

# Reconstruction du spectre directionnel de la houle\*

Philippe DE LARMINAT<sup>1</sup>, Éric LE CARPENTIER<sup>1</sup>, Alain CHAPEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes, UMR CNRS 6597 – École Centrale de Nantes  
BP 92101, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 03, France

<sup>2</sup>SIREHNA

1 rue de la Noë, BP 42105, 44321 Nantes Cedex 03, France

Philippe.De-Larminat@ircyn.ec-nantes.fr, Eric.Lecarpentier@ircyn.ec-nantes.fr,  
sirehna@sirehna.ec-nantes.fr

**Résumé** – Cette étude consiste en l’élaboration d’une procédure d’estimation du spectre directionnel de la houle, à partir des mesures de mouvement (tangage, roulis, lacet, pilonnement, embardée, cavalement) d’un navire se déplaçant en translation rectiligne uniforme. La connaissance de cet état de mer absolu doit permettre d’élaborer des lois de commande adaptatives pour la tranquillisation du navire, ainsi que d’utiliser celui-ci comme bouée de mesures océanographiques. Cependant, cette étude est menée dans le contexte de la boucle ouverte, c’est-à-dire que l’information obtenue sur l’état de la mer n’est pas utilisée en vue de la tranquillisation du navire. On propose une modélisation du système à l’aide d’une représentation dans l’espace d’état, suivie d’une procédure d’identification des paramètres de spectres directionnels paramétriques.

**Abstract** – This study deals with the development of an estimation algorithm for directional wave spectrum, by means of the motion data (pitch, roll, yaw, surge, sway, heave) of a ship with constant advancing speed. This wave state knowledge can be used in development of adaptive control law for ship stillness, or in use of ships as oceanographic wave buoys. Nevertheless, this study is derived in an open loop context, that is to say that information about wave spectrum is not used for ship stillness. A state space representation of the process is proposed; an identification procedure for parametric directional spectra is used.

## 1 Introduction

La houle marine peut être décrite par un spectre directionnel  $S(\Omega, \beta)$ , où  $\Omega$  est la pulsation et  $\beta$  la direction d’arrivée, unimodal ou multimodal, chaque mode étant centré autour d’une pulsation et d’une direction d’arrivée dominantes. Il s’agit ici de reconstruire ce spectre connaissant les mouvements du centre de gravité du navire autour de la trajectoire nominale (cavalement, embardée, pilonnement) ainsi que son attitude (roulis, tangage, lacet). Pour un navire à l’arrêt, ou pour des bouées fixes, il a été proposé d’utiliser la méthode du maximum de vraisemblance de Capon [1], ce qui est difficilement applicable à un navire en marche. D’autre part, la répartition tant en pulsation qu’en angle d’arrivée qui donne des signaux à large bande, ainsi que la topologie des capteurs imposée ne permet pas d’utiliser les techniques classiques de traitement d’antenne (cf [2] pour un panorama).

On propose ici de décomposer le spectre de houle en un certain nombre de composantes élémentaires, ce qui conduit à une modélisation par représentation d’état de grande dimension. Cette modélisation fournit à la fois un simulateur des signaux enregistrés à partir d’un spectre houle donné, ainsi qu’un estimateur du spectre de houle connaissant ces signaux.

## 2 Caractérisation de l’état de mer

Le modèle le plus simple de la houle consiste à la considérer comme une onde plane monochromatique. La surface de la mer est supposée plane, et repérée à l’aide d’un repère cartésien. Le déplacement  $h$  de la surface de la mer au point  $r$  et à l’instant  $t$  s’écrit :

$$h(r, t) = a \cos(\Omega t - k^T r + \phi) \quad (1)$$

où  $a > 0$  est l’amplitude,  $\phi$  la phase initiale,  $\Omega > 0$  la pulsation, et  $k$  le nombre d’onde orthogonal aux plans d’onde dans le sens de propagation. Pour une houle en eaux profondes, la pulsation et le nombre d’onde sont liés par la relation  $\|k\| = \Omega^2/g$ , où  $g$  est l’accélération de la pesanteur. La houle est donc parfaitement décrite par sa puissance  $p = a^2/2$ , sa pulsation  $\Omega$ , et l’angle d’arrivée  $\beta$  par rapport à une direction de référence. En pratique, la houle n’est pas purement monochromatique. Elle peut être caractérisée par le spectre directionnel  $S$ , où  $S(\Omega, \beta) d\Omega d\beta$  désigne la contribution en puissance d’une houle élémentaire centrée autour de  $\Omega$  et  $\beta$ . La puissance de la houle est alors :

$$p = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{+\infty} S(\Omega, \beta) d\Omega d\beta \quad (2)$$

