

# Estimation non-paramétrique de l'intensité d'un processus de Poisson

Catherine CHARLES<sup>1</sup>, Jean-Paul RASSON<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Département de Mathématiques, FUNDP  
Rempart de la Vierge, 8, 5000 Namur, Belgique

catherine.charles@fundp.ac.be, jean-paul.rasson@fundp.ac.be

**Résumé** — En sciences expérimentales, les observations sont souvent modélisées comme la somme d'un signal "idéal" et d'un bruit. Dans ce cas, les scientifiques désirent estimer ce signal car il possède l'information recherchée.

Donoho et Johnstone (Donoho *et al.* (1994)) proposent d'estimer au moyen d'ondelettes un signal plongé dans un bruit Gaussien. Leur technique consiste en trois étapes. Premièrement, le signal observé est décomposé dans une base d'ondelettes qui concentre l'énergie du signal "idéal" sur un nombre restreint de coefficients. Le bruit est quant à lui uniformément réparti sur tous les coefficients. Deuxièmement, ces coefficients bruités sont seuillés. Finalement, la transformation inverse est appliquée. Le seuil utilisé dépend de la variance du bruit Gaussien mais est indépendant des paramètres temps et échelle des coefficients. Cependant, en HREELS (High Resolution Electron Energy Loss Spectroscopy) comme dans d'autres problèmes physiques, les données enregistrées ne sont pas modélisées avec un bruit Gaussien mais bien comme des réalisations d'un processus de Poisson. Dans cette optique, Kolaczyk (Kolaczyk (1996)) généralise le filtrage d'un bruit Gaussien à un cas particulier de bruit "Poissonien". En effet, sa technique consiste à décomposer le signal observé dans une base d'ondelettes, à seuiller les coefficients bruités et à appliquer la transformation inverse. Le seuil utilisé dépend cette fois du paramètre échelle des coefficients d'ondelettes. Nous constatons que sa méthode ne s'applique qu'à un certain type de processus de Poisson car l'hypothèse nulle de son modèle considère que la fonction intensité du processus est une fonction constante strictement positive. Ainsi, des signaux avec de grandes variations d'intensité ne sont pas correctement débruités.

Sur les traces de Kolaczyk, nous introduisons une méthode de filtrage adaptée cette fois-ci à tout bruit "Poissonien". Notre technique consiste toujours à décomposer le signal observé dans une base d'ondelettes, à seuiller les coefficients bruités et à appliquer la transformation inverse. Cependant, le seuil utilisé dépend des paramètres temps et échelle des coefficients d'ondelettes. L'hypothèse nulle de notre modèle considère que la fonction intensité du processus est une fonction en escalier. Nous avons mis en évidence l'efficacité de cette technique en comparant les résultats obtenus avec ceux fournis par l'algorithme TIPSH de Kolaczyk. L'algorithme reste aussi rapide que celui de Donoho-Johnstone ou celui de Kolaczyk. Enfin, cette méthode est appliquée dans divers problèmes physiques dont l'HREELS et l'XPS (X-ray Photoelectron Spectroscopy). Nous la mettons également à profit dans le traitement d'images.

**Abstract** — In experiments, observations are often modelled as the sum of an "ideal" signal and noise. Because this "ideal" signal contains important information, scientists want to estimate this one.

Donoho and Johnstone (Donoho *et al.* (1994)) propose to estimate a signal in an additive Gaussian noise by way of a three-step algorithm. First, we decompose the observed signal in a wavelet basis that concentrates the "ideal" signal energy over few coefficients, contrary to the noise which is uniformly spread over all the coefficients. Secondly, we threshold these noisy coefficients. Finally, we invert the wavelet transform. The threshold depends upon the variance of the Gaussian noise but is independent of the time and scale parameters of the coefficients. However, in HREELS (High Resolution Electron Energy Loss Spectroscopy) as in other physical problems, the recorded data are not modelled with a Gaussian noise but as the realisations of a Poisson process. In this perspective, Kolaczyk (Kolaczyk (1996)) generalizes the filtering of a Gaussian noise to a particular "Poisson noise". Indeed, this technique consists in decomposing the observed signal in a wavelet basis, in thresholding the noisy coefficients and in applying the inverse transform. The related threshold depends upon the scale parameter of the wavelet coefficients. We constat that this method provides a satisfactory denoising as long as we study a particular Poisson process. Indeed, under the null hypothesis of the model, the intensity function of the process is a (strictly positive) constant function. Therefore, signals with large intensity variations are not correctly denoised.

