

# Propriétés du second ordre et mesures invariantes pour des séries temporelles chaotiques définies sur $[0, 1]$

Dominique GUÉGAN<sup>1</sup>, Sophie LADOUCKETTE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Reims, Département de Mathématiques  
Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 02, France

<sup>2</sup>Université de Reims, Département de Mathématiques  
Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 02, France  
Banque de France, Centre de Recherche, 41-1391 DGERI  
31 rue Croix des petits Champs, 75049 Paris Cedex 01, France

dominique.guegan@univ-reims.fr, sophie.ladoucette@banque-france.fr

## Résumé –

Nous étudions les propriétés au second ordre de certains processus paramétriques de séries temporelles ayant des comportements de type chaotique : l'étude de la fonction d'autocovariance et de la densité spectrale permet de classer ces séries en terme de comportement de mémoire longue et de mémoire courte. Nous précisons, en fonction des valeurs des paramètres, les propriétés d'ergodicité et de mélangeance pour ces séries. Nous comparons ces séries à certains processus de type longue mémoire pour lesquels nous démontrons la propriété de non mélangeance.

## Abstract –

We investigate second order properties for some parametric time series which present chaotic behaviors : the study of the autocovariance function and of the spectral density permits to classify these series in term of long and short memory behavior. We state precisely, according to the parameters' values, their ergodic and mixing properties. We compare these series to some long memory processes for which we provide the proof of their non-mixing property.

## 1 Introduction

Soit une application mesurable  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  représentant un système dynamique telle que l'état du système au temps  $t$  est décrit par l'équation suivante :

$$X_t = \varphi^t(X_0), \quad (1)$$

où  $\varphi^t = \varphi \circ \varphi \cdots \circ \varphi$  ( $t$  fois) et  $X_0 \in [0, 1]$  est l'état du système au temps  $t = 0$ . Nous remarquons que (1) implique :

$$X_t = \varphi(X_{t-1}), \quad t \geq 1. \quad (2)$$

L'étude des propriétés au second ordre, telles que la fonction d'autocovariance et la densité spectrale, de certains processus chaotiques gouvernés par (2), nous permet de caractériser leur mesure invariante en terme d'ergodicité et de mélangeance dont les conditions sont définies comme dans Ibragimov et Rozanov (1974).

Précisément, nous nous intéressons à deux classes de fonctions (voir, par exemple, Lawrance et Spencer (1998)) : la classe des applications "tent" généralisées définies par :

$$\begin{cases} X_{t+1} = 1 - (1 - 2X_t)^\nu, & 0 \leq X_t < \frac{1}{2} \\ X_{t+1} = 1 - (2X_t - 1)^\nu, & \frac{1}{2} \leq X_t \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

et la classe des applications binaires généralisées définies par :

$$\begin{cases} X_{t+1} = 1 - (1 - 2X_t)^\nu, & 0 \leq X_t < \frac{1}{2} \\ X_{t+1} = 1 - (2 - 2X_t)^\nu, & \frac{1}{2} \leq X_t \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Les mesures invariantes associées aux familles (3) et (4) ne sont connues que pour certaines valeurs de  $\nu$ . Pour les applications "tent" et logistique ( $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  dans (3)), les mesures invariantes sont respectivement les lois Uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$  et  $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; les deux applications étant reliées par une transformation inversible, la propriété de mélangeance de l'application "tent" vaut aussi pour l'application logistique (voir Lasota et Mackey (1994)). Sinon, pour la famille (4), nous savons que la mesure invariante de l'application "2-adic" ( $\nu = 1$ ), qui est la loi Uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$ , est exacte (voir Lasota et Mackey (1994)).