De nombreuses formes paramétriques du spectre directionnel existent dans la littérature [3]. La plus simple s’exprime par :

$$S(\Omega, \beta) = \begin{cases} \frac{10p}{\pi} \left(\frac{\Omega_{\max}}{\Omega}\right)^5 \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\Omega_{\max}}{\Omega}\right)^4\right] \times \\ \cos^2(\beta - \beta_{\max}) & \text{si } |\beta - \beta_{\max}| < \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

\*Étude dans le cadre du projet EUREKA Hullmos, EU 1765

où  $(\Omega_{\max}, \beta_{\max})$  est le point qui maximise le spectre directionnel.

Soit un navire se déplaçant parallèlement à son grand axe avec le vecteur vitesse  $v$ , d'angle  $\beta_0$  par rapport à la direction de référence. Sa trajectoire suit l'équation  $r(t) = r(0) + vt$ . Le déplacement vertical  $z$  dû à une houle monochromatique de pulsation  $\Omega$  et d'angle  $\beta$  est alors, en raison de l'effet Doppler, en définissant la pulsation de référence  $\Omega_0 = g/\|v\|$ , une sinusoïde d'amplitude  $a$  et de pulsation  $\omega$ , dite pulsation de rencontre, définie par :

$$\omega(\Omega, \beta) = \Omega \left| 1 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \cos(\beta - \beta_0) \right| \quad (4)$$

Le navire est équipé de  $c$  capteurs ( $c = 6$  dans notre étude), de transmittance connue et tabulée  $H$  : pour toute vitesse d'avance  $v$ , et pour tout  $\Omega$  et  $\beta$ ,  $H(\Omega, \beta)$  est un vecteur complexe à  $c$  lignes donnant le gain et le déphasage du vecteur de sortie  $y$  par rapport à la houle monochromatique de rencontre  $z$  (on omet dans les notations la dépendance en  $v$  qui est considérée comme une constante du problème).

### 3 Modélisation et simulation

Cette partie est consacrée au développement d'un outil de simulation : connaissant le spectre directionnel  $S$  de la houle, il s'agit de synthétiser les signaux  $y$  mesurés sur les capteurs.

#### 3.1 En temps continu

Pour une houle distribuée de spectre directionnel  $S$ , on pave le plan  $(\Omega, \beta)$  en rectangles de largeurs  $\delta\Omega$  et  $\delta\beta$ , de centre  $(\Omega_i, \beta_\ell)$ , sur lesquels on suppose que le spectre est constant, ainsi que la transmittance des capteurs. La contribution du rectangle de centre  $(\Omega_i, \beta_\ell)$  est une houle bande étroite  $z_{i\ell}$  de pulsation de rencontre centrale  $\omega_{i\ell} = \omega(\Omega_i, \beta_\ell)$ , de puissance  $p_{i\ell} = S(\Omega_i, \beta_\ell) \delta\Omega \delta\beta$ , et la réponse des capteurs, dont la fonction de transfert vaut  $H_{i\ell} = H(\Omega_i, \beta_\ell)$ , à cette houle élémentaire est notée  $y_{i\ell}$ . La réponse des capteurs est alors la somme de ces contributions élémentaires :

$$y(t) = \sum_{i,\ell} y_{i\ell}(t) \quad (5)$$

Une solution consiste à prendre, pour chaque contribution élémentaire, une représentation d'état de la forme suivante, où l'état  $x_{i\ell}$  contient  $z_{i\ell}$  et la composante en quadrature  $\zeta_{i\ell}$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_{i\ell}(t) = A_{i\ell} x_{i\ell}(t) + v_{i\ell}(t) \\ y_{i\ell}(t) = C_{i\ell} x_{i\ell}(t) \end{cases} \quad (6)$$

où  $v_{i\ell}$  est une séquence blanche de spectre  $\frac{1}{2\pi} Q_{i\ell}$ , et où les matrices impliquées dans cette représentation valent :

$$A_{i\ell} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_{i\ell}}{2} & \omega_{i\ell} \\ -\omega_{i\ell} & -\frac{\Delta_{i\ell}}{2} \end{bmatrix} \quad C_{i\ell} = [\Re(H_{i\ell}) \quad \Im(H_{i\ell})] \quad (7)$$

$$Q_{i\ell} = p_{i\ell} \Delta_{i\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