In this paper, we introduce a new method to denoise general signals modelled in a general non-homogeneous Poisson process. Our technique consists always in decomposing the observed signal in a wavelet basis, in thresholding the noisy coefficients and in applying the inverse transform. However, the related threshold depends upon the time and scale parameters of the wavelet coefficients. Under the null hypothesis of our model, the intensity function of the Poisson process is a step function. We have highlighted the efficiency of these technique by comparing the obtained results with those provided by the TIPSH algorithm of Kolaczyk. This method possesses the advantage of having a very fast algorithm. Finally, this method has numerous applications (HREELS, XPS (X-ray Photoelectron Spectroscopy), image analysis,...).

# 1 Introduction

En sciences expérimentales, les observations sont souvent modélisées comme la somme d'un signal "idéal" et d'un bruit. Dans ce cas, les scientifiques désirent estimer ce signal car il possède l'information recherchée. Souvent, on considère le bruit normalement distribué, et, pour le filtrage d'un tel bruit, l'approche par ondelettes de Donoho (Donoho *et al.* (1994)) est très efficace. Cependant, lorsque la détection des observations implique un processus de comptage, comme en HREELS, il est plus adéquat de modéliser les données par une distribution de Poisson. En dépit de son grand nombre d'applications, peu d'études ont été faites sur le filtrage d'un tel bruit dit Poissonien. Kolaczyk (Kolaczyk (1996)) a proposé une méthode qui généralise celle de Donoho. Malheureusement elle est uniquement conçue pour des signaux relativement constants avec des pics occasionnels. Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode qui filtre tout signal modélisé par un processus de Poisson. Elle généralise l'approche de Kolaczyk.

## 2 Modèle

Considérons le processus de Poisson non-homogène sur  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}; b = a + n, n \in \mathbb{N}$ ):

$$N_i \equiv N(a, t] \sim Po(\Lambda((a, t])) \quad (1)$$

où  $\Lambda((a, t]) = \int_a^t \lambda(s) ds$ ,  $\forall t \in [a, b]$  et  $\lambda$  est l'intensité du processus. Celui-ci est observé à intervalles réguliers de taille 1. Ces observations peuvent être considérées comme un ensemble de comptages cumulatifs:  $N_a, N_{a+1}, \dots, N_b$ . Par conséquent, nous définissons

$$X_i = N_{a+i+1} - N_{a+i} \quad \text{pour } i = 0 \dots n-1. \quad (2)$$

Nous constatons que ces observations  $X_i$  sont des variables aléatoires de Poisson indépendantes:  $X_i \sim Po(\Lambda(I_i))$  où  $\Lambda(I_i) = \int_{I_i} \lambda(t) dt = \int_{a+i}^{a+i+1} \lambda(t) dt$ . Ainsi, le problème devient:

*Étant donné le processus de Poisson non-homogène décrit en Éq.1 et étant donné les observations  $X_i$  définies en Éq.2, nous voulons obtenir une estimation non-paramétrique de l'intensité  $\lambda(t)$  de ce processus.*

## 3 Filtrage

Puisque le filtrage du bruit Poissonien est une généralisation du filtrage du bruit Gaussien, nous rappelons tout d'abord brièvement au lecteur comment les estimateurs par ondelettes sont obtenus dans les cas Donoho et Kolaczyk.

