

# Robustesse de la localisation de sources bande étroite et large bande par “covariance matching estimation”

Yann MEURISSE, Jean Pierre DELMAS

Institut National des Télécommunications  
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

yann.meurisse@int-evry.fr, jean-pierre.delmas@int-evry.fr

**Résumé** – Cet article est consacré à l’application de la méthode “covariance matching estimation” (COMET) [1] à l’estimation de direction d’arrivée de sources (DOA) bande étroite et large bande non corrélées spatialement avec du bruit additif spatialement blanc non uniforme dans le cadre d’observations non obligatoirement gaussiennes et indépendantes où nous montrons que l’algorithme COMET peut s’appliquer à une source large bande de spectre symétrique pour un réseau de géométrie quelconque. L’efficacité de l’algorithme COMET est reformulée et ses performances asymptotiques sont étendues aux cas d’observations non gaussiennes et/ou non indépendantes. Il est démontré que les performances de l’algorithme COMET sont insensibles à la distribution des signaux source dans le cas bande étroite contrairement au cas large bande. Enfin une expression analytique de la borne de Cramer-Rao de l’estimée de la DOA seule est donnée dans le cas d’une source bande étroite ou large bande dans le cas d’observations gaussiennes indépendantes. Cette expression nous permet de démontrer que les performances de COMET obtenues quand les puissances de bruit sur quelques capteurs sont infinies sont équivalentes à celles obtenues à l’aide du réseau privé de ces capteurs.

**Abstract** – This paper is focused on the application of the covariance matching estimation technique (COMET) [1] to the directions of arrival (DOA) estimation of narrowband and wideband emitted signals with additive nonuniform white noise in the hypothesis of possibly non-Gaussian and dependent data. The COMET algorithm applies to the case of a single wideband source with symmetric spectrum for an arbitrary array of sensors. The statistical efficiency of the COMET algorithm is reformulated and the asymptotic performance study are extended to the case of non-Gaussian and dependent observations. It is established that the asymptotic performance of the COMET algorithm are insensitive to the distribution of the sources in the case of narrowband signals contrary to the case of wideband signals. A closed-form expression of the Cramer-Rao bound for the DOA’s parameter alone is given in the case of a single narrowband or wideband source with Gaussian and independent observations. Finally, this expression allows us to prove that the asymptotic performance of the COMET algorithm when some sensors spoiled by infinite power noise are those given for an array where these deficient sensors are missing.

## 1 Modèle et notations

Nous considérerons  $K$  signaux source spatialement non corrélés de support spectral situé autour d’une fréquence  $f_0$  de largeur de bande  $B$  ( $\frac{B}{2} < f_0$ ) d’enveloppe complexe  $s_t^k$  par rapport à cette fréquence  $f_0$ , caractérisés par leur DOA  $(\theta_k)_{k=1,\dots,K}$ . L’enveloppe complexe  $\mathbf{y}_t$  des signaux observés derrière un réseau de  $M$  capteurs, en présence de bruit gaussien spatialement non corrélé de puissance non uniforme a pour matrice de covariance spatiale

$$\mathbf{R}_y = E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \odot \mathbf{R}_{s_k} + \mathbf{R}_n$$

avec  $\mathbf{R}_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)$  où  $\odot$  désigne le produit de matrices terme à terme,

$$\mathbf{a}(\theta_k) \stackrel{\text{def}}{=} [e^{-i2\pi f_0 \tau_{k,1}}, \dots, e^{-i2\pi f_0 \tau_{k,M}}]^T,$$

où  $\tau_{k,m}$  désignent le retard sur le capteur  $m$  pour la source  $k$  par rapport à un point de référence et où  $\mathbf{R}_{s_k}$  est la matrice  $M \times M$  dont le terme  $(m,n)$  est la corrélation  $[\mathbf{R}_{s_k}]_{m,n} = E(s_{t-\tau_{k,m}}^k s_{t-\tau_{k,n}}^{k*})$  de la source  $k$ . Dans le cas de sources strictement bande étroite  $\mathbf{R}_{s_k} = \sigma_{s_k}^2 \mathbf{1}\mathbf{1}^T$  et

$$\mathbf{R}_y = \sum_{k=1}^K \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) + \mathbf{R}_n.$$

