

Analyse de la convergence en turbo-détection

Raphaël LE BIDAN, Christophe LAOT, Dominique LEROUX, Alain GLAVIEUX

ENST Bretagne - Département Signal et Communications
Technopôle de Brest Iroise, BP832, 29285 Brest Cedex, France

Raphael.LeBidan@enst-bretagne.fr, Christophe.Laot@enst-bretagne.fr
Dominique.Leroux@enst-bretagne.fr, Alain.Glavieux@enst-bretagne.fr

Résumé – Cette publication présente l’application d’une méthode d’analyse asymptotique à l’étude de la convergence en turbo-détection. L’analyse s’appuie sur une visualisation de l’évolution de l’information extrinsèque échangée entre le détecteur et le décodeur, par l’intermédiaire des diagrammes EXIT. Les résultats obtenus montrent une prédiction pertinente de la convergence optimale du processus itératif.

Abstract – This paper addresses the problem of asymptotic convergence analysis in iterative equalization and decoding systems (turbo-detection). We use EXIT charts to visualize the evolution of extrinsic information exchanged between the symbol detector and the outer decoder. Simulation results bring new insights into the optimal convergence behaviour of the iterative process.

1 Introduction

La transmission de données au sein d’un milieu sélectif en fréquence engendre de l’Interférence Entre Symboles (IES) sur le message transmis. Un dispositif d’égalisation adéquat doit alors être mis en oeuvre en réception afin de compenser la dégradation introduite par l’IES. En présence de codage canal à l’émission, on dispose d’un gain de correction supplémentaire qui peut être mis à profit pour améliorer le traitement de l’IES. Dans ce contexte, le récepteur optimal (au sens du Maximum de Vraisemblance) réalise la détection de symbole et le décodage de manière conjointe, par le biais de l’algorithme de Viterbi par exemple. La complexité du treillis associé («super-treillis») demeure néanmoins prohibitive en pratique, d’autant plus qu’elle augmente exponentiellement avec la taille de l’entrelaceur généralement inséré entre le codeur et le modulateur. Classiquement, l’égalisation et le décodage sont donc réalisés de manière disjointe, ce qui s’accompagne d’une perte d’information.

Introduite en 1995 [1], la turbo-détection réalise un compromis intéressant entre ces deux alternatives en proposant une structure itérative de détection et décodage directement inspirée des turbo-codes. En dépit du caractère sous-optimal de cette approche, d’excellentes performances ont été démontrées par simulation. A l’instar des turbo-codes, la compréhension de ces bons résultats demeure cependant un problème encore non résolu à ce jour. L’enjeu est double :

1) pouvoir prédire le comportement du processus itératif (conditions et limites de la convergence), en particulier à bas rapport signal sur bruit lorsque les analyses traditionnelles (bornes) ne s’appliquent plus.

2) en tirer des leçons pour optimiser la conception des systèmes itératifs.

Cette publication propose l’application d’une technique d’analyse asymptotique, les diagrammes EXIT, à l’étude

de la convergence en turbo-détection. Cette méthode a récemment été utilisée pour comparer les performances de différents turbo-égaliseurs [9].

2 Chaîne de transmission

Le modèle discret équivalent de la chaîne de communication étudiée est représenté figure 1. On se place dans le cadre d’une transmission par paquets. Les données générées par une source binaire uniforme sont protégées par un codage convolutif de rendement R_c . Le message codé correspondant est entrelacé puis transmis suivant une modulation de phase à 2 ou 4 états. La loi d’entrelacement est générée aléatoirement. La réponse impulsionnelle du canal discret équivalent est supposée finie, invariante dans le temps et parfaitement connue du récepteur. Les modules SISO (*Soft-Input Soft-Output*) de détection et décodage sont réalisés à partir de l’algorithme BCJR-MAP [2].