On vérifie facilement que la matrice de covariance  $P_{i\ell}$  de l'état  $x_{i\ell}$ , solution de l'équation de Lyapounov  $A_{i\ell} P_{i\ell} + P_{i\ell} A_{i\ell}^T + Q_{i\ell} = 0$  vaut :

$$P_{i\ell} = p_{i\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\Delta_{i\ell}$  est la largeur de bande à -3 dB, qui doit être choisie de façon à s'adapter à la longueur de la projection du rectangle de largeurs  $\delta\Omega$  et  $\delta\beta$  centré sur  $(\Omega_i, \beta_\ell)$  sur l'axe des pulsations de rencontre. Elle doit être choisie ni trop petite (auquel cas le spectre de puissance des sorties capteurs serait un spectre de raies), ni trop grande (de façon à ne pas noyer l'effet du pavage du plan  $(\Omega, \beta)$ ). On propose ici de l'adapter à la longueur de la projection du pavé du plan  $(\Omega, \beta)$  centré sur  $(\Omega_i, \beta_\ell)$  de côtés  $\delta\Omega$  et  $\delta\beta$ . On prendra l'écart-type de la variable aléatoire  $\omega(\Omega, \beta)$  pour  $(\Omega, \beta)$  considéré comme un vecteur aléatoire uniformément réparti sur le pavé considéré.

#### 3.2 En temps discret

L'implantation en simulation impose l'échantillonnage de la représentation dans l'espace d'état ci-dessus. En notant  $t_e$  la période d'échantillonnage, et, pour toute fonction  $f$ , et tout entier  $k$ ,  $f[k] = f(k t_e)$ , on obtient, en intégrant l'équation différentielle régissant l'état :

$$x_{i\ell}[k+1] = \underbrace{e^{A_{i\ell} t_e}}_{F_{i\ell}} x_{i\ell}[k] + \underbrace{\int_0^{t_e} e^{A_{i\ell} \tau} v_{i\ell}((k+1)t_e - \tau) d\tau}_{w_{i\ell}[k]} \quad (10)$$

On obtient, par un calcul standard d'exponentielle de matrice, la représentation d'état à temps discret suivante :

$$\begin{cases} x_{i\ell}[k+1] = F_{i\ell} x_{i\ell}[k] + w_{i\ell}[k] \\ y_{i\ell}[k] = C_{i\ell} x_{i\ell}[k] \end{cases} \quad (11)$$

où  $w_{i\ell}$  est une séquence blanche de matrice de variance-covariance  $R_{i\ell} = P_{i\ell} - F_{i\ell} P_{i\ell} F_{i\ell}^T$ , et où les matrices impliquées dans cette représentation valent :

$$F_{i\ell} = e^{-\frac{\Delta_{i\ell} t_e}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_{i\ell} t_e) & \sin(\omega_{i\ell} t_e) \\ -\sin(\omega_{i\ell} t_e) & \cos(\omega_{i\ell} t_e) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$C_{i\ell} = [\Re(H_{i\ell}) \quad \Im(H_{i\ell})] \quad (13)$$

$$R_{i\ell} = (1 - e^{-\Delta_{i\ell} t_e}) p_{i\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

En concaténant les vecteurs d'état  $x_{i\ell}$  en un vecteur  $X$ , les vecteurs de bruit  $w_{i\ell}$  en un vecteur  $W$ , on obtient la représentation dans l'espace d'état suivante :

$$\begin{cases} X[k+1] = F X[k] + W[k] \\ y[k] = C X[k] \end{cases} \quad (15)$$

où les vecteurs d'état  $X$  et de bruit  $W$  valent :

$$X = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{i\ell} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} \vdots \\ w_{i\ell} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (16)$$

où les matrices de transition  $F$  (bloc diagonale) et d'observation  $C$  valent :

$$F = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & F_{i\ell} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad C = [\dots \quad C_{i\ell} \quad \dots] \quad (17)$$

et où les matrices de covariance  $P$  de l'état  $X$  et  $R$  du bruit  $W$  valent :