Nous commençons par caractériser les mesures invariantes associées à la forme générale de l'application logistique, appelée fonction logistique et étudiée notamment par May (1976), qui est définie par l'équation :

$$\begin{cases} X_t = \varphi(X_{t-1}) = aX_{t-1}(1 - X_{t-1}), & t \in \mathbb{N}^* \\ \varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1], & a \in \mathcal{A} = ]1, 4]. \end{cases} \quad (5)$$

Ensuite, nous étudions les systèmes (3), (4) et (5), pris en certaines valeurs de leur paramètre, pour lesquels nous avons mis en évidence un comportement de type longue mémoire (voir Guégan (2000 a,b)), ce qui nous à notamment conduit à regarder différentes conditions de mélangeance pour ces processus à mémoire longue (voir Guégan et Ladoucette (2001)). Enfin, nous étudions les propriétés en terme de mesure invariante du système (5), pris en  $a = 4$ , bruité, que nous notons  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et qui est défini par

l'équation :

$$\begin{cases} Y_t = X_t + \varepsilon_t, & t \in \mathbb{N} \\ X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1}), & t \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (6)$$

Le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est un système dynamique avec erreurs,  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est un processus chaotique de densité  $f$  la loi  $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d., indépendantes de  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et de densité connue  $g$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

## 2 Mesures invariantes du système (5)

Nous montrons qu'il existe une bijection entre l'espace  $\mathcal{A}$  des paramètres de bifurcation de la fonction logistique (5) et un sous espace de l'espace des mesures invariantes, et que, pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , la mesure invariante associée à la fonction logistique (5) est ergodique mais n'est mélangeante que si  $a \in ]1, 3[$  et si  $a = 4$ . Les démonstrations de ces résultats reposent sur l'étude de la fonction d'autocovariance, de la densité spectrale, de l'exposant de Lyapunov et de la mise en évidence des différents cycles qui caractérisent ce système.

Plus généralement, en étudiant les fonctions d'autocovariance et les densités spectrales des processus (3), (4) et (5), nous avons mis en évidence un comportement de type longue mémoire pour certaines valeurs de leur paramètre.

## 3 Comportement longue mémoire des systèmes (3), (4) et (5)

Lorsque nous considérons les systèmes (3) et (4) quand  $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$ , et (5) quand  $a$  est un point d'accumulation d'un  $m$ -cycle basique (i.e.  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} m \cdot 2^n$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ), nous observons une décroissance très lente de la fonction d'autocovariance empirique  $\hat{\gamma}$  et l'explosion en une ou plusieurs fréquence(s) non nulle(s) de la densité spectrale empirique  $\hat{f}$ .

Nous savons que ce type de comportement peut aussi être observé en considérant des processus stochastiques paramétriques tels que les processus longue mémoire stationnaires de Gegenbauer à  $k$ -facteurs, notés  $\text{GG}_k(d, \nu)$  et définis par l'équation suivante :

$$\prod_{i=1}^k (I - 2\nu_i B + B^2)^{d_i} (X_t - m) = \varepsilon_t, \quad (7)$$

avec  $0 < d_i < \frac{1}{2}$  si  $|\nu_i| < 1$  et  $0 < d_i < \frac{1}{4}$  si  $|\nu_i| = 1$  pour  $i = 1, \dots, k$ , où  $I$  et  $B$  sont respectivement l'opérateur identité et l'opérateur retard, où  $m$  est la moyenne du processus et où  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est un processus bruit blanc de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . Ces processus, qui généralisent les processus FARIMA introduits par Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981), ont été introduits dans l'article de Gray *et al.* (1989) et étudiés statistiquement dans les articles de Giraitis et Leipus (1995) et Wayne *et al.* (1998).

Ainsi, en vue de caractériser la mesure invariante des systèmes (3), (4) et (5) pris en ces valeurs particulières de leur paramètre, nous ajustons à la trajectoire un processus  $\text{GG}_k(d, \nu)$  (7).

Par exemple, dans le cas de la fonction logistique (5) prise en chaque point d'accumulation d'un  $m$ -cycle basique, nous pouvons ajuster un certain processus  $\text{GG}_k(d, \nu)$  (7) à la trajectoire. En figure 1, nous illustrons ce comportement pour  $m = 3$  et au regard de la décroissance lente de  $\hat{\gamma}$  calculée avec 10 000 points et 500 retards, et l'explosion de  $\hat{f}$  en les trois fréquences non nulles  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\pi$ , nous ajustons un processus longue mémoire stationnaire de Gegenbauer à 3-facteurs à la trajectoire.