## 2 Algorithmes COMET

Pour le modèle de  $K$  sources strictement bande étroite et d’un réseau d’antenne connu quelconque,  $\mathbf{R}_y$  est paramétrée par les  $M + 2K$  paramètres réels  $(\Theta, \Phi)$  avec

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \dots, \theta_K)^T$$

et

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)^T.$$

Nous supposons que  $(\Theta, \Phi)$  est strictement identifiable à partir de la matrice  $\mathbf{R}_y$ . Remarquons que cette condition d’identification dépend de la géométrie d’antenne. Si elle se ramène à  $K < M$  pour un réseau linéaire uniforme (LU) sans ambiguïté, elle devient  $K \leq \frac{M(M-1)}{2}$  pour un réseau linéaire lacunaire sans redondance et sans ambiguïté. De plus,  $\mathbf{R}_y$  étant linéaire par rapport à  $\Phi$ , sa vectorialisation s’écrit sous la forme

$$\mathbf{r}_y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vec}(\mathbf{R}_y) = \Psi_1(\Theta)\Phi.$$

Pour le modèle de sources large bande, le paramétrage n’est identifiable que dans le cas d’une seule source de spectre symétrique par rapport à  $f_0$  et cela quelque soit le réseau d’antenne connu. Dans cette situation,  $\mathbf{R}_{s_1}$  est une matrice symétrique réelle dont les termes de la diagonale principale sont égaux à  $\sigma_{s_1}^2$  et dont la partie hors diago-

nale est paramétrée par ses termes  $(r_{m,n})_{m,n \in \mathcal{M}}$  associés à l'ensemble des valeurs  $\tau_{1,n} - \tau_{1,m}$  distinctes. L'ensemble  $\mathcal{M}$  dépend de la géométrie de l'antenne. Par exemple, pour un réseau LU,  $\mathbf{R}_{s_1}$  est de structure Toeplitz et  $\mathcal{M} = \{(2,1), \dots, (M,1)\}$  et pour un réseau circulaire uniforme,  $\mathbf{R}_{s_1}$  n'a pas de structure supplémentaire et

$$\mathcal{M} = \{(m,n); 1 \leq m < n \leq M\}.$$

Par suite  $\mathbf{R}_y$  est paramétrée par les paramètres réels  $(\Theta, \Phi)$  avec  $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1$  et  $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} ((r_{m,n})_{m,n \in \mathcal{M}}, \sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2, \dots, \sigma_{s_1}^2 + \sigma_M^2)^T$  et  $(\Theta, \Phi)$  est strictement identifiable à partir de la matrice  $\mathbf{R}_y$ . De plus  $\mathbf{R}_y$  étant linéaire par rapport à  $\Phi$ , sa vectorialisation s'écrit sous la forme

$$\mathbf{r}_y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vec}(\mathbf{R}_y) = \Psi_2(\Theta)\Phi.$$

Dans le cas de signaux gaussiens complexes circulaires où les observations  $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$  sont indépendantes, nous sommes donc dans les conditions d'application de l'algorithme COMET [1] dans ces deux modèles. Avec