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & P_{i\ell} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & R_{i\ell} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (18)$$

### 3.3 Simulateur

Les données à fournir au simulateur sont la période d'échantillonnage  $t_e$ , le nombre de points désiré  $N$ , la vitesse d'avance  $v$  et la direction  $\beta_0$  du navire, les suites  $(\Omega_i)_i$  et  $(\beta_\ell)_\ell$ , les fonctions de transfert  $H(\Omega_i, \beta_\ell)$  en tout point du pavage, la valeur  $S(\Omega_i, \beta_\ell)$  du spectre directionnel en tout point du pavage. On en déduit les pulsations de rencontre  $\omega_{i\ell}$ , les largeurs de bande  $\Delta_{i\ell}$  et la puissance  $p_{i\ell}$  pour chaque pavé. On synthétise alors chaque séquence  $(y_{i\ell}[k])_{1 \leq k \leq N}$  par filtrage temporel du système (11), la séquence blanche  $(w_{i\ell}[k])_{1 \leq k \leq N}$  étant obtenue à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires avec la covariance  $V_{i\ell}$ , et l'état initial  $x_{i\ell}[1]$  étant tiré au hasard avec la covariance  $P_{i\ell}$ .

## 4 Reconstruction du spectre de houle

À l'inverse du chapitre précédent, où il s'agissait de synthétiser les signaux  $y$  issus des capteurs connaissant le spectre directionnel  $S$ , il s'agit ici de reconstruire ce spectre directionnel à l'aide d'un enregistrement de  $N$  points  $(y[k])_{1 \leq k \leq N}$  de ces signaux.

On supposera ici que le spectre directionnel admet une forme paramétrique connue, avec un vecteur paramètre inconnu  $\theta_0$  :

$$S(\Omega, \beta) = S(\Omega, \beta; \theta_0) \quad (19)$$

Par exemple, le modèle (3), ou un spectre multimodal constitué d'une somme de spectres de la forme (3), peuvent être utilisés. Un panorama des modélisations possibles est proposé dans [3].

### 4.1 Méthode heuristique

La représentation dans l'espace d'état (15) ne dépend du spectre directionnel, et donc des paramètres à estimer, que par la matrice de covariance  $R$ , notée par conséquent  $R(\theta_0)$ . Elle n'est donc pas sous forme innovation, et le maximum de vraisemblance est par conséquent difficile à implanter [4]. On propose ici un méthode d'identification simplifiée, consistant en la minimisation d'une distance entre les matrices spectrales de puissance obtenue à l'aide du modèle et estimée sur les signaux enregistrés.

À partir des données  $(y[k])_{1 \leq k \leq N}$ , on obtient une estimation  $\mathcal{S}_{\text{est}}(w_m)$  de la densité spectrale de puissance à l'aide d'une méthode standard telle que le périodogramme, en une suite de  $M$  pulsations  $(w_m)_{1 \leq m \leq M}$ . Pour chaque valeur possible du vecteur paramètre  $\theta$ , on calcule la densité spectrale de puissance théorique  $\mathcal{S}_{\text{th}}(w_m; \theta)$  que l'on devrait obtenir sur les capteurs, à partir du modèle d'état.