### 3.1 Filtrage du bruit Gaussien (Donoho)

Supposons que nos observations  $(X_i)_{i=0}^{n-1}$  ( $n = 2^J$ ) sont modélisées comme la somme d'un signal  $(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}$  à estimer et d'un bruit blanc Gaussien  $(W_i)_{i=0}^{n-1}$  de variance  $\sigma^2$ . En appliquant la transformation par ondelettes à  $(X_i)_{i=0}^{n-1}$ ,

nous obtenons  $d_{j,k}^X = d_{j,k}^\lambda + d_{j,k}^W$  où nous notons  $d_{j,k}^f$  le coefficient d'ondelettes de  $f$  à l'échelle  $j$  et au temps  $k$  et où nous voyons que les  $d_{j,k}^W$  sont des variables aléatoires indépendantes  $N(0, \sigma^2)$ . Afin d'estimer les coefficients  $d_{j,k}^\lambda$ , Donoho propose la règle du seuillage fort  $d_{j,k}^{\hat{\lambda}} = d_{j,k}^X I(|d_{j,k}^X| > T)$  où  $\hat{\lambda}$  désigne l'estimateur de  $\lambda$ ,  $I$  est la fonction indicatrice habituelle et le seuil  $T$  est égal à  $\sqrt{2 \log(n)} \sigma$ . Cette dernière valeur est choisie pour les raisons suivantes. Sous l'hypothèse nulle  $H_0 : \lambda = 0$ , nous devons avoir  $T > |d_{j,k}^W|$  afin d'obtenir  $\hat{\lambda} = 0$ . Sous l'hypothèse alternative  $H_a : \lambda \neq 0$ , nous devons éviter de choisir  $T$  trop grand, ce qui ramènerait tous les coefficients à zéro. Donoho suggère de choisir  $T$  afin d'avoir une grande probabilité d'être juste supérieure à la valeur maximale prise par  $|d_{j,k}^W|$ . Choisir  $T = \sqrt{2 \log(n)} \sigma$  convient car:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(T - \frac{\sigma \log(\log(n))}{\log(n)} \leq \max_{j,k} |d_{j,k}^W| \leq T\right) = 1. \quad (3)$$

### 3.2 Filtrage du bruit Poissonien (Kolaczyk)

Considérons maintenant le modèle décrit par le processus de Poisson (voir Éq. 1). Nos observations  $(X_i)_{i=0}^{n-1}$  définies en Éq. 2 ont une distribution de Poisson de paramètre  $\lambda_i = \int_{I_i} \lambda(t) dt$ . Similairement au cas Gaussien, Kolaczyk suggère un estimateur de  $\lambda(t)$  donné par un seuillage fort. Le choix du seuil  $T$  se base sur un argument semblable à celui du cas Gaussien.

Tout d'abord, nous recherchons la distribution des coefficients d'ondelettes de Haar pour nos observations  $(X_i)_{i=0}^{n-1}$ ;  $c_{j,k}$  (resp.  $d_{j,k}$ ) désigne le coefficient relatif à l'approximation (resp. détail) à l'échelle  $j$  et au temps  $k$ . Nous avons  $\forall j = 0, \dots, J; \forall k = 0, \dots, n_j - 1$  où  $n_j = 2^{J-j}$

$$\begin{aligned} c_{j,k} &\sim 2^{-j/2} Po(\lambda_{j,k}) \\ d_{j,k} &\sim 2^{-j/2} \{Po(\lambda_{j-1,2k+1}) - Po(\lambda_{j-1,2k})\} \end{aligned} \quad (4)$$

où nous utilisons la relation de récurrence suivante:  $\lambda_{0,k} = \lambda_k$  et  $\lambda_{j,k} = \lambda_{j-1,2k} + \lambda_{j-1,2k+1}$ . Étant donné que les coefficients sont dépendants à travers les échelles, il est nécessaire de choisir un seuil qui dépend de l'échelle. Kolaczyk montre que  $\forall m \geq 1$

$$\begin{aligned} P(2^{j/2} d_{j,k} \geq m) &= P(\chi_{(2m)}^2(2\lambda_{j-1,2k}) < 2\lambda_{j-1,2k+1}), \\ P(2^{j/2} d_{j,k} \leq -m) &= P(\chi_{(2m)}^2(2\lambda_{j-1,2k+1}) < 2\lambda_{j-1,2k}). \end{aligned} \quad (5)$$

