Polyspectres de signaux markoviens

Bernard PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France
picinbono@lss.supelec.fr

Résumé – Les signaux markoviens jouent un grand rôle en traitement du signal pour des raisons à la fois physiques et mathématiques. Lorsque ces signaux sont obtenus à partir d'une récurrence non linéaire le calcul des moments d'ordre supérieur à deux nécessite que les instants soient pris dans un ordre croissant. Des exemples de cette propriété sont présentés et l'on examine sa conséquence pour le calcul des polyspectres. On étudie tout particulièrement la valeur de la densité sur les multiplicités normales qui permet de faire le lien entre spectres des moments et des cumulants.

Abstract – Markovian signals play an important role in signal processing both for physical and mathematical reasons. When these signals are obtained by a nonlinear recursion the calculation of moments of an order higher than two requires that the times instants are put in an increasing order. This ordering property is discussed in some examples and its consequence for the calculation of polyspectra is analyzed. A particular attention is devoted to the structure of the density on the normal manifolds of the frequency space.

1 Introduction

Les modèles markoviens jouent un très grand rôle dans de nombreuses questions de traitement du signal pour des raisons à la fois physiques et mathématiques. Du point de vue physique la propriété de Markov s'introduit naturellement dans la modélisation des signaux comme sorties de certains systèmes causaux attaqués par du bruit blanc. Du point de vue mathématique cette propriété qui est caractérisée par l'indépendance du passé et du futur conditionnellement au présent, simplifie de nombreux calculs qui sont souvent inextricables sans elle. Dans le cas linéaire on sait que la propriété de Markov entraîne que la fonction de corrélation est de forme exponentielle. C'est en particulier ce qui se produit pour les signaux stationnaires gaussiens-markoviens. Par ailleurs les polyspectres possèdent une propriété bien connue de factorisation commune à tous les signaux pouvant être modélisés comme sortie d'un filtre linéaire attaqué par du bruit blanc. Ces propriétés disparaissent dans le cas des modèles non linéaires et le but de cet exposé consiste à présenter et à discuter quelques résultats concernant certains signaux markoviens et tout particulièrement la forme de leurs moments d'ordre supérieur et la structure de certains polyspectres. Les calculs étant souvent assez complexes, ils ne seront pas tous présentés en détail et feront l'objet d'une publication ultérieure plus complète. Dans toute la suite les signaux considérés notés $x(t)$ ou x_t sont des signaux aléatoires réels, stationnaires, à temps discret, ce qui signifie que la variable t est un nombre entier. D'autre part on restreint l'analyse au cas des signaux markoviens d'ordre 1, définis à partir d'une récurrence du type $x_t = f(x_{t-1}, u_t)$, où u_t est un bruit blanc au sens strict, c'est à dire une suite de variables aléatoires (VA) indépendantes et identiquement distribuées (IID). Si la fonction $f(x,u)$ est du type $ax+u$ le signal x_k est autorégressif d'ordre 1, et toutes ses propriétés statistiques sont bien connues. Dans le cas contraire le problème devient très complexe et on ne peut malheureusement pas le traiter dans toute sa généralité, car il faudrait d'abord établir des conditions sur $f(x,u)$ assurant que x_t est stationnaire et possède des moments finis. Faute d'une théorie complète, nous examinerons quelques exemples utiles en modélisation et permettant de découvrir certaines structures générales qu'il n'est pas possible de développer ici.

2 Modèles statistiques

2.1 Signal télégraphique

Le signal télégraphique (ST) est introduit dans la plupart des ouvrages sur les signaux aléatoires (voir p. 168 de [1]). Il est en général étudié dans le cas du temps continu et comme il est construit à partir d'un processus de Poisson, on le dénomme aussi fréquemment le basculeur poissonnien. À temps discret il est caractérisé par la récurrence non linéaire $x_i = u_i x_{i-1}$ où les VA u_i sont IID et ne prennent que les valeurs 1 ou -1 avec les probabilités respectives p et $1-p$. Si x_i ne prend que les valeurs ± 1 avec des probabilités égales, il en est de même pour toutes les autres VA x_{i+k}, ce qui assure la stationnarité du signal. D'un point de vue physique le signal x_i peut basculer à chaque instant de sa valeur à la valeur opposée avec la probabilité $1-p$.