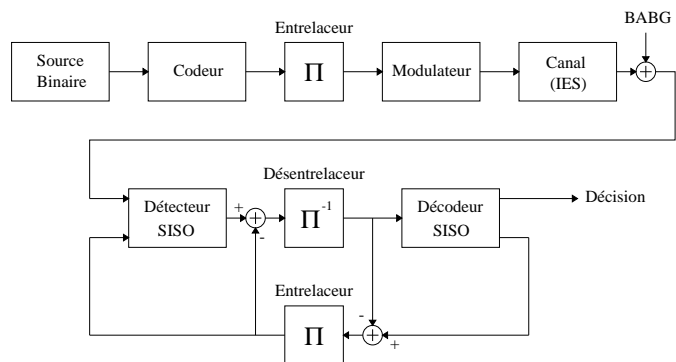


FIG. 1: Modèle de la chaîne de transmission

Par la suite, nous noterons λ l’information extrinsèque échangée entre les modules SISO et relative à un bit codé $x \in \{\pm 1\}$. λ désigne ici une information pondérée, de densité de probabilité conditionnelle $f(\lambda|x)$.

3 Principe de l'analyse

La turbo-détection présente de nombreuses analogies avec la concaténation série de codes convolutifs. Les méthodes d'analyse développées dans le cadre des turbo-codes sont donc directement transposables à notre étude.

Richardson et Urbanke ont récemment introduit une méthode dite de propagation des distributions (ou *density evolution*), permettant d'obtenir de manière analytique les performances du décodage itératif des codes LDPC lorsque la taille du code tend vers l'infini [3]. Cette méthode a ensuite été généralisée au décodage itératif d'une concaténation quelconque de codes isotropes en présence d'entrelacement [4]. Elle repose sur l'estimation de la distribution du message en sortie de chaque décodeur en fonction des distributions présentes à son entrée à chaque itération. Cette analyse est rigoureuse dans le sens où elle ne fait aucune hypothèse sur l'allure des densités de probabilité des messages échangés.

D'une manière générale, les simulations montrent que lorsque l'entrelacement est suffisant, la distribution de l'information extrinsèque peut être approximée avec précision par une loi Normale après quelques itérations. Celle-ci est alors parfaitement caractérisée par la donnée des deux paramètres $\mu_\lambda = |E[\lambda]|$ et $\sigma_\lambda^2 = \text{var}[\lambda]$. Une simplification supplémentaire est introduite en considérant la propriété asymptotique de *consistence* présentée en [3]. Cette propriété stipule essentiellement que lorsque la taille de l'entrelaceur tend vers l'infini, la distribution de l'information extrinsèque obéit à la relation suivante :

$$f(\lambda|x) = f(-\lambda|x) \exp(\lambda) \quad (1)$$

L'application de cette condition à une distribution Gaussienne de paramètres $\mathcal{N}(\mu_\lambda x, \sigma_\lambda^2)$ conduit au résultat $\sigma_\lambda^2 = 2\mu_\lambda$. L'information extrinsèque est donc asymptotiquement indépendante et identiquement distribuée suivant :

$$f(\lambda|x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_\lambda}} \exp - \frac{(\lambda - \mu_\lambda x)^2}{4\mu_\lambda} \quad (2)$$

Notons que l'on a la symétrie suivante :

$$f(\lambda|x = +1) = f(-\lambda|x = -1) \quad (3)$$

Ces constatations réduisent la dimension de l'analyse (à l'origine infinie) au suivi de l'évolution du paramètre unique μ_λ . L'analyse de la convergence par les diagrammes EXIT repose implicitement sur ce résultat fondamental.

4 Les diagrammes EXIT

Les diagrammes EXIT (*EXtrinsic Information Transfer Charts*) ont été initialement introduits par ten Brink pour optimiser la conception de turbo-codes [5]. Ces diagrammes proposent une visualisation graphique de l'évolution de la qualité de l'information extrinsèque échangée itérativement entre modules SISO. Cette approche se distingue des analyses similaires présentées par [6] et [7] par l'utilisation d'une grandeur bornée, pertinente du point de vue de l'interprétation. En effet, la qualité de l'information extrinsèque est quantifiée par la mesure de l'information

mutuelle moyenne (IMM) apportée par λ sur x , définie comme :

$$\mathcal{I}_{\lambda,x} = \frac{1}{2} \sum_{x=-1,+1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda|x) \times \log_2 \frac{2 \cdot f(\lambda|x)}{f(\lambda|-1) + f(\lambda|+1)} d\lambda \quad (4)$$