L'estimation proposée  $\hat{\theta}$  de  $\theta_0$  est alors :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \underbrace{\sum_{m=1}^M \|M(\mathcal{S}_{\text{est}}(w_m) - \mathcal{S}_{\text{th}}(w_m; \theta))\|^2}_{J(\theta)} \quad (20)$$

La matrice  $M$  est une matrice de pondération diagonale, chaque terme diagonal étant l'inverse de l'écart-type observé sur la composante correspondante de  $y$ , de façon à accorder le même poids à toutes les composantes. On choisira une norme matricielle simple à calculer, par exemple la norme de Frobenius. Ce critère de moindres carrés ne provient en aucun cas de la théorie de l'estimation, mais présente alors l'intérêt suivant. Pour le modèle de spectre directionnel (3), il est quadratique par rapport au paramètre de puissance  $p$ . On peut donc se ramener à une optimisation par rapport aux deux variables  $\Omega_{\text{max}}$  et  $\beta_{\text{max}}$ , qui traduisent la pulsation et l'angle d'arrivée dominants. Il est donc faisable d'utiliser une procédure d'optimisation grossière exhaustive en tabulant le plan  $(\Omega, \beta)$ . Si le spectre réel est multimodal, il est raisonnable de penser que le critère est significativement diminué au voisinage des modes. Les minima locaux du critère tabulé sont alors utilisés pour l'initialisation de l'optimisation pour un modèle de spectre plus complexe, par une méthode locale de Gauss-Newton. Pour l'heure, aucune procédure d'estimation du nombre de modes n'a encore été envisagée.

### 4.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

On propose ici d'estimer le spectre directionnel paramétrique par maximum de vraisemblance sur le modèle proposé dans le paragraphe 3.2. On peut remarquer que ce modèle ne dépend des paramètres à estimer que par la matrice de covariance  $R$ , notée par conséquent  $R(\theta_0)$ . La matrice de covariance  $P$  de l'état, solution de  $P = F P F^T + R$  dépend donc aussi de ce spectre, et est notée  $P(\theta_0)$ . Ce modèle n'étant pas sous forme innovation, il est difficile d'appliquer les méthodes standard d'identification [4]. En concaténant les observations  $(y[k])_{1 \leq k \leq N}$  en un unique vecteur  $Y$  de dimension  $Nc$ , soit :

$$Y = \begin{bmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} \quad (21)$$

on obtient facilement que la matrice de covariance  $\Sigma$  de  $Y$  s'exprime par :

$$\Sigma(\theta_0) = \begin{bmatrix} CP(\theta_0)C^T & CP(\theta_0)F^T C^T & \dots & CP(\theta_0)(F^T)^{N-1}C^T \\ CFP(\theta_0)C^T & CP(\theta_0)C^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & CP(\theta_0)F^T C^T \\ CF^{N-1}P(\theta_0)C^T & \dots & CFP(\theta_0)C^T & CP(\theta_0)C^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance sous hypothèse gaussienne s'exprime alors par :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \{ \log \det \Sigma(\theta) + Y^T \Sigma^{-1}(\theta) Y \} \quad (23)$$

Le calcul numérique du critère est impossible sous cette forme, la matrice  $\Sigma(\theta)$  étant de grandes dimension ( $Nc \times$

