$$

$$R_{kx} W_x = R_k W_k \Delta \quad (13)$$

En modifiant simplement l'équation, (multiplication par $R_{kx}^{-1} R_{kx}$) on fait apparaître :

$$\begin{aligned} R_{xk} W_k &= R_x R_{kx}^{-1} R_{kx} W_x \Lambda \\ &= R_x R_{kx}^{-1} R_k W_k \Delta \Lambda \end{aligned} \quad (14)$$

Si l'on s'intéresse à W_x , on peut transformer l'équation précédente pour obtenir l'équation duale.

Si on appelle $T = \Delta \Lambda$, on alors :

$$R_k^{-1} R_{kx} R_x^{-1} R_{kx} W_k = W_k T \quad (15)$$

Si l'on blanchit par $R_k^{1/2}$, on obtient l'expression :

$$R_k^{-1/2} R_{kx} R_x^{-1/2} R_x^{-1/2} R_{kx} R_k^{-1/2} R_k^{1/2} W_k = R_k^{1/2} W_k T \quad (16)$$

On pose que $R_k^{-1/2} R_{kx} R_x^{-1/2} = D$, on a alors :

$$D D^H \tilde{W}_k = \tilde{W}_k T \quad (17)$$

avec $\tilde{W}_k = R_k^{1/2} W_k$

Ainsi D peut se décomposer en valeurs, vecteurs propres. On choisit les L vecteurs propres correspondant aux L plus grandes valeurs propres que l'on note U_1 .

La matrice de pondérations se met sous la forme de :

$$W_k = R_k^{1/2} U_1 \quad (18)$$

Le raisonnement reste tout à fait analogue si l'on s'intéresse à la matrice W_x .

2 Applications

On prend comme modèle le modèle sans bruit défini comme suit : $x = As$. On considère que la matrice A peut se décomposer en valeurs singulières de la forme : $A = U\Sigma V$

2.1 SOBI

Si l'on considère que le deuxième jeu de données se déduit du premier par ajout d'un retard sur le signal, on a :

$$k = As(t - \tau) \quad (19)$$

et

$$x = As(t) \quad (20)$$

On peut écrire que : $R_x = R_k = U\Sigma^2 U^H$.

On passe d'abord par l'écriture blanchie des deux jeux de données.

$$\Xi_x = R_x^{-1/2} x = Vs(t) \quad (21)$$

$$\Xi_k = R_k^{-1/2} k = Vs(t - \tau)$$

avec : $R_x^{-1/2} = R_k^{-1/2} = \Sigma^{-1} U^H$

On a également :

$$E [\Xi_x \Xi_k^H] = V R_s(\tau) V^H \quad (22)$$

Pour déterminer V , *Belouchrani* dans SOBI [1] choisit de diagonaliser conjointement une famille de matrices à l'ordre 2. Cette approche est à comparer de celle de *Cardoso* et *Souloumiac* pour leur algorithme *Jade* [2].

Le principe de l'algorithme *SOBI* consiste à diagonaliser conjointement des matrices d'intercovariance blanchies.

L'estimation de V permet de former la matrice de mélange estimée \hat{A} de la forme :

$$\hat{A} = R_x^{1/2} V \quad (23)$$

et donc les sorties estimées sont de la forme :

$$\hat{s}(t) = V^H R_x^{-1/2} x \quad (24)$$

2.2 Séparation de sources non-circulaires

Dans notre contexte, les signaux utiles que nous utiliserons (*BPSK*) sont non-circulaires et les signaux de nuisances sont quant à eux circulaires. Si l'on note les signaux de nuisances $j(t)$ et les signaux utiles $s(t)$, alors on peut dire que :

$$E [s(t)^2] \neq 0 \quad (25)$$

et

$$E [j(t)^2] = 0 \quad (26)$$

Les signaux utiles utilisés (*BPSK*) sont non circulaires, si l'on veut éliminer toutes les nuisances circulaires, on utilisera pour $k(t)$ le conjugué de $x(t)$ ainsi :

$$k(t) = x(t)^* \quad (27)$$

Nous reprenons le modèle de la forme $x = As$:

$$k(t) = A^* s(t)^* \quad (28)$$

On considère que la matrice A peut se décomposer en valeurs singulières et on peut écrire A^* sous la forme :

$$A^* = U^* \Sigma V^* \quad (29)$$

La matrice de corrélation des signaux peut se mettre sous la forme :

$$R_x = E [x(t)x(t)^H] = U\Sigma^2 U^H \quad (30)$$

La matrice de corrélation du jeu de données que l'on a formé $k(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$R_k = E [k(t)k(t)^H] = E [x(t)^* k(t)^T] = U^* \Sigma^2 U^T \quad (31)$$

On passe d'abord par l'écriture blanchie des deux jeux de données.

$$\Xi_x = R_x^{-1/2} x = \Sigma^{-1} U^H x = Vs(t) \quad (32)$$

$$\Xi_k = R_k^{-1/2} k = \Sigma^{-1} U^T x = V^* s^*(t)$$

avec :

$$R_x^{-1/2} = \Sigma^{-1}U^H \quad (33)$$

et

$$R_k^{-1/2} = \Sigma^{-1}U^T \quad (34)$$

On a donc :

$$E [\Xi_x \Xi_k^H] = VE[ss^T]V^T \quad (35)$$

La matrice $E[ss^T]$ ne contient que les informations sur les signaux non circulaires. La décomposition en valeurs singulières de $E[ss^T]$ permet donc d'estimer V et donc de retrouver uniquement les signaux non-circulaires du mélange.