En supposant que λ suive une loi $\mathcal{N}(\mu_\lambda x, 2\mu_\lambda)$ au cours du processus itératif, l'expression précédente se simplifie. En combinant les résultats (1) et (3), on obtient :

$$\mathcal{I}_{\lambda,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda|+1) \cdot \log_2 \frac{2}{1 + \exp(-\lambda)} d\lambda \quad (5)$$

où $f(\lambda|+1)$ est donnée par (2). On constate que $\mathcal{I}_{\lambda,x}$ est une fonction strictement croissante (et par conséquent inversible) du paramètre μ_λ , avec les limites suivantes :

$$\lim_{\mu_\lambda \rightarrow 0} \mathcal{I}_{\lambda,x}(\mu_\lambda) = 0, \quad \lim_{\mu_\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{\lambda,x}(\mu_\lambda) = 1$$

$\mathcal{I}_{\lambda,x} = 0$ correspond au cas extrême où λ et x sont statistiquement indépendants. A l'inverse, on a $\mathcal{I}_{\lambda,x} = 1$ lorsque λ détermine parfaitement x .

Le comportement non linéaire de chaque module SISO peut donc être caractérisé par une fonction de transfert de la forme $\mathcal{I}_{out} = G(\mathcal{I}_{in})$, \mathcal{I}_{in} (respectivement \mathcal{I}_{out}) désignant l'IMM en entrée (sortie) du module. Le processus de turbo-détection est alors modélisable par le schéma équivalent présenté ci-dessous.

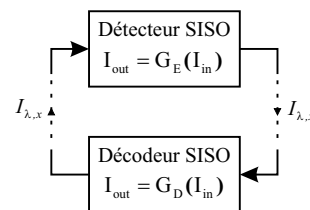


FIG. 2: Schéma équivalent du turbo-détecteur

Les caractéristiques du détecteur et du décodeur sont évaluées individuellement, par simulation. On génère en entrée de chaque module une séquence $\{\lambda\}$ distribuée suivant une loi $\mathcal{N}(\mu_\lambda x, 2\mu_\lambda)$ pour différentes valeurs du paramètre μ_λ . L'IMM correspondante en entrée \mathcal{I}_{in} est donnée par la relation (5). \mathcal{I}_{out} est obtenue par évaluation numérique de l'expression intégrale (4), à partir d'une estimation (par histogramme) des distributions $f(\lambda|+1)$ et $f(\lambda|-1)$ produites en sortie.

4.1 Diagramme EXIT du décodeur

En turbo-détection, la fonction de transfert du décodeur $\mathcal{I}_{out} = G_D(\mathcal{I}_{in})$ ne dépend que des propriétés du code. Nous avons représenté figure 3 les caractéristiques obtenues avec différents codes convolutifs. La notation $(1, g_1/g_2)$ désigne une structure récurrente systématique.

On constate que le choix de la structure du codeur n'influe pas sur la convergence du turbo-détecteur puisque les caractéristiques obtenues avec les codeurs récurrents systématiques sont confondues avec celles de leurs équivalents non récurrents non systématiques [9].