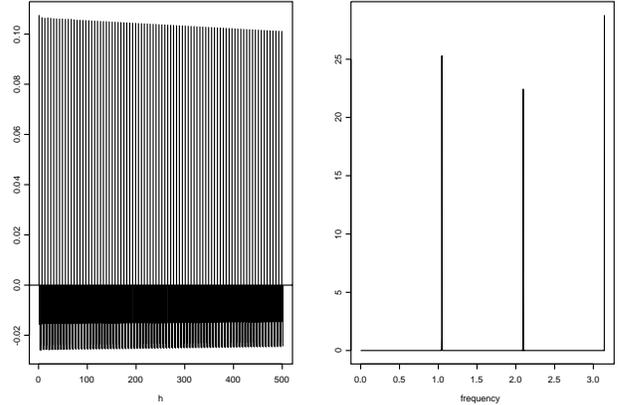


FIG. 1 –  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{f}$  du système (5) pris au point d'accumulation du 3-cycle basique

Cette étude nous a conduit à regarder différentes conditions de mélangeance pour les processus  $\text{GG}_k(d, \nu)$  (7).

## 4 Propriété de non mélangeance des processus $\text{GG}_k(d, \nu)$ (7)

Nous établissons le résultat suivant : si  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus bruit blanc faible de variance finie, le processus longue mémoire stationnaire de Gegenbauer à  $k$ -facteurs (7) n'est pas complètement linéairement régulier et si  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus Gaussien, le processus longue mémoire stationnaire de Gegenbauer à  $k$ -facteurs (7) n'est pas complètement régulier et donc n'est pas fortement mélangeant. La démonstration de ce résultat repose principalement sur un théorème de Helson et Sarason (1967) : un processus stationnaire au second ordre complètement linéairement régulier possède une densité spectrale qui est intégrable à tout ordre positif et nous montrons que cette condition n'est pas remplie pour le processus  $\text{GG}_k(d, \nu)$  (7).

Ainsi, la mesure invariante associée aux systèmes (3), (4) et (5) pris aux valeurs particulières de leur paramètre précisées dans la section 3 et modélisés par des processus  $\text{GG}_k(d, \nu)$  (7), est ergodique mais n'est pas complètement

linéairement régulière.

Maintenant, nous regardons l'influence d'un bruit sur la mesure invariante du système (5) pris en  $a = 4$ .

## 5 Mesures invariantes du système (6)

Nous commençons par préciser la mesure invariante associée au système (6) pour différentes lois du bruit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  en donnant l'expression exacte, soit de la densité  $h$  lorsque  $g$  est une loi Uniforme ou  $\beta(p, q)$  de paramètres  $p$  et  $q$  entiers, soit de la fonction caractéristique associée à  $h$  lorsque  $g$  est une loi Exponentielle ou  $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

### 5.1 Bruit Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$

Lorsque  $g \sim \mathcal{U}([a, b])$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a < b$ , la densité  $h_1$  associée au système (6) est donnée par :

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \left( \arcsin(2(x-a)-1) + \frac{\pi}{2} \right) / (\pi(b-a)), & a \leq x \leq \min(1+a, b) \\ 1/(b-a), & 1+a \leq x \leq b \\ \text{si } \min(1+a, b) = 1+a \\ \left( \arcsin(2(x-a)-1) - \arcsin(2(x-b)-1) \right) / (\pi(b-a)), & b \leq x \leq 1+a \\ \text{si } \min(1+a, b) = b \\ \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(2(x-b)-1) \right) / (\pi(b-a)), & \max(1+a, b) \leq x \leq 1+b \\ 0, & x > 1+b. \end{cases}$$

Nous illustrons ce résultat figure 2. Après avoir simulé 50000 fois le système (6) avec  $g \sim \mathcal{U}([0, 1])$ , nous construisons l'histogramme de ces points que nous normalisons afin de lui superposer la densité  $h_1$  calculée précédemment.