La propriété fondamentale des VA x_i et u_i est $u_i^2 = x_i^2 = 1$, ce qui rend très simple les calculs de moments. Par ailleurs on déduit de la récurrence de départ que

$$x_{i+k} = u_{i+1} u_{i+2} \dots u_{i+k} x_i. \quad (1)$$

Il en résulte que $\gamma_k = E(x_i x_{i+k}) = [E(u_i)]^k = a^k$, avec $a = 2p-1$. Ceci définit la fonction de corrélation complète puisqu'elle est paire. Ainsi, comme le signal autorégressif d'ordre 1, le ST possède une fonction de corrélation de type exponentiel. Il convient de noter que la quantité a est comprise entre -1 et $+1$, comme on le voit sur sa définition. Lorsque $a < 0$ la fonction de corrélation a un comportement à la fois exponentiel et oscillatoire, ce qui ne peut se produire dans le cas du temps continu. Enfin pour $a = -1$, c'est à dire pour $p = 0$, le signal devient une suite alternée périodique de valeurs opposées.

Il est évident que tous les moments d'ordre impair sont nuls puisqu'ils contiennent un terme en $E(x_i^{2k+1})$ qui vaut 0. Considérons alors le moment d'ordre 4. Pour ceci soit 3 entiers positifs ou nuls k, l, m. On peut alors écrire

$$x_i x_{i+k} x_{i+k+l} x_{i+k+l+m} = x_i^4 \times \prod_{j=1}^{k} u_{i+j}^3 \prod_{j=1}^{l} u_{i+k+j}^2 \prod_{j=1}^{m} u_{i+k+l+j} \, . \quad (2)$$

Il résulte des propriétés indiquées ci-dessus que le moment $E[x_i x_{i+k} x_{i+k+l} x_{i+k+l+m}]$ vaut $a^k a^m$. Ceci permet d'écrire l'expression générale du moment d'ordre 4 sous la forme

$$E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3), \quad (3)$$

où les instants θ_i constituent la permutation ordonnée des instants t_i, définie par $\theta_i \leq \theta_{i+1}$ et $\gamma(.)$ est la fonction de corrélation. Cette formule s'étend sans peine à tous les ordres pairs.

2.2 Signal à sauts aléatoires

C'est un signal défini par la récurrence non linéaire $x_i = u_i x_{i-1} + (1 - u_i)v_i$. Dans cette équation u_i est une VA de pile ou face prenant les valeurs 1 ou 0 avec les probabilités respectives p et $1-p$, et v_i est une VA quelconque centrée de moment m_k. Les VA u et v sont évidemment indépendantes. Cette relation signifie que x_i soit conserve sa valeur avec la probabilité p, soit prend une nouvelle valeur v_i indépendante du passé avec la probabilité $1 - p$.

Ce signal est la modélisation la plus simple possible de sauts aléatoires employés fréquemment pour représenter l'évolution de systèmes dont les paramètres peuvent subir des fluctuations brusques et imprévisibles.

Pour calculer le moment d'ordre 2, considérons 2 instants i et $i + k$ où k est positif. Il résulte de la structure du signal que $x_i = x_{i+k}$ si toutes les VA u_{i+l}, $1 \leq l \leq k$, valent 1 et dans le cas contraire x_i et x_{i+k} sont des VA indépendantes. On a donc $E[x_i x_{i+k}] = p^k$, ce qui prouve que, comme dans le cas précédent, la fonction de corrélation est de forme exponentielle. Par contre elle ne peut avoir de comportement oscillatoire. En faisant exactement le même raisonnement on trouve que le moment d'ordre 3 peut s'écrire

$$E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)] = m_3 p^{(\theta_3 - \theta_1)}, \quad (4)$$

où les instants θ_i sont définis comme ci-dessus par la permutation ordonnée des 3 instants t_i. On voit donc que ce moment d'ordre 3 est nul si les VA v_i caractérisant les sauts aléatoires ont des moments d'ordre 3 nuls.