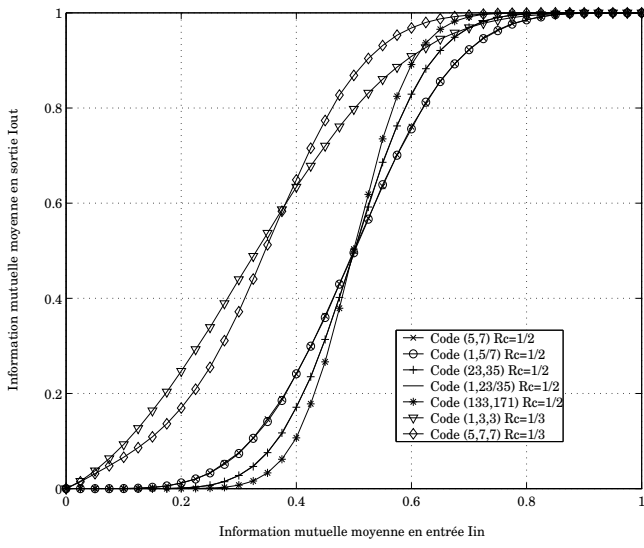


FIG. 3: Exemples de diagrammes EXIT du décodeur SISO

Le diagramme EXIT du décodeur peut être complété par une seconde caractéristique donnant le taux d'erreur binaire (TEB) mesuré sur les bits d'information en sortie du décodeur, en fonction de l'IMM en entrée (figure 4). L'utilité de cette courbe sera précisée en section 5.

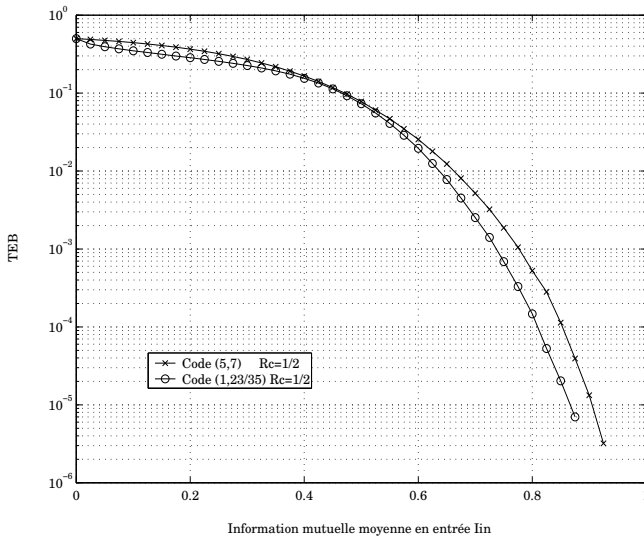


FIG. 4: Exemples de caractéristiques $TEB = f(I_{in})$

4.2 Diagramme EXIT du détecteur

La fonction de transfert du détecteur dépend de la modulation, de la sélectivité en fréquence du canal et du rapport signal sur bruit en sortie du démodulateur. A titre d'exemple, nous avons représenté figure 5 les caractéristiques obtenues dans le cas d'une transmission MDP-2 pour plusieurs valeurs du paramètre E_s/N_0 et sur différents modèles de canaux :

- canal Gaussien non sélectif
- canaux PROAKIS B (3 coefficients), PROAKIS C (5 coefficients) et CRIT5 (5 coefficients)

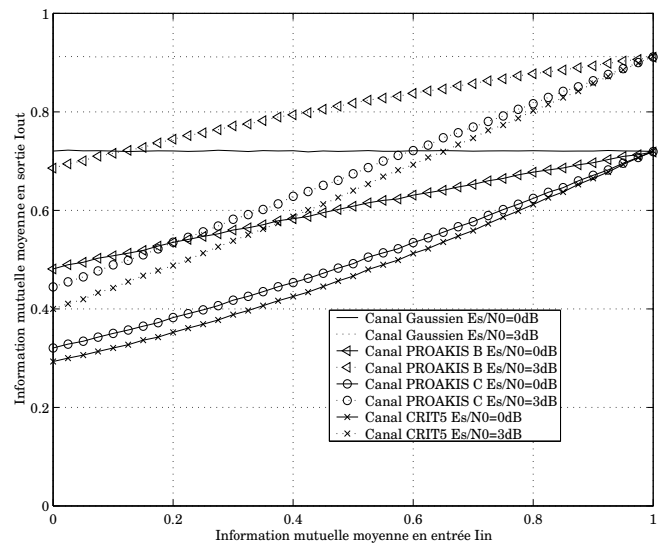


FIG. 5: Exemples de diagrammes EXIT du détecteur SISO

Ces canaux sont tirés de [8]. Soulignons que le canal CRIT5 constitue un pire cas pour le détecteur de symboles car ses coefficients ont été choisis de façon à minimiser la distance libre dans le treillis associé.