$\mathbf{R}_y(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H$  et  $\mathbf{r}_y(T) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vec}(\mathbf{R}_y(T))$ , les estimés  $(\Theta(T), \Phi(T))$  de  $(\Theta, \Phi)$  donnés par cet algorithme s'obtiennent comme solution de

$$(\Theta(T), \Phi(T)) = \arg \min_{\Theta, \Phi} V(\Theta, \Phi) \quad (2.1)$$

avec

$$V(\Theta, \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{r}_y(T) - \Psi(\Theta)\Phi]^H \mathbf{W}_T [\mathbf{r}_y(T) - \Psi(\Theta)\Phi]$$

et  $\mathbf{W}_T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_y^{-1}(T) \otimes_c \mathbf{R}_y^{-1}(T)$  (le produit de Kronecker  $\mathbf{A} \otimes_c \mathbf{B}$  désigne la matrice block dont le block  $(i,j)$  est  $b_{i,j}^* \mathbf{A}$ ). La solution en  $\Theta$  de (2.1) est donnée par

$$\Theta(T) = \arg \max_{\Theta} \mathbf{g}^H[\Theta, \mathbf{R}_y(T)] \mathbf{G}^{-1}[\Theta, \mathbf{R}_y(T)] \mathbf{g}[\Theta, \mathbf{R}_y(T)] \quad (2.2)$$

avec

$$\mathbf{g}[\Theta, \mathbf{R}_y(T)] \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^H(\Theta) \mathbf{W}_T \mathbf{r}_y(T)$$

et

$$\mathbf{G}[\Theta, \mathbf{R}_y(T)] \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^H(\Theta) \mathbf{W}_T \Psi(\Theta).$$

## 3 Performances asymptotiques et robustesse

### 3.1 Performances asymptotiques

#### 3.1.1 Distribution asymptotique

Dans le cas particulier où les observations  $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$  sont complexes circulaires gaussiennes et indépendantes, l'algorithme COMET (2.2) est asymptotiquement gaussien et efficace. Cette propriété est justifiée dans [1] à l'aide du principe de l'invariance étendu (EXIP) qui implique que l'estimée  $\Theta(T)$  fournie par l'algorithme COMET admet une covariance asymptotique égale à celle donnée par l'estimateur du maximum de vraisemblance. Comme ce dernier est asymptotiquement gaussien et efficace,  $\Theta(T)$  donnée par l'algorithme COMET est asymptotiquement gaussien et efficace.

Nous remarquons que cette propriété admet une justification plus simple car dans le cas d'observations gaussiennes indépendantes : **1**] il existe un estimateur du second ordre efficace et **2**] l'estimateur  $(\Theta(T), \Phi(T))$  donné

par (2.1) est un estimateur du second ordre asymptotiquement sans biais de variance minimum (extension au cas complexe circulaire d'un résultat classique (e.g. [2, pp.81-84]) car  $\mathbf{W}_T$  est un estimateur consistant de l'inverse de la matrice covariance asymptotique  $\mathbf{C}_{R_y} = \mathbf{R}_y \otimes_c \mathbf{R}_y$  du vecteur  $\mathbf{r}_y(T)$ . Par suite :

$$\sqrt{T} (\Theta(T) - \Theta) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{C}_{\Theta}) \quad (3.3)$$

avec (voir [1])

$$\mathbf{C}_{\Theta} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \Theta} \right)^H \mathbf{W}^{1/2} \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta)} \mathbf{W}^{1/2} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \Theta} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_y^{-1} \otimes_c \mathbf{R}_y^{-1}$ ,  $\Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta)}$  où  $\Pi_{\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta)}$  est la matrice de projection orthogonale sur les colonnes de  $\mathbf{W}^{1/2} \Psi(\Theta)$ .

Par contre dans le cas où les observations  $(\mathbf{y}_t)_{t=1, \dots, T}$  ne sont plus circulaires gaussiennes ou plus indépendantes, l'estimateur COMET donné par (2.2) n'est plus efficace (cf. Fig.1). Ses performances asymptotiques peuvent alors être analysées à l'aide de d'une approche fonctionnelle générale (e.g. [3]) dans laquelle l'algorithme COMET est vu comme une application qui associe à  $\mathbf{R}_y(T)$ , l'estimée