Passons maintenant au calcul des moments d'ordre 4. Pour ceci posons $X = x_i x_{i+k} x_{i+l} x_{i+m}$, où k, l et m sont des entiers positifs classés par ordre croissant. Posons également

$$A = \prod_{j=1}^{k} u_{i+j} \; ; \; B = \prod_{j=1}^{l-k} u_{i+k+j} \; ; \; C = \prod_{j=1}^{m-l} u_{i+l+j} \, . \quad (5)$$

Ces quantités sont des VA indépendantes ne prenant que les valeurs 0 ou 1 et les probabilités respectives de 1 valent p^k, p^{l-k} et p^{m-l}. Les VA x_j étant centrées, les seuls termes contribuant à l'espérance de X apparaissent si les 4 VA contribuant au produit définissant X sont égales ou s'il y a 2 paires égales. Le premier cas se produit si $A = B = C = 1$ et le second si $A = C = 1$ et $B = 0$. On en déduit que l'espérance de X vaut

$$E(X) = m_2^2 p^k p^{(m-l)} + (m_4 - m_2^2)p^m. \quad (6)$$

Reprenant alors les notations générales introduites ci-dessus on déduit que le moment d'ordre 4 du signal considéré vaut

$$E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) + (m_4 - m_2^2)p^{(\theta_4 - \theta_1)}. \quad (7)$$

2.3 Promenade aléatoire stationnaire

La promenade aléatoire est le plus simple exemple possible de processus markovien. Mais elle n'est pas stationnaire et l'on ne peut donc pas parler de quantités spectrales. Nous allons construire un exemple de promenade aléatoire dans laquelle la stationnarité est obtenue par des retours aléatoires forcés à la valeur 0. Soit donc x_i le signal défini par la récurrence non linéaire

$$x_i = u_i^2 x_{i-1} + u_i \, , \quad (8)$$

où les u_i sont des VA IID prenant les valeurs $+1$, -1 et 0 avec les probabilités respectives $p/2$, $p/2$ et $1 - p$. Il en résulte que $v_i = u_i^2$ ne prend que les valeurs 0 ou 1 avec les probabilités $1 - p$ et p. De plus on a $v_i^m = v_i$ et $u_i^{2k+1} = u_i$. On suppose que x_i ne prend que des valeurs entières. On voit donc l'interprétation physique de la récurrence. Si $x_{i-1} = m$, x_i peut prendre les valeurs $m + 1$ ou $m - 1$ avec la même probabilité $p/2$ ou la valeur 0 avec la probabilité $q = 1 - p$. C'est ce retour à la valeur 0 qui rend impossible la diffusion correspondant à une marche aléatoire traditionnelle et va donc pouvoir assurer la stationnarité.

Pour examiner ce point on commence par étudier les moments à un seul instant. On déduit de (8) que $E(x_i) = pE(x_{i-1})$. Si donc x_i est centré à un instant, il l'est à tous les autres, ce que l'on admet dans la suite. De même en élevant (8) au carré on obtient $E(x_i^2) = pE(x_{i-1}^2) + p$. Si donc $E(x_i^2) = p/q$, cette valeur se retrouve à tous les instants, ce que l'on admet également. Par le même raisonnement on trouve que si $E(x_i^3) = 0$ et si $E(x_i^4) = (p/q)[1+6p/q]$, ces valeurs se conservent dans le temps. On admet donc qu'à un instant origine arbitraire 0 x_0 est une VA centrée dont les 4 premiers moments sont $m_0 = m_3 = 0$, $m_2 = p/q$ et $m_4 = (p/q)[1+6p/q]$. Il est facile de vérifier que ces quantités satisfont les conditions nécessaires pour être des moments de VA.

Pour calculer les moments à des instants différents on part de (8) qui permet d'écrire

$$x_k = x_0 v_1 v_2 ... v_k + u_1 v_2 v_3 ... v_k + ... + u_{k-1} v_k + u_k \,. \quad (9)$$

Les VA u_i étant indépendantes de x_0 et les u_i étant des VA centrées, on voit que $E[x_0 x_k] = m_2 p^k$. Ainsi, comme dans les exemples précédents, la fonction de corrélation est de type exponentiel. Appliquant la formule (9) pour k et l, avec $0 < k < l$, on voit aisément que le moment $E[x_0 x_k x_l] = 0$.