On observe d'une part que la sélectivité en fréquence du canal influe sur la pente de la caractéristique obtenue. D'autre part, en présence d'une information *a priori* parfaite ($I_{in} \rightarrow 1$), on constate que le détecteur s'affranchit complètement de l'IES puisque l'on retrouve asymptotiquement les performances du canal non sélectif.

5 Application à l'analyse du turbo-détecteur

Le diagramme EXIT du turbo-détecteur résulte de la superposition des diagrammes EXIT du détecteur et décodeur sur une même figure, en accord avec l'échange d'information entre modules (voir figure 2) :

$$\mathcal{I}_{in}(\text{détecteur}) = \mathcal{I}_{out}(\text{décodeur})$$

$$\mathcal{I}_{in}(\text{décodeur}) = \mathcal{I}_{out}(\text{détecteur})$$

Le processus de turbo-détection dessine théoriquement une trajectoire en «marches d'escalier» sur cette représentation, par projection sur les caractéristiques du détecteur et du décodeur :

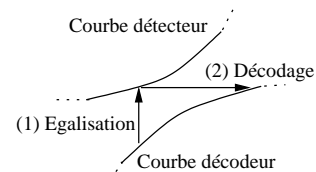


FIG. 6: Trajectoire d'une itération du processus itératif

Lorsque cette trajectoire atteint un point de croisement entre les courbes, le processus itératif cesse de converger puisque l'échange d'information entre modules n'apporte alors plus d'innovation.

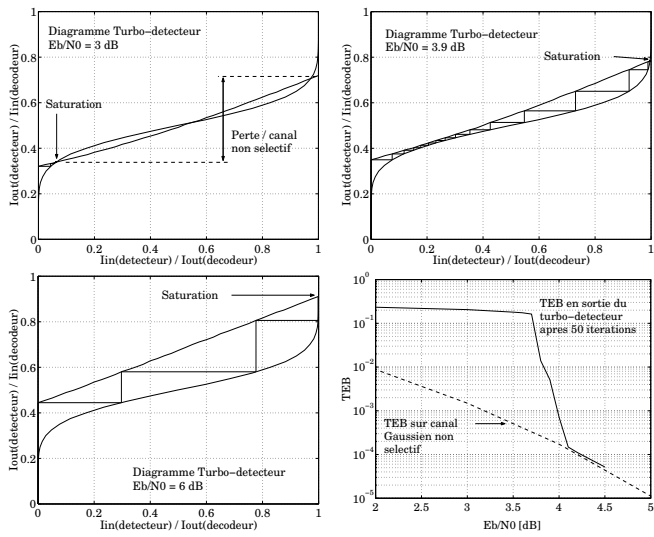


FIG. 7: Analyse de la convergence du turbo-détecteur sur le canal PROAKIS C

Nous avons appliqué les diagrammes EXIT à l'analyse d'une transmission MDP-2 sur les canaux PROAKIS C (figure 7) et CRIT5 (figure 8), avec un codage convolutif de rendement 1/2 et de polynômes générateurs (1,23/35). Les diagrammes obtenus prédisent une convergence rapide vers les performances du canal Gaussien à partir d'un seuil $E_b/N_0 = 3.9$ dB sur le canal PROAKIS C et $E_b/N_0 = 4.7$ dB sur le canal CRIT5. Ils nous donnent également le TEB optimal que l'on peut atteindre (pour chaque valeur de E_b/N_0) en reportant l'ordonnée du point de saturation en abscisse de la caractéristique $TEB = f(I_{in})$ du décodeur. Par exemple, on obtient un TEB optimal de $2 \cdot 10^{-4}$ pour $E_b/N_0 = 3.9$ dB sur le canal PROAKIS C.

Afin de vérifier ces résultats, nous avons simulé ces deux scénarios en utilisant une matrice d'entrelacement 256×256 . Le TEB mesuré en sortie du turbo-détecteur après 50 itérations (figures 7 et 8) se révèle très proche des prédictions des diagrammes puisque la convergence est effective à 4.1 dB sur le canal PROAKIS C et 4.8 dB sur le canal CRIT5. Dans les deux cas, la perte résiduelle par rapport aux performances sur canal Gaussien est négligeable.