$$\Theta(T) = \text{COMET}(\mathbf{R}_y(T))$$

qui est une extension de l'application qui à  $\mathbf{R}_y$  associe  $\Theta : \Theta = \text{COMET}(\mathbf{R}_y)$ . Par suite la convergence asymptotique gaussienne (3.3) et la convergence asymptotique de la covariance empirique  $\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{Cov}(\Theta(T)) = \mathbf{C}_{\Theta}$  ont toujours lieu, mais avec

$$\mathbf{C}_{\Theta} = \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} \mathbf{C}_{R_y} (\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}})^H \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}}$  désigne la matrice associée à la différentielle de l'algorithme COMET par rapport à  $\Theta$  au point  $\mathbf{R}_y$  et où  $\mathbf{C}_{R_y}$  est la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur  $\mathbf{r}_y(T)$  qui n'est plus dans ce cas général égale à  $\mathbf{R}_y \otimes_c \mathbf{R}_y$  (voir [3] pour une expression générale dans le cas bande étroite). En remarquant que l'estimateur (2.2) a même loi asymptotique que l'estimateur donné par :

$$\Theta(T) = \arg \max_{\Theta} \mathbf{r}_y^H(T) \mathcal{G}(\Theta) \mathbf{r}_y(T)$$

avec  $\mathcal{G}(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W} \Psi(\Theta) [\Psi^H(\Theta) \mathbf{W} \Psi(\Theta)]^{-1} \Psi^H(\Theta) \mathbf{W}$ , on démontre aisément à partir d'un calcul de perturbation que :

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} = \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2$$

avec

$\mathcal{F}_1(k,l) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_y^H \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\Theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \mathbf{r}_y$  et  $\mathcal{F}_2(k, :) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_y^T \frac{\partial \mathcal{G}(\Theta)}{\partial \theta_k} \mathbf{K} + \mathbf{r}_y^H \frac{\partial \mathcal{G}(\Theta)}{\partial \theta_k}$ ,  $k, l = 1, \dots, K$  où  $\mathbf{K}$  est la matrice de permutation telle que  $\text{Vec}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{K} \text{Vec}(\mathbf{A})$  pour toute matrice carrée  $\mathbf{A}$  d'ordre  $M$ .

#### 3.1.2 Borne de Cramer-Rao

Dans le cas particulier d'observations complexes circulaires gaussiennes indépendantes, (3.4) nous donne indirectement l'expression  $CRB_{\Theta} = \frac{1}{T} \mathbf{C}_{\Theta}$  de la borne de Cramer-Rao du paramètre  $\Theta$  seul. Nous remarquons que dans le cas particulier d'une seule source, bande étroite où large bande à spectre symétrique et d'une géométrie

d'antenne quelconque, une expression de  $CRB_{\Theta}$  peut être directement déduite de l'expression classique (voir, e.g., [4, rel. (15.52)]) de la matrice de Fisher associée au paramètre  $\Psi \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \Phi)$ :

$$[\mathbf{I}(\Psi)]_{k,l} = T \text{Tr} \left( \mathbf{R}_y^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \psi_k} \mathbf{R}_y^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \psi_l} \right). \quad (3.6)$$

En effet dans ce cas  $\mathbf{R}_y$  se met sous la forme:

$$\mathbf{R}_y = \Delta_{\theta_1} \mathbf{R}_{\Phi} \Delta_{\theta_1}^H,$$

avec  $\Delta_{\theta_1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(e^{i2\pi f_0 \tau_{1,1}}, \dots, e^{i2\pi f_0 \tau_{1,M}})$  et  $\mathbf{R}_{\Phi} = \mathbf{R}_{s_1} + \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)$ . En utilisant une démonstration tout à fait similaire à celle présentée dans [5, Appendix I], on démontre que la matrice de Fisher (3.6) associée à notre modélisation se découple sous la forme:

$$\mathbf{I}(\Psi) = \begin{bmatrix} I(\theta_1) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}(\Phi) \end{bmatrix}$$