Sous l'hypothèse nulle choisie par Kolaczyk,  $\lambda(t) = \lambda^*$  où  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  (explications plus tard), l'Éq. 5 mène à

$$P(\max_k |d_{j,k}| \leq t_j) = (1 - 2P(\chi_{(2^{j/2} t_j)}^2(2\lambda^* 2^{j-1}) < 2\lambda^* 2^{j-1}))^{n_j}. \quad (6)$$

où  $t_j$  est le seuil recherché pour  $d_{j,k} \forall k \in \{0, \dots, n_j - 1\}$ . La similarité entre les Eqs. 3 et 6 indique qu'il serait possible d'obtenir une valeur pour  $t_j$  en imposant une convergence. Nous pouvons prouver que,

$$\forall \nu, \forall \lambda, \quad P(\chi_{(\nu)}^2(\lambda) < \lambda) \approx P(Z > \frac{\nu}{\sqrt{2(\nu+2\lambda)}}) \quad (7)$$

où  $Z$  est une normale centrée réduite. En appliquant cette approximation à l'Éq. 6, nous obtenons  $\nu$  égal à  $2(2^{j/2})t_j$

et  $\lambda$  égal à  $2^j \lambda^*$ . Afin d'imposer la convergence, Kolaczyk se réfère lui-même aux Éqs 3, 6 et 7, et il impose que  $\frac{\nu}{\sqrt{2(\nu+2\lambda)}} = \sqrt{2\log(n_j)}$ . En substituant  $\nu$  et  $\lambda$  par leur valeur respective dans l'équation précédente, Kolaczyk a mis au jour le seuil relatif aux coefficients de l'échelle  $j$

$$t_j = 2^{-j/2} \left\{ \log(n_j) + \sqrt{\log^2(n_j) + 2\log(n_j)\lambda^* 2^j} \right\}. \quad (8)$$

Afin d'obtenir un estimateur régulier, Kolaczyk suggère d'utiliser la transformation par ondelettes invariante par translation (Donoho *et al.*(1995)). L'algorithme résultant est appelé "Translation Invariant Poisson Smoothing using Haar Wavelets", ou TIPSH. Kolaczyk étudie certains signaux caractérisés par un fond relativement constant et des pics occasionnels, ce qui justifie le choix de l'hypothèse nulle.

## 4 Filtrage du bruit Poissonien général

L'algorithme TIPSH a été conçu pour des signaux relativement constants avec des pics occasionnels. Il calcule un seuil dépendant de l'échelle et à appliquer à tout le signal. Cet algorithme fournit un filtrage satisfaisant tant que les observations sont toutes du même ordre de grandeur. Mais en HREELS, l'intensité du côté des pertes est généralement beaucoup plus petite que celle du pic élastique. Ainsi, si l'algorithme TIPSH est appliqué à un signal HREEL en suivant la stratégie de seuillage de Kolaczyk telle quelle, les résultats seront souvent moins que satisfaisants. Ce comportement est bien illustré en Fig. 1.

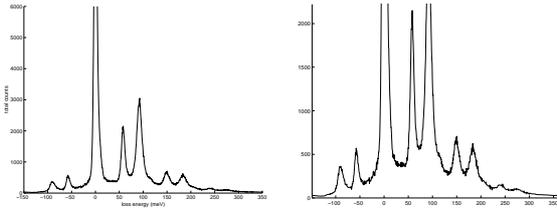


FIG. 1: (a) signal HREEL expérimental (b)filtrage de (a) avec l'algorithme TIPSH

Dans cette figure, nous pouvons voir que la suppression du bruit est excellente lorsque l'intensité est très petite. Par contre, quand les observations marquent une grande amplitude, le filtrage devient plutôt inefficace. Cet effet est dû à la dépendance du seuil vis-à-vis de  $\lambda^*$ . En fait, quand à certains endroits les observations sont plus intenses qu'ailleurs, elles résultent clairement de variables aléatoires de Poisson possédant une grande moyenne et par conséquent une variance considérable. Il est dès lors nécessaire de proposer un seuil plus élevé pour ces coefficients. Dans la Fig. 1,  $\lambda^*$  est petit. Le seuil est donc petit aussi. Ceci signifie que seule la partie du signal de la même amplitude que  $\lambda^*$  est correctement seuillée. Afin de dépasser cet obstacle, nous généralisons l'algorithme

de Kolaczyk en introduisant un seuil spécifique non seulement pour chaque échelle  $j$  des coefficients mais aussi pour chaque temps  $k$ .