L'estimation de V permet de former la matrice de mélange estimée \hat{A} de la forme :

$$\hat{A} = R_x^{1/2}V \quad (36)$$

Cette recherche de la matrice de mélange peut être qualifiée de recherche en *aveugle* car aucune information a priori sur la forme de l'antenne, le milieu de propagation ou encore sur les signaux ne sont nécessaires pour l'obtention du filtre. Seule la circularité des signaux de nuisances est nécessaire au bon fonctionnement de cet algorithme [3].

L'application de cet algorithme au cas d'une antenne OLS a fait l'objet d'un brevet déposé en collaboration avec Thomson-CSF.

3 Résultats

3.1 Antenne Adaptative

L'antenne utilisée est de type *OLS*, on peut ainsi obtenir une voie principale et deux voies auxiliaires déjà préformées. En effet, pour la surveillance de certaines zones particulières de l'espace, on utilise ce type d'antenne qui permet de concentrer dans sa voie principale, l'information sur le signal utile tout en surveillant des zones susceptibles de contenir les informations de brouillage.

Si l'on considère la coupe pour un gisement nul alors la voie principale et la voie auxiliaire prennent la forme suivante présentée sur la figure 1. Nous constatons ainsi que la voie principale présente un plateau entre 0° et 1° (en site) vers 3 à 4 dB et la voie auxiliaire présente des remontées toujours entre les mêmes valeurs en site.

Les résultats que nous présentons dans cette partie concernent les antennes de type *OLS*. Le scénario de brouillage est le suivant :

- **1 signal utile** situé à 0° en site et en gisement et de niveau égal à $20dB$.
- **2 brouilleurs gaussiens** situés l'un à 0° en site et 1.5° en gisement et de niveau égal à $20dB$ et l'autre à 1.7° en site et 0° en gisement et de niveau égal à $20dB$.
- **bruit gaussien** de niveau égal à $0dB$.

Si l'on se réfère à la figure 1, on constate que le signal utile est situé au centre de la voie principale et que les deux brouilleurs sont quant à eux localisés au centre des

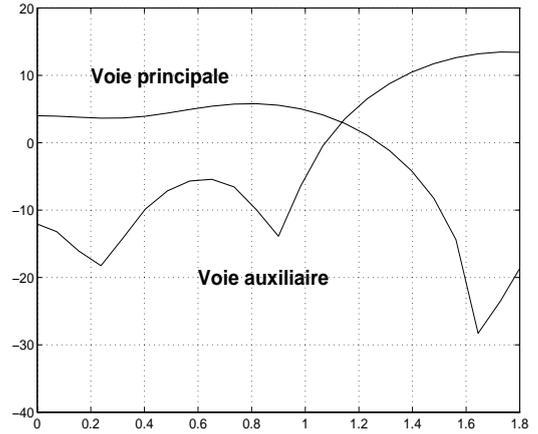


FIG. 1: Forme des voies

deux voies auxiliaires. Ce scénario est idéal pour le traitement classique d'antibrouillage. En effet le signal utile est très fortement présent dans la voie principale et pratiquement absent des voies auxiliaires, les performances du traitement classique pourront alors être comparables à celles de l'analyse en corrélation canonique.

3.2 Performances

Il est maintenant nécessaire d'étudier les performances de deux algorithmes (OLS classique et analyse en corrélation canonique) lorsque l'un des brouilleurs va se déplacer et que son rapport signal à parasites varie.

Evaluer les performances des différents algorithmes lorsqu'un des signaux est mobile consiste à :

- garder les deux premiers signaux donnés précédemment fixes.
- faire varier le dernier brouilleur situé initialement à 0° en gisement selon les sites décroissants (variation de 1.7° à 0° en site).

Le niveau du brouilleur initialement fixé à $20dB$ varie pour pouvoir atteindre $50dB$.

Traitement Classique OLS

Sur la figure 2, plusieurs éléments nous permettent de constater que :

- plus le brouilleur se rapproche du signal utile et plus le rapport signal à parasites devient faible.
- plus le niveau du brouilleur décroît et plus ce même rapport signal à parasites devient faible.