avec  $[\mathbf{I}(\Phi)]_{k,l} = T \text{Tr} \left( \mathbf{R}_{\Phi}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\Phi}}{\partial \phi_k} \mathbf{R}_{\Phi}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\Phi}}{\partial \phi_l} \right)$  et  $I(\theta_1) = 2\text{Tr}(\Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_{\Phi}^{-1} \Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_{\Phi} - \Delta'^2_{\theta_1})$  où  $\Delta'_{\theta_1} \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi f_0 \text{Diag}(\tau'_{1,1}, \dots, \tau'_{1,M})$  et  $\tau'_{1,m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tau_{1,m}}{d\theta}$ ,  $m = 1, \dots, M$ . D'où:

$$CRB_{\theta_1} = \frac{1}{2T} \left( \text{Tr}(\Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_{\Phi}^{-1} \Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_{\Phi} - \Delta'^2_{\theta_1}) \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

En bande étroite, cette expression devient une forme analytique interprétable, car dans ce cas:

$$\mathbf{R}_{\Phi}^{-1} = \mathbf{D} - (\sigma_{s_1}^{-2} + \sum_{m=1}^M \sigma_m^{-2})^{-1} \tilde{\mathbf{D}}$$

avec  $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(\sigma_1^{-2}, \dots, \sigma_M^{-2})$  et  $[\tilde{\mathbf{D}}]_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_m^{-2} \sigma_n^{-2}$ ,  $m, n = 1, \dots, M$ . Ce qui permet d'obtenir l'expression:

$$\begin{aligned} CRB_{\theta_1} &= \frac{1}{2T} \left( [\sigma_{s_1}^2 - (\sum_{m=1}^M \sigma_m^{-2})^{-1}] \mathbf{a}'_{\theta_1} \mathbf{D} \mathbf{a}'_{\theta_1} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{s_1}^2 (\sum_{m=1}^M \sigma_m^{-2})^{-1} |\mathbf{a}^H_{\theta_1} \mathbf{D} \mathbf{a}'_{\theta_1}|^2 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec  $\mathbf{a}'_{\theta_1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_{\theta_1}}{d\theta_1}$ . Nous signalons qu'a été porté récemment à notre connaissance une expression générale [6] de la borne de Cramer-Rao du paramètre  $\Theta$  seul dans le cas du modèle stochastique bande étroite à matrice de covariance du bruit paramétrée de façon quelconque, obtenue directement à partir de l'expression (3.6).

## 3.2 Robustesse

### 3.2.1 Robustesse par rapport à la distribution des signaux sources

Pour démontrer la robustesse de l'algorithme COMET par rapport à la distribution des signaux sources, nous avons besoin de démontrer le lemme suivant:

**Lemme:** La différentielle de l'algorithme COMET vérifie la contrainte suivante:

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} \Psi(\Theta) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

**Preuve:** Puisque l'application COMET vérifie quelque soit  $\Phi$

$$\text{COMET}[\Psi(\Theta)\Phi] = \Theta$$

alors quelque soit la perturbation  $\delta\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Theta &= \text{COMET}[\Psi(\Theta)(\Phi + \delta\Phi)] \\ &= \text{COMET}[\Psi(\Theta)\Phi] + \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} \Psi(\Theta)\delta\Phi + o(\delta\Phi) \\ &= \Theta + \mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} \Psi(\Theta)\delta\Phi + o(\delta\Phi) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ce lemme entraîne la propriété:

**Propriété 1:** Dans le cas de sources bande étroite complexes circulaires indépendantes dont les moments d'ordre 4 existent, l'algorithme COMET est robuste par rapport aux distributions des sources. Cette propriété étend celles démontrées dans [7] et [3].