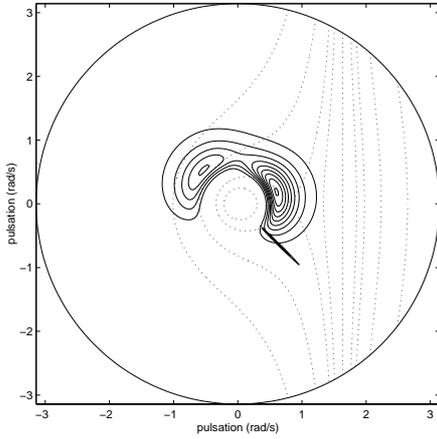


FIG. 1: spectre directionnel simulé

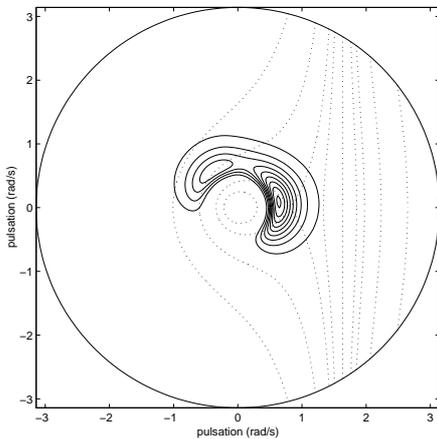


FIG. 2: spectre directionnel estimé

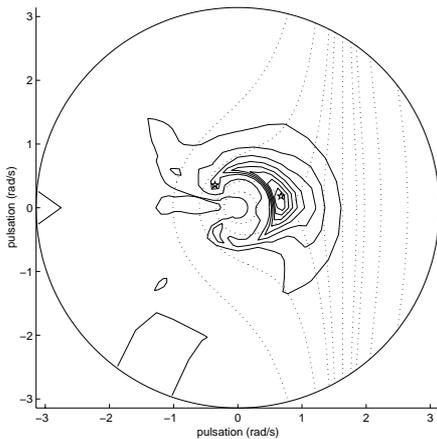


FIG. 3: critère minimisé

$Nc$ ). On propose d'utiliser un algorithme de Levinson-Durbin, classique pour les matrices Toeplitz [5], adapté ici au cas des matrices hermitiennes bloc Toeplitz telle que la matrice  $\Sigma(\theta)$ , et qui procède par récurrence sur l'instant d'enregistrement. Cependant, ce calcul reste assez lourd, et le critère peut présenter des minima locaux.

## 5 Simulations

Elle ne porte que sur la méthode heuristique proposée, le maximum de vraisemblance étant en cours de test. Les simulations présentées ici sont réalisées pour une vitesse d'avance du navire de  $6 \text{ m.s}^{-1}$ , avec  $\beta_0 = 0 \text{ rad}$ . La période d'échantillonnage  $t_e$  est de 1 s, les densités spectrales de puissance sont calculés à l'aide d'une FFT de longueur 128, c'est-à-dire pour les pulsations suivantes :

$$w_m = \frac{m-1}{128} \frac{2\pi}{t_e} \quad 1 \leq m \leq 128$$

On a simulé des signaux de 1000 points induits par un spectre bimodal formé de la superposition de deux spectres de la forme (3), avec  $p = 58,9 \text{ m}^2$ ,  $\Omega_{\max} = 0,632 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\beta_{\max} = 0,3 \text{ rad}$ , et  $p = 39,2 \text{ m}^2$ ,  $\Omega_{\max} = 0,752 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\beta_{\max} = 2,36 \text{ rad}$ . On visualise les courbes de niveau du spectre simulé (figure 1), du spectre reconstruit (figure 2), ainsi que du critère (20) à minimiser (figure 3), dans le plan  $(\Omega \cos \beta, \Omega \sin \beta)$ . Sur chaque graphique sont en outre représentées, en pointillés, quelques courbes de niveau de la pulsation de rencontre  $\omega$  (formule (4)). Le demi-plan gauche, soit  $\Omega \cos(\beta - \beta_0) < 0$  (abscisse négative), correspond aux houles de face. La bande verticale  $0 < \Omega \cos(\beta - \beta_0) < \Omega_0$  (abscisse comprise entre 0 et 1,635, pour une vitesse d'avance de  $6 \text{ m.s}^{-1}$  et une accélération de la pesanteur de  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ) correspond aux houles de dos rattrapante. Le demi-plan droit  $\Omega \cos(\beta - \beta_0) > \Omega_0$  (abscisse supérieure à 1,635) correspond aux houles de dos rattrapée.

## 6 Conclusions

On a proposé dans cet article un simulateur des mouvements enregistrés à bord d'un navire à partir d'un spectre de houle donné et des fonctions de transfert tabulées des capteurs, à l'aide d'une modélisation dans l'espace d'état. Ce modèle peut être utilisé à des fins d'estimation du spectre de houle. L'estimateur du maximum de vraisemblance est difficile à implanter, et est pour l'heure remplacée par une procédure pragmatique, qui produit de bons résultats en simulation. L'implantation du maximum de vraisemblance est en cours.

## Références

- [1] M. Isobe, K. Kondo, K. Orikawa, *Extension of the MLM for estimating directional wave spectra*, in Proc. Symposium on description and modelling of directional seas, paper No A6, Lyngby, Denmark, 1984.
- [2] *Les méthodes à haute résolution*, sous la direction de S. Marcos, Hermes, 1998.
- [3] W.G. Price, R.E.D. Bishop, *Probabilistic theory of ship dynamics*, Wiley, 1974.
- [4] L. Ljung, *System identification: theory for the user*, Prentice Hall, 1987.
- [5] S.L. Marple, *Digital spectral analysis with applications*, Prentice Hall, 1987.