Le modèle proposé est principalement identique à celui de Kolaczyk. Seule l'hypothèse nulle diffère. Nous ne choisissons pas l'intensité  $\lambda(t)$  égale à la constante  $\lambda^*$  mais  $\lambda(t)$  égale à la fonction en escalier  $\lambda(t) = \lambda_i^*$  pour  $t \in [a_{i-1}, a_i)$  et  $1 \leq i \leq g$  avec  $a_0 = a$ ,  $a_g = b$ . Nous suggérons de généraliser l'algorithme TIPSH non seulement en introduisant un seuil dépendant de l'échelle et du temps mais aussi en proposant une nouvelle règle de seuillage :

$$d_{j,k}^{\hat{\lambda}} = d_{j,k}^X I(d_{j,k}^X < -t_{j,k}^l, d_{j,k}^X > t_{j,k}^r) + 2^{-j/2} (\lambda_{j-1,2k+1}^* - \lambda_{j-1,2k}^*) I(-t_{j,k}^l \leq d_{j,k}^X \leq t_{j,k}^r) \quad (9)$$

où  $\lambda_{0,k}^* = \lambda_i^*$  avec  $k \in [a_{i-1}, a_i)$  et  $\lambda_{j,k}^* = \lambda_{j-1,2k}^* + \lambda_{j-1,2k+1}^*$ . En effet, la distribution des coefficients (Éq. 4) n'est pas réellement symétrique. Dès lors, nous suggérons d'utiliser une paire de seuils notée  $-t_{j,k}^l$  et  $t_{j,k}^r$ . De plus, nous avons à partir de l'Éq. 4 que  $E(d_{j,k}^X) = 2^{-j/2} (\lambda_{j-1,2k+1}^* - \lambda_{j-1,2k}^*)$  sous l'hypothèse nulle. Dans le cas Kolaczyk, cette moyenne est égale à zéro. Ainsi, les coefficients mis à zéro dans le cas Kolaczyk sont mis à  $2^{-j/2} (\lambda_{j-1,2k+1}^* - \lambda_{j-1,2k}^*)$  ici. D'après l'hypothèse nulle, nous déduisons de l'Éq. 5:  $\forall 1 \leq j \leq J, \forall 0 \leq k \leq n_j - 1$ ,

$$P(-t_{j,k}^l \leq d_{j,k}^X \leq t_{j,k}^r) = 1 - P(\chi_{(2^{(2^j/2)} t_{j,k}^r)}^2 (2\lambda_{j-1,2k}^*) < 2\lambda_{j-1,2k+1}^*) - P(\chi_{(2^{(2^j/2)} t_{j,k}^l)}^2 (2\lambda_{j-1,2k+1}^*) < 2\lambda_{j-1,2k}^*). \quad (10)$$

Étant donné l'indépendance des coefficients pour la même échelle, il suit que

$$P(\forall k = 0 \dots n_j - 1 : -t_{j,k}^l \leq d_{j,k}^X \leq t_{j,k}^r) = \prod_{k=0}^{n_j-1} (1 - P(\chi_{(2^{(2^j/2)} t_{j,k}^r)}^2 (2\lambda_{j-1,2k}^*) < 2\lambda_{j-1,2k+1}^*) - P(\chi_{(2^{(2^j/2)} t_{j,k}^l)}^2 (2\lambda_{j-1,2k+1}^*) < 2\lambda_{j-1,2k}^*)). \quad (11)$$

Puisque nous essayons d'atteindre une convergence similaire à celle du cas Gaussien (Éq. 3), nous voulons que :

$$P(\forall k = 0 \dots n_j - 1 : -t_{j,k}^l \leq d_{j,k}^X \leq t_{j,k}^r) \approx (1 - 2P(Z > \sqrt{2\log(n_j)} \sigma))^n \quad (12)$$

où  $Z$  a une distribution normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Par conséquent, nous utilisons l'approximation suivante  $\forall 0 \leq k \leq n_j - 1$ , i.e.