**Preuve:** Puisque

$$\Psi_1(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_K), \times],$$

la contrainte (3.9) implique la sous contrainte

$$\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} [\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_K)] = \mathbf{0}$$

et comme dans ce cas  $\mathbf{C}_{R_y}$  est constitué d'une somme de termes de moments du deuxième et quatrième ordre [3], dont le seul terme du quatrième ordre des sources est

$$[\mathbf{A}(\Theta) \otimes_c \mathbf{A}(\Theta)] \mathbf{C}_{R_s} [\mathbf{A}^H(\Theta) \otimes_c \mathbf{A}^H(\Theta)]$$

avec  $\mathbf{C}_{R_s} = \mathbf{R}_s \otimes_c \mathbf{R}_s + \sum_{k=1}^K c_{s_k} (\mathbf{e}_k \otimes_c \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_k^H \otimes_c \mathbf{e}_k^H)$

où  $\mathbf{R}_s = \text{Diag}(\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2)$ ,  $c_{s_k} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cum}(s_t^k, s_t^{k*}, s_t^k, s_t^{k*})$

et  $\mathbf{e}_k$  désigne le  $k$ ième vecteur unité de  $\mathcal{C}^M$  et  $\mathbf{A}(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ , la contribution de ce terme dans  $\mathbf{C}_{\Theta}$  s'annule car:  $(\mathbf{A}(\Theta) \otimes_c \mathbf{A}(\Theta)) (\mathbf{e}_k \otimes_c \mathbf{e}_k) = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{e}_k \otimes_c \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{e}_k = \mathbf{a}(\theta_k) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_k)$   $\blacksquare$

**Propriété 2:** Dans le cas d'une source large bande complexe circulaire dont le moment d'ordre 4 existe, l'algorithme COMET n'est pas robuste par rapport à la distribution de la source.

**Preuve:** Dans ce cas  $\Psi_2(\Theta) = [\text{Diag}(\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1)) \mathbf{J}, \times]$

avec  $\mathbf{J}$  telle que  $\text{Vec}(\mathbf{R}_s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J} \Phi_s$  avec  $\Phi = [\Phi_s^T, \sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2]^T$

et la sous contrainte  $\mathbf{D}_{\Theta, \mathbf{R}_y}^{\text{COMET}} \text{Diag}(\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1)) \mathbf{J} = \mathbf{0}$  ne peut en général (voir Fig.2 dans la section simulation) annuler la contribution du moment du quatrième ordre de la source de l'expression de  $\mathbf{C}_{R_y}$ :

$$\mathbf{C}_{R_y} = \mathbf{C}_{R_s} + \mathbf{C}_{R_n} + \mathbf{R}_n \otimes_c \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s \otimes_c \mathbf{R}_n$$

avec  $\mathbf{R}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}^H(\theta_1) \odot \mathbf{R}_{s_1} + \mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{C}_{R_n} = \mathbf{R}_n \otimes_c \mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{C}_{R_s} = \mathbf{R}_s \otimes_c \mathbf{R}_s + \text{Diag}(\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1)) \mathbf{Q}_s \text{Diag}(\mathbf{a}(\theta_1) \otimes_c \mathbf{a}(\theta_1))$  avec

$$[\mathbf{Q}_s]_{(j-1)M+i, (l-1)M+j} = \text{Cum}(s_{-\tau_{1,i}}^1, s_{-\tau_{1,j}}^{1*}, s_{-\tau_{1,k}}^1, s_{-\tau_{1,l}}^{1*}) \quad \blacksquare$$

### 3.2.2 Robustesse par rapport à un capteur déficient

Dans le cas d'une seule source bande étroite ou large bande, d'un réseau quelconque et d'observations gaussiennes circulaires indépendantes, nous avons les propriétés suivantes:

**Propriété 3:** La loi asymptotique de l'estimée obtenue par l'algorithme COMET lorsque les puissances  $(\sigma_m^2)_{m \in \mathcal{C}_d}$ ,  $\mathcal{C}_d \in \{1, \dots, M\}$  de certains capteurs tendent vers l'infini est celle obtenue à partir du réseau privé de ces capteurs déficients.