Il reste maintenant à calculer le moment d'ordre 4 $E[x_0\ x_k x_l x_m]$, avec $0 < k < l < m$. On écrit alors 3 fois l'équation (9) pour k, l, m. Quand on fait le produit des 4 termes $x_0 x_k x_l x_m$ on obtient une somme de termes qui contiennent tous en facteur x_0. Il n'y a qu'un seul terme contenant x_0^4 qui vaut $x_0^4 v_1 v_2 ... v_m$. Compte tenu des propriétés des VA v_i, sa moyenne vaut $m_4 p^m$. Les termes contenant x_0^3 et x_0 ont une moyenne nulle. Il ne reste donc qu'à étudier les termes contenant x_0^2. Il y a 3 types de tels termes selon que x_0 provient de x_k, x_l ou x_m. En utilisant le fait que les VA u_i sont centrées et après des calculs élémentaires mais qu'il n'est pas possible de détailler ici on peut mettre l'expression du moment du quatrième ordre sous la forme

$$E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] = (p/q)\gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) + \\ (p/q)^3 p^{(\theta_4-\theta_2)} + p^{(\theta_4-\theta_1)}[2(\theta_2 - \theta_1) + 6(p/q) - 1], \quad (10)$$

où les θ_i sont définis après (3).

2.4 Discussion

Les trois signaux qui viennent d'être étudiés possèdent des analogies et des différences. Tout d'abord il est évident qu'ils sont tous non linéairement markoviens d'ordre 1. Ceci provient tout simplement de leur définition à partir d'une récurrence temporelle d'ordre 1. Par ailleurs ils ont tous la même fonction de corrélation qui est de type exponentiel. Ce sont donc des signaux très différents, comme on le voit simplement sur leurs trajectoires, mais qui ne peuvent être distingués par des méthodes du second ordre. Ceci justifie l'usage de moments d'ordre supérieur à 2.

Le point fondamental qui est d'ailleurs une conséquence immédiate de la propriété markovienne est que ce sont des *signaux ordonnés* [2][3]. Ceci signifie que l'expression explicite de leurs moments d'ordre supérieur à 2 nécessite que les instants soient classés dans un ordre croissant. Bien entendu la symétrie des moments permet de les connaître entièrement dès lors que leur valeur pour la permutation ordonnée est connue. Par ailleurs tous les moments d'ordre 4 font apparaître le terme $\gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3)$ qui d'ailleurs est le seul à exister dans le cas du signal télégraphique.

On peut noter à ce stade que pour ces signaux il est beaucoup plus commode d'obtenir la formule des moments que celle des cumulants, ce qui constitue une différence notable avec le cas linéaire où l'expression des cumulants est très simple à obtenir. Il existe en effet une formule assez complexe permettant de passer des moments aux cumulants [4]. Dans le cas d'ordre 4 qui est le seul utilisé ici, cette formule revient à retrancher du moment du signal le moment d'un signal normal ayant la même fonction de corrélation. Ainsi le cumulant d'ordre 4 associé à (4) comportera deux termes, et cela devient beaucoup plus compliqué aux ordres plus élevés.

Nous allons maintenant examiner comment peuvent se calculer les polyspectres, ce qui conduit à étudier la relation entre transformation de Fourier et signaux ordonnés.

3 Calcul de polyspectres

On appelle moment spectral la TF du moment temporel $m(\mathbf{t}) = E[x(t_1)x(t_2)...x(t_n)]$. Il est donc défini dans le cas d'ordre 4 par la relation

$$M(\mathbf{f}) = \sum_{t_1}\sum_{t_2}\sum_{t_3}\sum_{t_4} m(\mathbf{t}) \exp(-2\pi j \mathbf{f}^T \mathbf{t}). \quad (11)$$

Nous allons calculer cette quantité dans le cas du moment d'ordre 4 du ST donné par (4), ce terme étant le plus important et se retrouvant dans tous les autres moments des signaux introduits.

D'une manière plus précise il est bien connu que $M(\mathbf{f})$ est nul en dehors de la multiplicité stationnaire (MS) définie par $\sum f_i = 0$. Mais il importe de savoir s'il est borné sur cette multiplicité ou s'il y a des distributions sur d'autres sous-multiplicités. Les plus importantes sont les mutiplicités normales (MN) dont la première est définie par les relations $f_1 + f_2 = f_3 + f_4 = 0$ (voir p. 115 de [1]).