Cette analyse fait abstraction de l'entrelacement, supposé idéal. En réalité, l'entrelaceur est toujours de taille finie. La distribution asymptotique (2) ne représente donc qu'une approximation de la distribution réelle de l'information extrinsèque. Néanmoins, la grande taille de l'entrelaceur utilisé en simulation ainsi que la robustesse de l'IMM vis à vis d'une distribution non Gaussienne justifient la justesse des prévisions obtenues.

6 Conclusion

Bien qu'ils ne constituent pas une preuve rigoureuse de la convergence, les diagrammes EXIT se révèlent donc pertinents pour optimiser la conception d'un turbo-détecteur. Ils apportent en effet des éléments de réponse quant à l'influence de certains paramètres tels que le choix du code ou de l'algorithme d'égalisation sur les performances

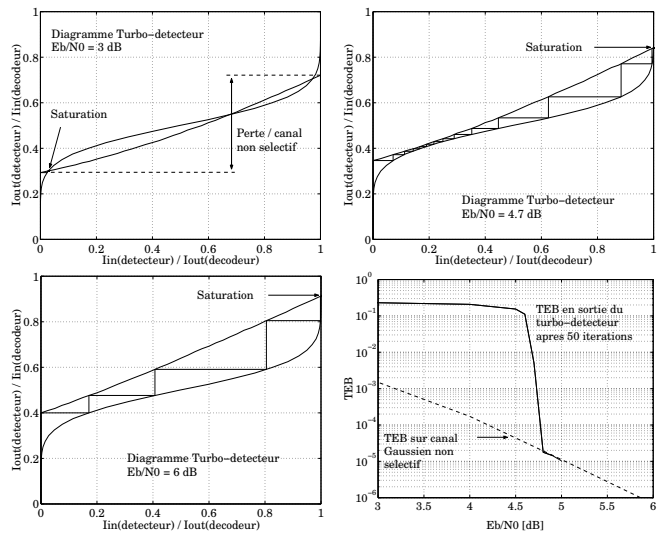


FIG. 8: Analyse de la convergence du turbo-détecteur sur le canal CRIT5

optimales du système. Cette analyse demeure cependant asymptotique et ne s'applique donc plus dans le cas plus réaliste de messages et entrelaceurs de petite taille.

Références

- [1] C. Douillard, A. Picart, P. Didier, M. Jézéquel, C. Berrou et A. Glavieux. *Iterative Correction of Intersymbol Interference: Turbo Equalization*. European Trans. Telecom., vol.6, pp.507-511, Sept-Oct. 1995.
- [2] G. Bauch, H. Khorram et J. Hagenauer. *Iterative Equalization and Decoding in Mobile Communications Systems*. Proc. EPMCC'97, pp.307-312, Bonn, Germany, Sept-Oct. 1997.
- [3] T. Richardson et R. Urbanke. *An Introduction to the Analysis of Iterative Coding Systems*. Proc. of the 1999 IMA Summer Program: Codes Systems and Graphical Models, Minnesota, USA, 2-6 Août 1999.
- [4] S. Vialle et J. Boutros. *Performance Limits of Concatenated Codes with Iterative Decoding*. Proc. of IEEE ISIT 2000, p.150, Sorrento, Italy, 25-30 Juin 2000.
- [5] S. ten Brink. *Design of Serially Concatenated Codes based on Iterative Decoding Convergence*. Proc. of 2nd International Symposium on Turbo Codes, pp.319-322, Brest, France, Septembre 2000.
- [6] D. Divsalar, S. Dolinar et F. Pollara. *Iterative Turbo Decoder Analysis based on Density Evolution*. IEEE JSAC, vol.19, pp.891-907, Mai 2001.
- [7] A. Roumy. *Egalisation et Décodage Conjointes: Méthodes Turbo*. Thèse de Doctorat de l'Université de Cergy-Pontoise, France, 24 Octobre 2000.
- [8] J.G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New-York, 4th edition, 2000.
- [9] M. Tuechler, R. Koetter et A.C. Singer. *Turbo Equalization: principles and new results*. Preprint, Août 2000. <http://www.uiuc.edu/~acsinger/teq.ps>