$$P(\chi_{(r)}^2(m) < p) \approx P(Z > \frac{r+m-p}{\sqrt{2(r+2m)}})$$

où  $Z$  est une normale centrée réduite et nous imposons

$$\frac{r+m-p}{\sqrt{2(r+2m)}} = \sqrt{2\log(n_j)}.$$

Il suit que les deux seuils correspondant au coefficient d'ondelettes de Haar relatif aux détails à l'échelle  $j$  et au temps  $k$  sont

$$t_{j,k}^r = 2^{-j/2} \left\{ \log(n_j) - (\lambda_{j-1,2k}^* - \lambda_{j-1,2k+1}^*) + \sqrt{\log^2(n_j) + 2\log(n_j)(\lambda_{j-1,2k+1}^* - \lambda_{j-1,2k}^*) + 4\log(n_j)\lambda_{j-1,2k}^*} \right\}$$

$$t_{j,k}^l = 2^{-j/2} \left\{ \log(n_j) - (\lambda_{j-1,2k+1}^* - \lambda_{j-1,2k}^*) + \sqrt{\log^2(n_j) + 2\log(n_j)(\lambda_{j-1,2k}^* - \lambda_{j-1,2k+1}^*) + 4\log(n_j)\lambda_{j-1,2k+1}^*} \right\} \quad (13)$$

Ces seuils sont une généralisation du seuil  $t_j$  de l'algorithme TIPSH (Éq. 8). De plus, quand  $n$  est fixé, ces seuils sont, à un facteur multiplicatif près, proportionnels à  $\lambda_{j-1,2k+1}^*$  (qui est la variance sous l'hypothèse nulle); ce qui est similaire au cas Gaussien.

D'après l'Éq. 4, il est évident que les coefficients relatifs à l'approximation sont aussi bruités. Dès lors, nous proposons de les seuiller également. D'après l'Éq. 4 et sous l'hypothèse nulle, nous avons  $c_{j,k} \sim 2^{-j/2} Po(\lambda_{j,k}^*)$  avec  $E(c_{j,k}) = 2^{-j/2} \lambda_{j,k}^*$ . La règle de seuillage est la suivante :

$$c_{j,k}^{\hat{\lambda}} = c_{j,k}^X I(c_{j,k}^X < t_{j,k}^l, c_{j,k}^X > t_{j,k}^r) + 2^{-j/2} \lambda_{j,k}^* I(t_{j,k}^l \leq c_{j,k}^X \leq t_{j,k}^r) \quad (14)$$

avec  $t_{j,k}^l < 2^{-j/2} \lambda_{j,k}^* < t_{j,k}^r$ . Afin d'obtenir ces deux seuils, nous approximations la distribution de Poisson par une distribution Gaussienne. Ceci peut être effectué car les  $\lambda_{j,k}^*$  sont suffisamment grand. Nous obtenons  $\forall 1 \leq j \leq J, \forall 0 \leq k \leq n_j - 1$ :

$$\approx 1 - P\left(Z > \frac{2^{j/2} t_{j,k}^l - \lambda_{j,k}^*}{\sqrt{\lambda_{j,k}^*}}\right) - P\left(Z > \frac{-2^{j/2} t_{j,k}^r + \lambda_{j,k}^*}{\sqrt{\lambda_{j,k}^*}}\right). \quad (15)$$

Afin d'obtenir la même convergence que dans le cas Gaussien, nous imposons :

$$\frac{2^{j/2} t_{j,k}^r - \lambda_{j,k}^*}{\sqrt{\lambda_{j,k}^*}} = \sqrt{2 \log(n_j)} \text{ et } \frac{-2^{j/2} t_{j,k}^l + \lambda_{j,k}^*}{\sqrt{\lambda_{j,k}^*}} = \sqrt{2 \log(n_j)}.$$

En résolvant ces deux équations, nous obtenons les deux seuils correspondant au coefficient relatif à l'approximation à l'échelle  $j$  et au temps  $k$ :

$$t_{j,k}^{l(r)} = 2^{-j/2} \left\{ \lambda_{j,k}^* - (+) \sqrt{\lambda_{j,k}^* 2 \log(n_j)} \right\}$$

Nous voyons que nous retrouvons le seuil Gaussien en  $2^{j/2} (t_{j,k}^l - \lambda_{j,k}^*) = -2^{j/2} (t_{j,k}^r - \lambda_{j,k}^*) = \sqrt{\lambda_{j,k}^* 2 \log(n_j)}$  avec  $\lambda_{j,k}^*$  comme variance.