La grande différence entre le cas continu et le cas discret que l'on trouve déjà dans le calcul de la densité spectrale est qu'il faut faire une nette distinction dans les termes de (11) entre ceux correspondant à des t_i tous distincts et ceux provenant du cas où certains t_i sont égaux.

Le cas où tous les t_i sont distincts se traite exactement de la même manière que pour les signaux ordonnés à temps continu [2][3]. La contribution de ces termes au moment spectral est alors une somme de termes du type $S_P(\{\mu_i\})$, où les fréquences μ_i se déduisent des fréquences f_k par la permutation P. La somme doit être étendue aux 24 permutations de ces fréquences. Le terme $S_P(\{\mu_i\})$ peut s'écrire sous la forme $S_P(\{\mu_i\}) =$

$$(1/2)\Gamma_+(\mu_2)\Gamma_+(\mu_4)\delta(\mu_1+\mu_2)\delta(\mu_3+\mu_4) - A(\{\mu_i\})\delta(\sum f_i), \quad (12)$$

où $\Gamma_+(\mu)$ est la TF monolatérale de la fonction de corrélation, soit

$$\Gamma_+(\mu) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma[k] \exp(-2\pi j \mu k). \quad (13)$$

Il est évident que le premier terme de (12) correspond à une distribution sur une MN. Quant au terme $A(\{\mu_i\})$ de (12) il peut s'écrire

$$A(\{\mu_i\}) = (1/2)\Gamma_+(-\mu_1)\Gamma_+(\mu_4)[V(\mu_1 + \mu_2) + 1], \quad (14)$$

où $V(\mu)$ est la fonction $\mathrm{cotg}(\pi\nu)$, analogue à la distribution en valeur principale apparaissant dans le cas du temps continu. Il faut maintenant faire la somme des 24 termes analogues à (12), correspondant aux 24 permutations des 4 fréquences f_i. En utilisant une méthode développée par ailleurs [3], on trouve alors que la contribution de cette somme à la première MN introduite ci-dessus vaut

$$C_1 = [\Gamma_+(f_1) + \Gamma_+(f_2)][\Gamma_+(f_3) + \Gamma_+(f_4)]. \quad (15)$$

Mais il importe de l'écrire au moyen de la densité spectrale définie à partir de (13) par

$$\Gamma(f) = \Gamma_+(f) + \Gamma_+^*(f) + 1. \tag{16}$$

En notant que $\Gamma_+(-f) = \Gamma_+^*(f)$, on obtient finalement que C_1 peut se mettre sous la forme

$$C_1 = \Gamma(f_1)\Gamma(f_3) - \Gamma(f_1) - \Gamma(f_3) + 1. \tag{17}$$

Considérons maintenant le cas où 3 instants t_i seulement sont distincts, soit par exemple $t_1 = t_2$. Ceci donne une contribution à (11) qui peut s'écrire

$$T_3 = \sum_{t_1} \sum_{t_3} \sum_{t_4} m(\mathbf{t}) \exp\{-2\pi j[(f_1+f_2)t_1 + f_3 t_3 + f_4 t_4]\}. \tag{18}$$

La somme doit être prise sur tous les t_i, à la condition qu'ils soient distincts. Par des calculs élémentaires on trouve alors que

$$T_3 = [\Gamma(f_4) - 1]\delta(f_1+f_2)\delta(f_3+f_4) - [\Gamma(f_4) - 1]\delta(\sum f_i). \tag{19}$$

Il y a 6 termes de ce type correspondant à tous les couplages différents de 2 instants t_i et t_j pris parmi les 4 instants t_1, t_2, t_3 et t_4. Il est clair que le denier terme de (19) est borné sur la MS alors que le premier correspond à une distribution sur la première MN. Comme il y a 3 MN, chacune d'elle comportera une contribution de deux termes tels que le premier terme de (19). Ainsi le couplage $t_3 = t_4$ induit une distribution sur la première MN valant $\Gamma(f_2) - 1$. Comme la densité spectrale est une fonction paire on déduit que le couplage de deux instants entraîne sur la première MN une densité

$$C_2 = \Gamma(f_1) + \Gamma(f_3) - 2. \tag{20}$$

Il faut maintenant considérer le cas du couplage de 3 instants t_i. Si l'on considère la fonction $\gamma(t_2 - t_1)\gamma(t_4 - t_3)$ on voit qu'un couplage du type $t_1 = t_2, t_3 = t_4$ donnera $\gamma(0) = 1$. Ceci donne par TF une contribution sur la première MN avec une densité 1. Par contre tous les autres couplages donnent des contributions qui sont bornée sur la MS.