**Preuve:** L'estimateur COMET étant consistant, il suffit de démontrer que la limite de la borne de Cramer-Rao obtenue lorsque  $(\sigma_m^2)_{m \in \mathcal{C}_d} \rightarrow \infty$  est égale à la borne de Cramer-Rao associée au réseau privé de ces capteurs

déficients. Et pour se faire, il suffit de démontrer cette propriété de proche en proche en examinant un seul capteur déficient à la fois. Si le capteur déficient est le premier capteur, en reportant les expressions du partitionnement de  $\mathbf{R}_\Phi$

$$\mathbf{R}_\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2 & \tilde{\mathbf{r}}_\Phi^H \\ \tilde{\mathbf{r}}_\Phi & \tilde{\mathbf{R}}_\Phi \end{bmatrix}.$$

et de son inverse (e.g. [2, pp.413])

$$\mathbf{R}_\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & (\sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_\Phi^H \Delta^{-1} \\ (\sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2)^{-1} \Delta^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_\Phi & \Delta^{-1} \end{bmatrix}.$$

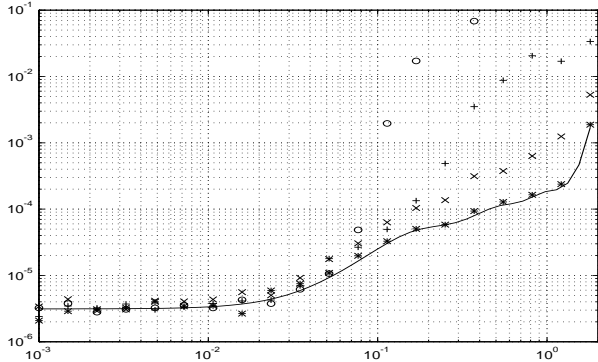
avec  $\delta \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2)^{-1} + (\sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2)^{-2} \tilde{\mathbf{r}}_\Phi^H \Delta^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_\Phi$  et  $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{R}}_\Phi - \tilde{\mathbf{r}}_\Phi (\sigma_{s_1}^2 + \sigma_1^2)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_\Phi^H$  dans l'expression (3.7) de la borne de Cramer-Rao, on obtient sans difficulté :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_1^2 \rightarrow \infty} \text{Tr}(\Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_\Phi^{-1} \Delta'_{\theta_1} \mathbf{R}_\Phi - \Delta'_{\theta_1}) \\ = \text{Tr}(\tilde{\Delta}'_{\theta_1} \tilde{\mathbf{R}}_\Phi^{-1} \tilde{\Delta}'_{\theta_1} \tilde{\mathbf{R}}_\Phi - \tilde{\Delta}'_{\theta_1}) \end{aligned}$$

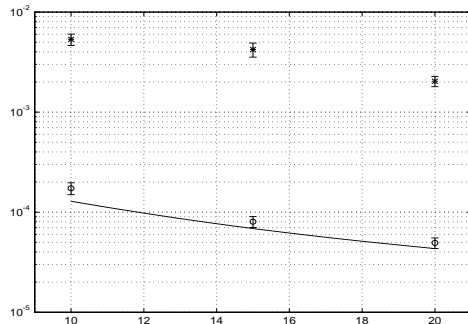
où  $\tilde{\Delta}'_{\theta_1}$  est la matrice diagonale  $\Delta'_{\theta_1}$  privée de sa première ligne et première colonne. Dans le cas d'un capteur déficient quelconque  $m$ , il suffit d'appliquer le partitionnement précédent aux matrices  $\mathbf{P}\mathbf{R}_\Phi\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}\mathbf{R}_\Phi^{-1}\mathbf{P}$  où  $\mathbf{P}$  est la matrice de permutation qui permute les colonnes 1 et  $m$ . ■

Notons que des simulations (cf. Fig. 3a) montrent que la loi asymptotique de l'estimée obtenue par l'algorithme COMET n'est pas modifiée si de plus les signaux  $s_t^m$  sont coupés sur ces capteurs défectifs.