Cet algorithme se déroule donc en trois étapes (transformation, "seuillage", transformation inverse). Pour les mêmes raisons que Kolaczyk, nous utilisons la transformation par ondelettes invariante par translation. Cet algorithme est donc un algorithme TIPSH local en temps et en fréquence (LTFTIPSH).

## 5 Résultats et comparaisons

Entre les méthodes TIPSH et LTFTIPSH, plusieurs comparaisons du point de vue graphique et du point de vue erreur ont été réalisées. Seules celles relatives à l'HREELS du  $SrTiO_3$  sont décrites ici. Du point de vue graphique, la Fig. 2 compare le comportement de l'algorithme TIPSH avec notre algorithme local en temps et en fréquence (LTFTIPSH). L'échelle grossière  $L$  a été fixée à 5.

Le signal filtré par l'algorithme LTFTIPSH s'avère être plus régulier que celui filtré par l'algorithme TIPSH. De plus, du point de vue de l'erreur, à partir d'une fonction intensité similaire à celle de la Fig. 1 ( $SrTiO_3$ ), nous avons

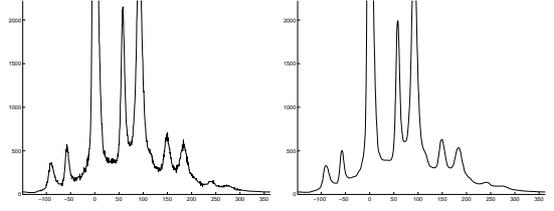


FIG. 2: Filtrage du bruit du signal représenté en Figure 1.a ( $SrTiO_3$ ) utilisant (a) l'algorithme TIPSH et (b) l'algorithme LTFTIPSH

généralisé 200 signaux. Nous connaissons dans ce cas la valeur correcte de la fonction  $\lambda$  et nous pouvons dès lors calculer l'erreur quadratique correspondante à chaque estimateur de celle-ci ( $\|\lambda - \hat{\lambda}\|_2^2 = \sum_i (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2$ ). La moyenne des erreurs quadratiques obtenues avec l'algorithme LTFTIPSH ( $8.1652E+4$ ) est significativement inférieure à celle obtenue via l'algorithme TIPSH ( $2.2285E+6$ ).

## 6 Conclusion

Nous avons suggéré une nouvelle méthode de filtrage de signaux modélisés par un processus de Poisson non-homogène. C'est une technique basée sur le seuillage des coefficients d'ondelettes. De la même façon que Kolaczyk, la base d'ondelettes de Haar est utilisée car les coefficients d'ondelettes relatifs ont une distribution simple. Nous utilisons aussi la transformation d'ondelettes invariante par translation permettant d'obtenir un estimateur régulier. Cependant, un seuil dépendant de l'échelle et du temps a été choisi de manière à s'adapter au comportement du signal aux différents endroits. Sur base de l'asymétrie de la distribution des coefficients d'ondelettes, nous proposons une paire de seuils pour chaque coefficient. Nous introduisons également une règle de seuillage spécifique qui ne réduit pas les coefficients seuillés à zéro mais à la moyenne de la distribution du coefficient. De plus, nous proposons aussi de seuiller les coefficients relatifs à l'approximation. D'après les graphiques et du point de vue de l'erreur, nous avons vu que cette méthode apporte des améliorations. Elle possède l'avantage d'avoir un algorithme rapide (implémenté en MatLab: WaveLab Toolbox). Par conséquent, cet article démontre une fois de plus la réelle efficacité de la technique de seuillage des coefficients d'ondelettes dans le domaine du filtrage du bruit. Nos projets de recherche sont premièrement de mettre en évidence les propriétés d'optimalité de cet estimateur en imposant des conditions de régularité sur  $\lambda$ . Nous désirons aussi utiliser cette technique dans le traitement d'images.

## Références

- [1] D.L. Donoho, I.M. Johnstone. *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage* Biometrika, 81, 425-455, 1994.
- [2] Eric D. Kolaczyk. *Estimation of Intensities of Burst-Like Poisson Processes Using Haar Wavelets*. Journal of the Royal Statistical Society, series B. 1996.