Ces deux phénomènes sont facilement explicables :

En ce qui concerne la diminution du signal à parasites lorsque le brouilleur se rapproche de l'utile. Ce phénomène est inévitable quelque soit le type de traitement que l'on va utiliser. Cette perte sur le *SINR* est prévisible : si l'on observe attentivement la figure 1, nous pourrions constater que le signal de brouillage entrera dans la voie principale à partir de 1° en site, et à partir de là le *SINR* suivra la forme de la voie auxiliaire.

Le deuxième phénomène est dû quant à lui à l'**auto-étouffement de l'utile**. En effet lorsque le niveau du

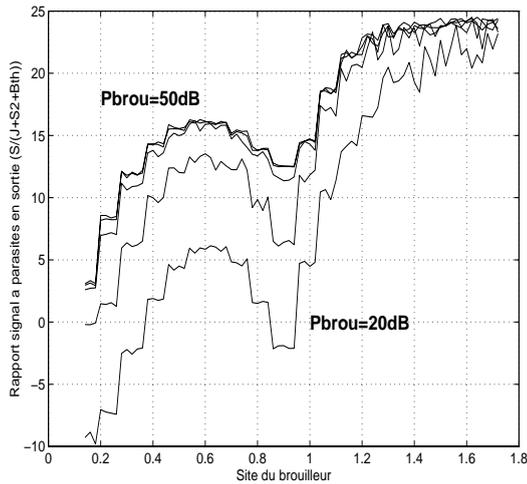


FIG. 2: Traitement OLS

signal de brouillage est faible, l'algorithme aura tendance à considérer le signal utile comme un brouilleur et donc à essayer de l'éliminer.

Corrélation Canonique

Si l'on s'intéresse maintenant à ce même rapport signal à parasites à la sortie du traitement par corrélation canonique, on peut constater sur la figure 3 que l'évolution de ce rapport ne dépend plus du niveau du brouilleur. Le phénomène d'auto-étouffement du signal utile a disparu. Quel que soit le niveau de ce brouilleur, le rapport signal à parasites ne dépend plus que de la forme de la voie auxiliaire.

4 Conclusion

Dans la mesure où l'on peut disposer d'une information spécifique sur les signaux utiles, il est possible d'utiliser des méthodes basées sur les statistiques d'ordre 2 moins coûteuses en temps de calcul que les statistiques d'ordre supérieur.

Dans le domaine des télécommunications spatiales, les signaux de type BPSK ont la particularité d'être non-circulaires, alors que les sources de nuisances (brouilleurs, bruit) sont de type gaussiens circulaires.

Nous avons donc examiné la meilleure méthode pour séparer les signaux et retrouver les sources d'intérêt.

Dans le cadre de la séparation de sources, la technique la plus appropriée est celle de l'analyse en corrélation canonique, alors que pour résoudre le problème de la localisation des sources, il est nécessaire de modifier et d'étendre les propriétés de l'algorithme MUSIC [4]. Les résultats obtenus montrent que cette méthode est performante notamment pour éviter le phénomène d'auto-étouffement du signal utile lors de l'utilisation de l'algorithme classique d'opposition par lobes secondaires.

Dans le cas d'une antenne de type OLS, les performances de l'analyse en corrélation canonique sont comparables à celles de l'algorithme JADE [2] utilisant les statistiques d'ordre supérieur [3].

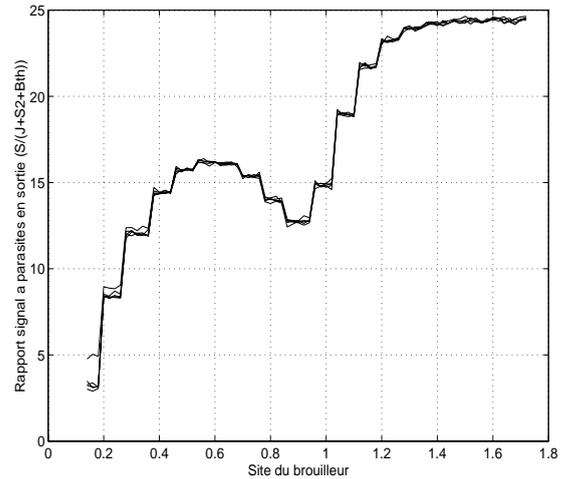


FIG. 3: Traitement ACC

5 Références

- [1] A. Belouchrani 'Séparation autodidacte de sources : algorithmes, performances et applications à des signaux expérimentaux', Thèse ENST Paris, 1995.
- [2] J.F. Cardoso and A. Souloumiac 'An Efficient Technique for Blind Separation of Complex Source', Proceedings IEEE SP Workshop on Higher-Order Statistics, Lake Tahoe USA Juillet 1993, pp: 275-279.
- [3] J. Galy 'Antenne adaptative: du second ordre aux ordres supérieurs. Applications aux signaux de télécommunications', Thèse Université Paul Sabatier Toulouse, Avril 1998.
- [4] P. Gounon, C. Adnet, J. Galy 'Localisation angulaire de signaux non circulaires.' Revue Traitement Du Signal, Juin 1998, vol 15, n° 1.