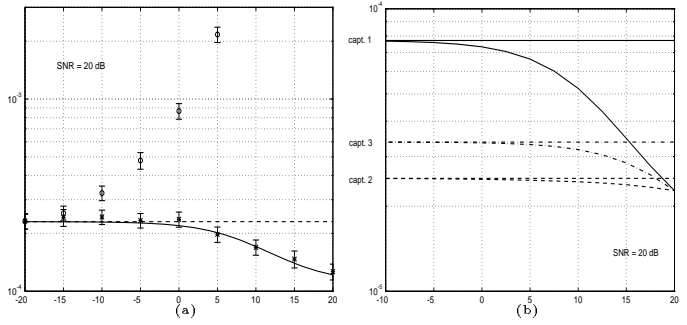
## 4 Simulations



**Fig.1** Borne de Cramer-Rao (-), EQM (estimée avec 160 réalisations) de l'algorithme COMET large bande appliqué à des échantillons indépendants (\*), ou issus d'un échantillonnage à la fréquence de Nyquist (x), de l'algorithme COMET bande étroite (o) et de l'algorithme de focalisation de Friedlander [9] (+) en fonction de  $\frac{B}{f_0}$  pour une source gaussienne de spectre blanc, un réseau LU de 5 capteurs et un SNR = 20 dB.



**Fig.2** EQM (estimée avec 160 réalisations) de l'algorithme COMET large bande dans le cas d'une source gaussienne (o) ou distribuée selon une loi NIG [8] de cumulants normalisés d'ordre 4 égal à  $3 \cdot 10^3$  (\*) en fonction du SNR pour un réseau LU de 10 capteurs et  $\frac{B}{f_0} = 1$ .



**Fig.3a** EQM (estimée avec 320 réalisations) de l'algorithme COMET large bande en fonction du rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit sur le 1<sup>er</sup> capteur, dans le cas où le signal utile sur ce capteur est présent (\*) ou absent (o), comparées à la borne de Cramer-Rao sous la 1<sup>ere</sup> hypothèse (-) et à la borne de Cramer-Rao correspondant au réseau privé du 1<sup>er</sup> capteur (- -) pour un réseau LU de 3 capteurs,  $\frac{B}{f_0} = 1$  et un SNR = 20 dB pour les autres capteurs.

**Fig.3b** Borne de Cramer-Rao en fonction du rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit sur respectivement le 1<sup>er</sup>, 2<sup>eme</sup> ou 3<sup>eme</sup> capteur d'un réseau LU de 5 capteurs recevant les signaux de 2 sources de même puissance avec un SNR = 20 dB pour les capteurs non défectifs.

## Références

- [1] B. Ottersten, P. Stoica and R. Roy, "Covariance matching estimation techniques for array signal processing," *Digital Signal Processing*, vol. 8, pp. 185-210, 1998.
- [2] B. Porat, *Digital processing of random signals, Theory and Methods*, Prentice Hall, 1993.
- [3] J.P. Delmas, Y. Meurisse, "Asymptotic performance analysis of DOA algorithms with temporally correlated narrow-band signals," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 9, pp. 2669-2674, Sept. 2000.
- [4] S.M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing*, New York: Prentice Hall, 1993.
- [5] O. Besson, P. Stoica, "Decoupled estimation of DOA and angular spread for spatially distributed source," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 7, pp. 1872-1882, June 2000.
- [6] A. Gershman, M. Pesavento, P. Stoica and E. Larsson, "The stochastic CRB for array processing in unknown noise fields," *Proc. ICASSP Salt Lake City*, May 2001.
- [7] J.F. Cardoso, E. Moulines, "A robustness property of DOA estimators based on covariance," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 3285-3287, Nov. 1994.
- [8] A. Hanssen, T.A. Oigard, "The normal inverse Gaussian distribution : A versatile model for heavy-tailed stochastic processes," *Proc. ICASSP Salt Lake City*, May 2001.
- [9] B. Friedlander, A.J. Weiss, "Direction finding for wide-band signals using an interpolated array," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, no. 4, pp. 1618-1634, April 1993.