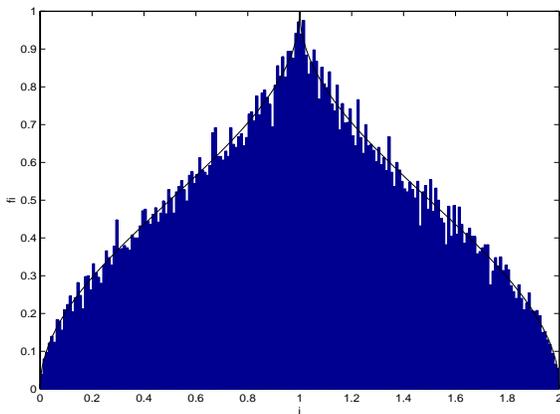


FIG. 2 – Loi empirique et théorique du système (6) avec  $g \sim \mathcal{U}([0, 1])$

### 5.2 Bruit Beta $\beta(p, q)$ , $p, q \in \mathbb{N}^*$

Nous donnons ici l'exemple d'un bruit suivant la loi  $\beta(1, 3)$ . La densité  $h_2$  associée au système (6) est alors donnée par :

$$h_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{57}{16} \right) + \left( \frac{9}{2}x - \frac{33}{4} \right) \sqrt{x(1-x)} \\ + (3x^2 - 9x + \frac{57}{8}) \arcsin(2x-1) / \pi, & 0 \leq x \leq 1 \\ \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{57}{16} \right) - \left( \frac{9}{2}x - \frac{27}{4} \right) \sqrt{(x-1)(2-x)} \\ + (3x^2 - 9x + \frac{57}{8}) \arcsin(2x-3) / \pi, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

La figure 3 illustre ce résultat. Nous procédons comme dans le cas précédent : après avoir construit un histogramme associé à 50000 itérations du système (6) avec  $g \sim \beta(1, 3)$ , nous le normalisons et nous lui superposons la densité théorique  $h_2$ .

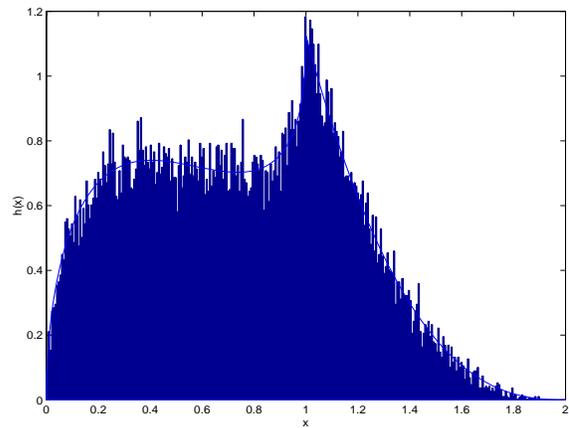


FIG. 3 – Loi empirique et théorique du système (6) avec  $g \sim \beta(1, 3)$

### 5.3 Bruit Beta $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Lorsque  $g \sim \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , le bruit peut être considéré comme un chaos déterministe de même loi que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . Dans ce cas, nous donnons l'expression analytique de la fonction caractéristique  $\phi_{h_3}$  de la densité  $h_3$  associée au système (6) :

$$\phi_{h_3}(t) = e^{it} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right) \frac{(-1)^n}{n!n!} \left( \frac{t}{4} \right)^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afin de représenter la densité  $h_3$ , dont nous n'avons pas l'expression théorique, nous itérons 50000 fois le système (6) avec  $g \sim \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et nous construisons l'histogramme de ces points simulés. La figure 4 montre cet histogramme que nous avons normalisé et qui, ainsi, caractérise empiriquement la loi du système.

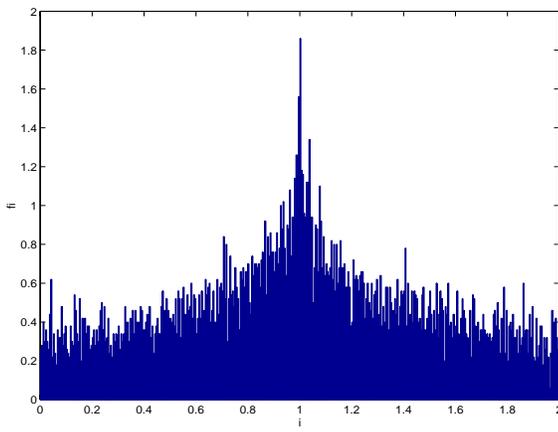


FIG. 4 – Loi empirique du système (6) avec  $g \sim \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