Réunissant toutes les contributions qui viennent d'être calculées on voit alors que la densité sur la première MN vaut $\Gamma(f_1)\Gamma(f_3)$. C'est ce qu'on appelle une *densité normale*. Bien entendu le même résultat peut être obtenu pour les 2 autres multiplicités normales.

4 Quelques conclusions

Nous n'avons fait que présenter le principe de calculs qui sont assez laborieux en raison du très grand nombre de termes liés aux $n!$ permutations apparaissant dans les TF de signaux ordonnés. Il est plus intéressant de dégager quelques conclusions générales que l'on obtient pour le bispectre et le trispectre, et leurs extensions aux ordres supérieurs.

Le bispectre s'obtient par TF du moment d'ordre 3. Par ailleurs moments et cumulants sont égaux à cet ordre si le signal est centré. Le seul exemple d'un tel moment est donné par (4). Le calcul de la TF ne présente pas de difficulté et le résultat le plus marquant par rapport à la formule connue dans le cas linéaire est qu'il n'y a plus de factorisation du bispectre. En conséquence le signal à sauts aléatoires ne peut pas être modélisé comme la sortie d'un filtre linéaire attaqué par un bruit blanc.

On peut montrer qu'il en est de même pour les deux autres signaux, la démonstration se faisant en utilisant les moments d'ordre 4 puisque ceux d'ordre 3 sont nuls. Ceci est une importante différence avec les propriétés du second ordre puisque tous les signaux de même fonction de corrélation possèdent la même factorisation qui ici se déduira de la fonction de corrélation exponentielle. Il s'agit évidemment de la factorisation rencontrée dans le cas des signaux autorégressifs d'ordre 1.

Tous les signaux considérés ont un moment spectral d'ordre 4 introduisant une densité normale sur les MN. Ceci est important pour le calcul des spectres de cumulants. En effet comme à cet ordre le passage des moments aux cumulants consiste à retrancher la contribution normale, on voit que les moments spectraux des cumulants auront une densité nulle sur les multiplicités normales. C'est un de leurs principaux avantages, et il est donc important de vérifier que cette propriété qui n'est pas toujours réalisée l'est bien pour les signaux considérés ici.

Cette propriété a une relation importante avec les questions d'ergodisme pour les signaux et l'existence d'une densité normale sur les multiplicités normales est une condition d'ergodisme pour la mesure expérimentale des moments d'ordre supérieurs [5].

Enfin on peut rappeler que l'existence d'une densité normale sur les multiplicités normales est une condition permettant d'assurer la validité du théorème de la limite centrale. D'une manière plus précise ceci signifie que si l'on fait passer un signal non normal dans un filtre linéaire dont la largeur de bande est très petite devant celle du signal d'entrée, la sortie convenablement normalisée tend à devenir un signal normal. Ce résultat est souvent invoqué pour affirmer le caractère normal de signaux obtenus par filtrage de signaux à corrélation microscopique [6].

Références

[1] B. Picinbono, *Signaux aléatoires, fonctions aléatoires et modèles*, Dunod, Paris, 1994.

[2] B. Picinbono, Signaux ordonnés et trispectre, *Colloque GRETSI*, p. 973-976, 1997.

[3] B. Picinbono, Polyspectra of ordered signals, à paraître dans *IEEE Trans. Information Theory.*

[4] D. Brillinger, *Time series analysis, data analysis and theory*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New-York, 1975.

[5] B. Picinbono, Ergodicity and fourth-order spectral moments, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 43, pp. 1273-1276, 1997.

[6] B. Picinbono, Sur certains problèmes concernant la détection des signaux faibles, *Annales Télécommunications*, 16, pp. 2-27, 1961.