#### 5.4 Bruit Exponentiel $\mathcal{E}(\lambda)$

Lorsque  $g \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , nous donnons aussi l'expression analytique de la fonction caractéristique  $\phi_{h_4}$  de la densité  $h_4$  associée au système (6) :

$$\phi_{h_4}(t) = \frac{\lambda e^{it/2}}{\lambda - it} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{t}{4}\right)^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nous choisissons de considérer le système (6) avec un bruit de paramètre  $\lambda = 1$ . Comme dans le cas précédent, nous représentons la densité associée au système (6) avec  $g \sim \mathcal{E}(1)$  via une approche empirique, en simulant 50000 fois ce système et en représentant l'histogramme normalisé de ces points en figure 5.

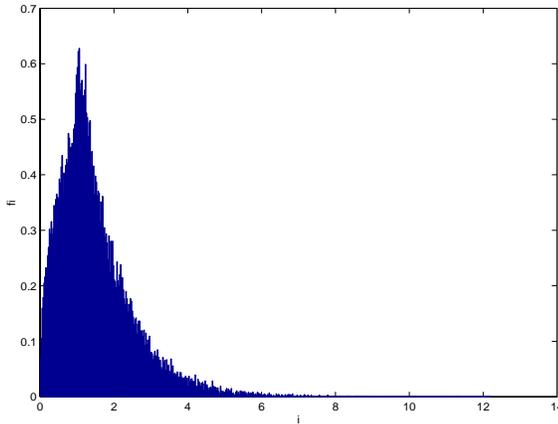


FIG. 5 – Loi empirique du système (6) avec  $g \sim \mathcal{E}(1)$

Maintenant, nous analysons les propriétés de mélangeance du système (6).

#### 5.5 Propriété de mélangeance

La mesure invariante associée au système (6) peut être caractérisée en terme de mélangeance par le résultat suivant : si les deux premiers moments du bruit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$  sont finis, alors le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  défini par (6) est absolument régulier donc fortement mélangeant.

## Références

- [1] L. Giraitis et R. Leipus (1995), "A generalized fractionally differencing approach in long memory modeling", *Lithuanian Mathematical Journal*, **35**, 65–81.
- [2] C.W.J. Granger et R. Joyeux (1980), "An introduction to long memory time series models and fractional differencing", *J.T.S.A.*, **1**, 15–29.
- [3] H.L. Gray, N.F. Zhang et W.A. Woodward (1989), "On generalized fractional processes", *J.T.S.A.*, **10**, 233–257.
- [4] D. Guégan (2000 a), "Long memory and chaotic systems", dans *Proceedings of the International Symposium on Frontiers of time series modelling*, Tokyo, ISM, 326–351.
- [5] D. Guégan (2000 b), "Stochasticity and deterministic chaotic systems", *Prépublication 00.04*, Université de Reims.
- [6] D. Guégan et S. Ladoucette (2001), "Invariant Measures and Second Order Properties for Maps on  $[0, 1]$ ", *Prépublication 01.07*, Université de Reims.
- [7] H. Helson et D. Sarason (1967), "Paste and Future", *Math. Scand.*, **21**, 5–16.
- [8] J.R.M. Hosking (1981), "Fractional differencing", *Biometrika*, **68**, 1, 165–176.
- [9] I. Ibragimov et Y. Rozanov (1974), *Processus aléatoires Gaussiens*, Edition Mir, Moscou.
- [10] A. Lasota et M.C. Mackey (1994), *Chaos, fractals and noise : stochastic aspects of dynamics*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York.
- [11] A.J. Lawrance et N.M. Spencer (1998), "Statistical aspects of curved chaotic map models and their stochastic reversals", *Scand. J. Stat.*, **25**, 371–382.
- [12] R.M. May (1976), "Simple mathematical models with complicated dynamics", *Nature*, **261**, 459–467.
- [13] A. Wayne, W.A. Woodward, Q.C. Cheng et H.L. Gray (1998), "A  $k$ -factor GARMA long-memory model", *J.T.S.A.*, **19**, 5, 485–504.